Übungen zur Thermodynamik – Lösungen Serie 6

1. *Strahlungseigenschaften eines Spiegels*

   (a) Ein idealer Spiegel würde sämtliche einfallende Strahlung reflektieren. Damit wäre seine Albedo $\underline{\underline{\beta = 100\,\%}}$ und sein Absorptionskoeffizient $\underline{\underline{\alpha = 0}}$. Da Körper gemäss dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz gleich gut emittieren wie absorbieren, müsste auch der Emissionskoeffizient eines idealen Spiegels $\underline{\underline{\varepsilon = 0}}$ sein.

   (b) Die Rettungsdecke ist kein idealer Spiegel. Sie spiegelt aber nicht so schlecht. Das bedeutet, sie hat einen geringen Absorptions- und damit auch einen geringen Emissionskoeffizienten. Letzteres bedeutet, dass die Decke trotz ihrer geringen Dicke **warm hält**, denn es wird nur wenig Wärmestrahlung abgegeben.

   Die "Verspiegelung" auf der Innenseite ist ebenfalls positiv zu bewerten, denn sie wirft die Wärmestrahlung des Menschen auf ihn zurück.

2. *UV-Lampen*

   Damit ein Temperaturstrahler UV-Licht erzeugt, müsste er sehr heiß sein. So enthält das Sonnenlicht – also Licht von einem Wärmestrahler der Temperatur $5500\,^\circ\mathrm{C}$ – deutliche UV-Anteile bis hin zur hochenergetischen UV-C-Strahlung.

   Herkömmliche helle Glühlampen leuchten mit Temperaturen von ca. $3000\,^\circ\mathrm{C}$ und senden noch kein resp. nur extrem wenig UV-Licht aus. Schon dies zu erreichen war eine technische Herausforderung, denn man braucht ein leitendes Material, das bei dieser Temperatur nicht schmilzt. In herkömmlichen Glühlampen wird deshalb Wolfram mit einer Schmelztemperatur von $3422\,^\circ\mathrm{C}$ verwendet. Es ist fast das einzige Material, dass hierfür in Frage kommt – und, wie wir bemerken, kann die Temperatur da nicht mehr viel weiter erhöht werden.

   Würden wir ein Material finden, das aber doch höhere Temperaturen zuließe, so wäre damit die UV-Erzeugung nicht sonderlich sinnvoll, denn eine höhere Temperatur würde wegen der immens höheren Leistungsabstrahlung viel mehr Energieaufwand bedeuten. Bereits bei der herkömmlichen Glühlampe wird von der zugeführten elektrischen Leistung nur gerade ein Anteil von ca. $5\,\%$ zur Erzeugung sichtbaren Lichts verwendet. Bei der UV-Glühlampe wäre dieses Unverhältnis zur Erzeugung von UV-Licht noch um ein Vielfaches ungünstiger!

3. *Temperaturen von Himmelskörpern und Strassenlampen*

   (a) Mittels des Wienschen Verschiebungsgesetzes errechnen wir für Altairs Oberflächentemperatur:

   $$T = \frac{2898\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{\lambda_{\max}} = \frac{2898\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{372\,\mathrm{nm}} = \frac{2\,898\,000\,\mathrm{nm}\cdot\mathrm{K}}{372\,\mathrm{nm}} = 7790\,\mathrm{K} \simeq \underline{\underline{7520\,^\circ\mathrm{C}}}$$

   (b) Aus dieser Information kann ich sicher keine Schlüsse über die Oberflächentemperatur des Mondes ziehen, zumindest nicht so, wie wir das unter (a) für den Stern Altair gemacht haben.

   Das Wiensche Verschiebungsgesetz gilt für die Emission von Temperaturstrahlern. Der Mond leuchtet aber nicht aufgrund seiner eigenen Temperatur, sondern weil er von der Sonne beschienen wird und das Sonnenlicht streut. Unter der Annahme, dass der Mond alle Wellenlängen des Sonnenlichts gleich gut streut, würden die $692\,\mathrm{nm}$ für die Wellenlänge maximaler Intensität im Sonnenlicht stehen. D.h., dass wir mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz allenfalls auf die Sonnentemperatur schließen könnten. Diese kommt mit $4190\,\mathrm{K}$ allerdings deutlich zu niedrig heraus.

   Somit können wir vor allem folgern, dass die Reflexions- resp. Streuungseigenschaften des Mondes nicht für alle Wellenlängen gleich sind.

(c) Wieder rechnen wir mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz um:

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2898\,\mu\text{m}\cdot\text{K}}{T} = \frac{2898\,\mu\text{m}\cdot\text{K}}{25\,000\,\text{K}} = \frac{2\,898\,000\,\text{nm}\cdot\text{K}}{25\,000\,\text{K}} \simeq \underline{\underline{120\,\text{nm}}}$$

Diese Wellenlänge maximaler Intensität liegt punkto "Farbe" tief im UV-Bereich. UV-Licht wird in drei Kategorien unterteilt: UV-A ($315\,\text{nm} - 380\,\text{nm}$), UV-B ($280\,\text{nm} - 315\,\text{nm}$) und UV-C ($100\,\text{nm} - 280\,\text{nm}$). Alnitaks Intensitätsmaximum liegt also im **UV-C-Bereich**.

Die UV-Komponente sehen wir ja nicht, aber die Violett- und Blaukomponenten dieses Sterns dominieren über die anderen Spektralfarben. Es ist daher zu erwarten, dass Alnitak **bläulich** leuchtet. Deshalb ist er eben ein **blauer** Überriese.

(d) Hier ein paar Bemerkungen zum Spektrum der und zum Text über die Straßenlampe:

- Offensichtlich handelt es sich um eine Lampe, die kein Temperaturstrahler ist. Der Verlauf der spektralen Intensität entspricht klar nicht dem Planckschen Strahlungsgesetz.
- Links im Spektrum sehen wir einen blauen Peak, der relativ scharf ist. Dies deutet auf die Erzeugung durch eine Sorte von LEDs hin.
- Der Rest des emittierten Lichts ist langwelliger und über einen größeren Wellenlängenbereich verteilt. Er besteht aus Licht, das nicht direkt aus einer LED stammt, sondern das von einer zum Leuchten angeregten Beschichtung herrührt. Die Anregung kann durch irgendeine andere Strahlungsquelle erfolgen. Offenbar ist diese Transformation heute recht effizient.
- In diesem Spektrum muss man vor allem auf nicht vorhandene Anteile hinweisen! So wird kaum Strahlung im Infrarotbereich ausgesendet. Das spricht sehr für die Lampe. Es bedeutet, dass sie keine Energie verschwendet für die Erzeugung von Strahlung, die nicht im sichtbaren Wellenbereich liegt. Das spricht für die Effizienz der Lampe.
- Man ist versucht die "4000 Kelvin" mittels Wienschem Verschiebungsgesetz zu interpretieren. In dieses eingesetzt ergibt sich eine Wellenlänge von:

  $$\lambda_{\text{max}} = \frac{2898\,\mu\text{m}\cdot\text{K}}{T} = \frac{2898\,\mu\text{m}\cdot\text{K}}{4000\,\text{K}} = \frac{2\,898\,000\,\text{nm}\cdot\text{K}}{4000\,\text{K}} \simeq \underline{\underline{700\,\text{nm}}}$$

  Bei dieser Wellenlänge scheint im Spektrum der Lampe aber gar nichts Nennenswertes los zu sein. Was soll diese Angabe?
  Tatsächlich werden diese Kelvin-Angaben bei LED-Lampen anders verstanden. Es geht um eine Angabe der sogenannten Farbtemperatur, wo unterschiedliche Werte für bestimmte Eigenschaften stehen. Mehr dazu erfahren wir via Internet, z.B. auf der Seite

  `https://ledtipps.net/kelvin-farbtemperatur/`

  Gemäß diesem Artikel handelt es sich bei der Straßenlampe um eine neutral-weiße Beleuchtung mit hellem, einladendem Licht.

Schließlich noch dies: Wer interessiert sich denn für das Licht von Straßenlampen? Oder anders: Was für eine Organisation ist **Dark-Sky Switzerland**? Ich zitiere aus dem Leitbild, das ich auf der Website `www.darksky.ch` gefunden habe:

"Dark-Sky Switzerland (DSS) ist eine Non-Profit-Organisation, die über einen lebenswerten Umgang mit künstlichem Licht informiert. Sie setzt sich für einen bewussten Umgang mit Licht im Einklang mit Mensch und Natur ein. Ihr Engagement dient der Erhaltung der biologischen Vielfalt, der natürlichen Nachtlandschaft und dem gezielten Einsatz von Ressourcen.

Dark-Sky Switzerland legt das Schwergewicht auf die Reduktion von Lichtverschmutzung zum Schutz von Mensch, Fauna und Flora. DSS bewirkt gesellschaftliche Verhaltensänderungen durch konstruktive, sachorientierte Information und Öffentlichkeitsarbeit. . . . "

4. *Absorption und Emission von Strahlung beim menschlichen Körper*

   (a) Nehmen wir an, die menschliche Körperoberfläche betrage gerade etwa $1\,\mathrm{m}^2$ so ergibt sich für die ausgesendete Strahlungsleistung mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz für den Mensch als schwarzen Körper ($T = 35\,°\mathrm{C} = 308\,\mathrm{K}$):

   $$P_{\text{out}} = \sigma \cdot A \cdot T^4 = 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4} \cdot 1\,\mathrm{m}^2 \cdot (308\,\mathrm{K})^4 = 510\,\mathrm{W} \simeq \underline{\underline{500\,\mathrm{W}}}$$

   (b) Unsere Körperoberfläche empfängt Strahlung aus der Umgebung. Gehen wir von $T = 20\,°\mathrm{C} = 293\,\mathrm{K}$ Umgebungstemperatur aus, so ergibt sich für die empfangene Strahlungsleistung wiederum aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz:

   $$P_{\text{in}} = \sigma \cdot A \cdot T^4 = 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4} \cdot 1\,\mathrm{m}^2 \cdot (293\,\mathrm{K})^4 = 418\,\mathrm{W} \simeq \underline{\underline{400\,\mathrm{W}}}$$

   (c) Für die Differenz zwischen ausgesendeter und empfangener Strahlungsleistung ergibt sich:

   $$\Delta P = P_{\text{out}} - P_{\text{in}} = 510\,\mathrm{W} - 418\,\mathrm{W} = 92\,\mathrm{W} \simeq 90\,\mathrm{W}$$

   Damit stimmt die Aussage nicht so schlecht. Natürlich verringern Kleider diese Differenz, denn sie werden durch den Körper aufgewärmt und senden so eine etwas größere Strahlungsleistung an den Körper zurück.

5. *Solarkonstante und Solarzellen*

   (a) Die elektrische Leistung der Solarzellen pro Fläche beträgt derzeit gemäß den Angaben:

   $$\frac{P_{\text{el}}}{A} = S \cdot 85\,\% \cdot 18\,\% = 1361\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0.85 \cdot 0.18 = 208\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

   Damit ergibt sich für die benötigte Solarzellenfläche:

   $$A_{\text{Solarzellen}} = \frac{P_{\text{Herd}}}{\frac{P_{\text{el}}}{A}} = \frac{2300\,\mathrm{W}}{208\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}} \simeq \underline{\underline{11\,\mathrm{m}^2}}$$

   (b) Die Paneelfläche beträgt $A = l \cdot b = 35\,\mathrm{m} \cdot 4.8\,\mathrm{m} = 168\,\mathrm{m}^2$. Die elektrische Leistung pro Fläche beträgt damit:

   $$\frac{P_{\text{el}}}{A} = \frac{16\,000\,\mathrm{W}}{168\,\mathrm{m}^2} = 95.2\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

   Daraus folgt für den Wirkungsgrad der Solarzellen:

   $$\eta = \frac{\frac{P_{\text{el}}}{A}}{S} = \frac{95.2\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{1361\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}} \simeq \underline{\underline{7.0\,\%}}$$

6. *Ein glühender Draht im Leistungsgleichgewicht*

   (a) Die vom Draht aufgenommene elektrische Leistung beträgt:

   $$P_{\text{el}} = U \cdot I = 30.0\,\mathrm{V} \cdot 3.9\,\mathrm{A} = 117\,\mathrm{W}$$

   Für die abstrahlende Oberfläche des Drahtes ergibt sich:

   $$A = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 0.00050\,\mathrm{m} \cdot 0.75\,\mathrm{m} = 0.00118\,\mathrm{m}^2$$

   Zwischen aufgenommener elektrischer und abgegebener Strahlungsleistung herrscht ein Gleichgewicht, woraus wir mittels Stefan-Boltzmann-Gesetz folgern:

   $$P_{\text{S}} = \sigma \cdot A \cdot T^4 = P_{\text{el}} \quad \Rightarrow \quad T^4 = \frac{P_{\text{el}}}{\sigma \cdot A}$$

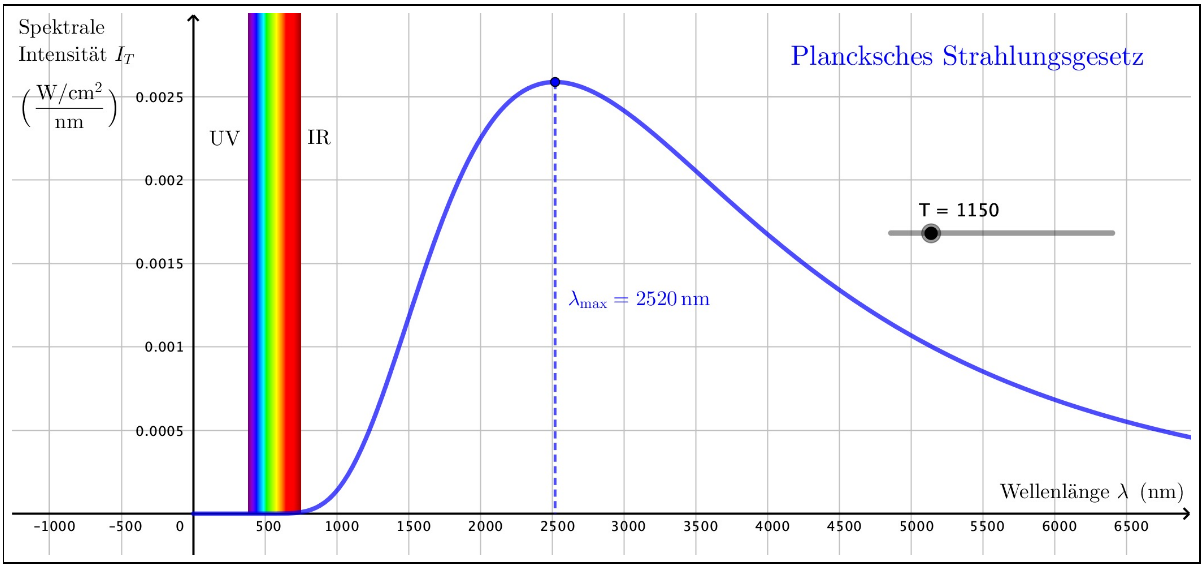
   $$\Rightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{el}}}{\sigma \cdot A}} = \sqrt[4]{\frac{117\,\mathrm{W}}{5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4} \cdot 0.00118\,\mathrm{m}^2}} = 1150\,\mathrm{K} \simeq \underline{\underline{880\,°\mathrm{C}}}$$

(b) i. Mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz folgt für die Wellenlänge maximaler Intensität:

$$\lambda_{\max} = \frac{2898\,\mu\text{m}\cdot\text{K}}{T} = \frac{2898\,\mu\text{m}\cdot\text{K}}{1150\,\text{K}} = 2.52\,\mu\text{m} = 2520\,\text{nm}$$

Damit liegt diese Wellenlänge klar **im Infraroten.**

ii. Der Draht ist bezüglich seiner Abstrahlung ohne grossen Fehler als schwarzer Körper anzusehen. Zu jeder Temperatur eines solchen **Temperaturstrahlers** gehört eine **Frequenzverteilung (Spektrum)**. Die **Wellenlänge maximaler Intensität** liegt **beim Draht im Infraroten**, aber sein **Spektrum reicht knapp in den sichtbaren Bereich hinein**. Daher erscheint der Draht auch orange-rot.



7. *Eliminierung systematischer Messfehler*

Um die Lufttemperatur korrekt zu messen, muss das Thermometer im thermischen Gleichgewicht mit der Luft sein. Wird es aber durch Sonnenlicht beleuchtet, so nimmt es durch diese Strahlung zusätzliche Energie auf und zeigt folglich eine zu hohe Temperatur an.

8. *Das Abstandsgesetz und die Leuchtkraft der Sonne*

Die Solarkonstante gibt an, wie viel Strahlungsleistung jeder gegen Sonne ausgerichtete, sich auf der Höhe der Erde im Weltall befindliche Quadratmeter Fläche abbekommt: 1361 Watt pro Quadratmeter.

Wir treffen die sinnvolle Annahme, dass die Sonne ihre Strahlung in alle Richtungen mit derselben Intensität aussendet und betrachten die gedachte Kugel mit Radius $r = 1\,\text{AE} = 1.496\cdot 10^{11}\,\text{m} \approx 150\,\text{Mio. km}$ um die Sonne. Auf der Sphäre (= Kugeloberfläche) sitzt die Erde und jeder einzelne Quadratmeter der Sphäre mit Fläche $A = 4\pi\,r^2$ erhält von der Sonne $1361\,\text{W}$ Strahlungsleistung. Das bedeutet, wir können ausrechnen, wie viel Strahlungsleistung insgesamt durch die Sphäre hindurchgeht. Das muss dann gleich der von der Sonne abgestrahlten Leistung, also gleich ihrer Leuchtkraft $L_\odot$ sein:

$$L_\odot = 4\pi\,r^2\cdot S = 4\pi\cdot(1.496\cdot 10^{11}\,\text{m})^2\cdot 1361\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 3.8276\cdot 10^{26}\,\text{W} \simeq \underline{\underline{3.828\cdot 10^{26}\,\text{W}}}$$

Umgekehrt erhalten wir für die Solarkonstanten auf Merkur und Neptun:

$$S_\text{M} = \frac{L_\odot}{4\pi\,r_\text{M}^2} = \frac{3.8276\cdot 10^{26}\,\text{W}}{4\pi\cdot(0.38\cdot 1.496\cdot 10^{11}\,\text{m})^2} \simeq \underline{\underline{9400\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}$$

$$S_\text{N} = \frac{L_\odot}{4\pi\,r_\text{N}^2} = \frac{3.8276\cdot 10^{26}\,\text{W}}{4\pi\cdot(30.05\cdot 1.496\cdot 10^{11}\,\text{m})^2} \simeq \underline{\underline{1.507\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}$$

9. *Ein Gedankenexperiment im Weltraum – ein erstes Beispiel für ein Strahlungsgleichgewicht*

   (a) Aus der Kernphysik wissen wir: Im innersten Kern der Sonne wird durch die **Kernfusion** Energie freigesetzt. Dabei werden beim **Wasserstoffbrennen** jeweils vier Protonen (= Wasserstoff-Atomkern) zu einem Helium-Atomkern zusammengefügt.

   Der Draht ist vom Strom durchflossen und bezieht von diesem Joule'sche Wärme (= Reibung des Stroms im Draht).

   Der Mensch erzeugt seine Körperwärme, weil er sich mit der Nahrung und der Atmung chemische Energie zuführt. Tatsächlich werden ca. 50 % dieser zugeführten Energie einzig dafür verwendet die Körpertemperatur aufrechtzuerhalten!

   (b) Da das Blech schwarz eingefärbt sein soll, gehe ich von einem schwarzen Körper aus. Er absorbiert die gesamte ankommende Strahlung. Mit der Solarkonstante von $S = 1361\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ folgt für die aufgenommene Strahlungsleistung:

$$P_{\mathrm{in}} = S \cdot A = 1361\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 2.5\,\mathrm{m}^2 = 3402.5\,\mathrm{W}$$

   (c) Da sich beim Blech auf Dauer ein thermisches Gleichgewicht zwischen absorbierter und emittierter Leistung einstellt und wir aufgrund des Stefan-Boltzmann-Gesetztes über einen temperaturabhängigen Ausdruck für die abgestrahlte Leistung verfügen, lässt sich auf die Blechtemperatur schließen. Für die emittierende Fläche muss nun allerdings die doppelte Blechfläche eingesetzt werden, denn beide Blechseiten strahlen Wärme ab:

$$P_{\mathrm{out}} = P_{\mathrm{in}} \quad \Rightarrow \quad \sigma \cdot 2A \cdot T^4 = P_{\mathrm{in}}$$
$$\Leftrightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{P_{\mathrm{in}}}{\sigma \cdot 2A}} = \sqrt[4]{\frac{3402.5\,\mathrm{W}}{5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4} \cdot 2 \cdot 2.5\,\mathrm{m}^2}} = 331\,\mathrm{K} \simeq \underline{\underline{58\,^\circ\mathrm{C}}}$$

   Zugunsten von mehr signifikanten Ziffern und aufgrund eines zusätzlichen Erkenntnisgewinns lohnt es sich hier noch rasch zu zeigen, dass die Größe des Blechs für dessen Temperatur irrelevant ist:

$$P_{\mathrm{out}} \stackrel{!}{=} P_{\mathrm{in}} \quad \Rightarrow \quad \sigma \cdot 2A \cdot T^4 = S \cdot A \quad \Rightarrow \quad 2\sigma \cdot T^4 = S$$
$$\Rightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{S}{2\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1361\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}}} \simeq 330.99\,\mathrm{K} = \underline{\underline{57.84\,^\circ\mathrm{C}}}$$

   (d) Es kommen vor allem zwei Maßnahmen in Frage:

   - Durch eine passende Bestreichung des Blechs resp. einer Raumkapsel können wir den Absorptionskoeffizienten α verringern. Zwar gilt das Kirchhoff'sche Gesetz – $\alpha \approx \varepsilon$, "ein guter Absorber ist auch ein guter Emitter" – man könnte also denken, dass sich dieser Effekt wieder rauskürzt, aber die absorbierte Strahlung ist kurzwellig, während die emittierte Strahlung langwellig ist. Deshalb lässt sich ein Unterschied erreichen, der dem Kirchhoff'schen Gesetz nicht widerspricht.
   - Man könnte das Verhältnis von abstrahlender zu aufnehmender Fläche vergrößern. Wäre z.B. die von der Sonne abgewandte Seite gewellt oder einfach rund, so würde immer noch gleich viel Wärme aufgenommen, aber eben mehr abgestrahlt. Das dürfte ebenfalls helfen.
     Solange wir an der Gestalt des Blechs nichts ändern, kürzt sich die Fläche auf jeden Fall weg und hat somit keinen Einfluss auf die Temperatur, egal wie groß oder klein wir sie machen.

10. *Frühlingszeit = Tauzeit*

    Die dunklen Stellen emittieren mehr Bodenwärme als die helleren. Daher nimmt die Schneedecke dort mehr Strahlung resp. Wärme auf und schmilzt früher.

11. *Enceladus*

Wir gehen davon aus, dass sich Enceladus im **Strahlungsgleichgewicht** befindet, sodass sich eine konstante Temperatur T eingestellt hat. Das bedeutet, die von der Sonne empfangene Strahlungsleistung ist gleich gross wie die Leistung der ausgesendeten Temperaturstrahlung.

Die bei Enceladus ankommende Strahlungsintensität der Sonne beträgt gemäss Abstandsgesetz:

$$I = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Dabei ist L die Leuchtkraft der Sonne, wofür wir einen Wert von $L = 3.828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ nachschlagen.

Die Sonnenstrahlung trifft Enceladus mit dieser Intensität. Aus Sicht der Sonne erscheint der Mond als Scheibe mit einer Fläche von $A = \pi R^2$. Aus der Albedo von $\beta = 0.99$ schließen wir auf den Absorptionskoeffizienten von $\alpha = 1 - \beta = 0.01$. Somit erhalten wir für die empfangene Strahlungsleistung:

$$P_{\text{in}} = \alpha \cdot I \cdot A = \alpha \cdot \frac{L}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2 = \frac{\alpha \cdot L \cdot R^2}{4r^2}$$

Die ganze Oberfläche von Enceladus mit einer Größe von $A = 4\pi R^2$ emittiert Wärmestrahlung. Allerdings ist Enceladus eigentlich kein schwarzer Körper. Wir nehmen aber an, dass er im Infrarotbereich wie ein schwarzer Körper abstrahlt. Daraus folgt:

$$P_{\text{out}} = \sigma \cdot A \cdot T^4 = \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4 \qquad \text{(Stefan-Boltzmann-Gesetz)}$$

Nun können wir empfangene und die ausgesendete Leistung einander gleichsetzen und nach der Temperatur T auflösen ($1\,\mathrm{AE} = 1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$):

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4 = \frac{\alpha \cdot L \cdot R^2}{4r^2} \quad \Leftrightarrow \quad T^4 = \frac{\alpha \cdot L}{16\pi \cdot \sigma \cdot r^2} \quad \Leftrightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{\alpha \cdot L}{16\pi \cdot \sigma \cdot r^2}}$$

Nun können wir die Zahlenwerte einsetzen ($r = 9.5\,\mathrm{AE} = 9.5 \cdot 1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$):

$$T = \sqrt[4]{\frac{0.01 \cdot 3.828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K^4}} \cdot (9.5 \cdot 1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2}} = 28.6\,\mathrm{K} \simeq \underline{\underline{-245\,^\circ\mathrm{C}}}$$

Die reale mittlere Temperatur auf Enceladus ist mit ungefähr $-200\,^\circ\mathrm{C}$ etwas höher. Das liegt wohl daran, dass der Mond mit seiner Eisoberfläche doch nicht ganz wie ein schwarzer Körper abstrahlt.

12. *Spektrale Entfernungsbestimmung eines Sterns*

Aufgrund des Intensitätsmaximums im Spektrum von Fomalhaut bestimmen wir mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz seine Oberflächentemperatur:

$$T = \frac{2898\,\mathrm{\mu m \cdot K}}{\lambda_{\max}} = \frac{2898\,\mathrm{\mu m \cdot K}}{312\,\mathrm{nm}} = \frac{2\,898\,000\,\mathrm{nm \cdot K}}{312\,\mathrm{nm}} = 9288\,\mathrm{K}$$

Mit dem Sternradius können wir auf die Größe der Sternoberfläche schließen:

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (1.1 \cdot 10^9\,\mathrm{m})^2 = 1.521 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^2}$$

Die von dieser Oberfläche abgestrahlte Leistung ergibt sich aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (die Sternoberfläche ist in guter Näherung ein schwarzer Körper):

$$P_{\mathrm{S}} = \sigma \cdot A \cdot T^4 \approx 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K^4}} \cdot 1.521 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^2} \cdot (9288\,\mathrm{K})^4 = 6.418 \cdot 10^{27}\,\mathrm{W}$$

Das ist eine gigantische Leuchtkraft! Fomalhaut sendet damit eine Leistung aus, die knapp 17-mal so gross ist wie jene der Sonne (ca. $3.846 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$)! Universell gesehen ist das aber noch nichts Besonderes, denn es gibt Sterne, die mehr als das Hunderttausendfache der Sonnen-Leuchtkraft aussenden!

Mit dem Abstandsgesetz schließen wir aus der bei uns ankommenden Strahlungsintensität I auf die Distanz zu Fomalhaut:

$$I = \frac{P_\mathrm{S}}{4\pi r^2} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{P_\mathrm{S}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{6.418 \cdot 10^{27}\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot 8.9 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}} = 2.396 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{25\,\mathrm{LJ}}}$$

Dabei habe ich folgende Länge für das Lichtjahr LJ verwendet:

$$1\,\mathrm{LJ} = c \cdot 1\,\mathrm{a} = 2.998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 9.45 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$$

Das tatsächliche Lichtjahr ist etwas länger, weil das Sternjahr auch etwa einen Vierteltag länger dauert als 365 Tage.

Mit "nur" $25\,\mathrm{LJ}$ Distanz zu uns darf Fomalhaut als Stern in unserer nächsten Nachbarschaft bezeichnet werden. Zum Vergleich: Der sonnennächste Stern ist Proxima Centauri in einer Distanz von $4.2\,\mathrm{LJ}$. Unsere Galaxie, also die Milchstraße, hat dagegen einen Durchmesser von etwa $100\,000\,\mathrm{LJ}$!

13. *Gute Thermosflaschen*

Konvektion gibt es natürlich keine! Die heiße oder kalte Flüssigkeit bleibt im Innern der Flasche und es kommt auch keine kalte oder warme Luft in die Flasche hinein.

Die **Wärmeleitung** ist durch die mehrfachen Wände und Zwischenräume stark unterdrückt bis eliminiert! Ganz besonders wird die Wärmeleitung durch das Vakuum gehemmt. Es wird sich dabei zwar nicht um ein so besonders gutes Vakuum handeln, aber dennoch ist dort so viel weniger Materie vorhanden, dass die Wärmeleitung kaum stattfinden kann.

Durch die Verspiegelung der Innenseite der Vakuumwand wird dafür gesorgt, dass erstens die Innenseite schlecht **Wärmestrahlung** aussendet und zweitens die Außenseite diese Wärmestrahlung auch nur schlecht aufnimmt, sondern eher reflektiert. Die Spiegeloberflächen haben ganz geringe Emissions- resp. Absorptionskoeffizienten! Dies verlangsamt den Wärmetransport immens.

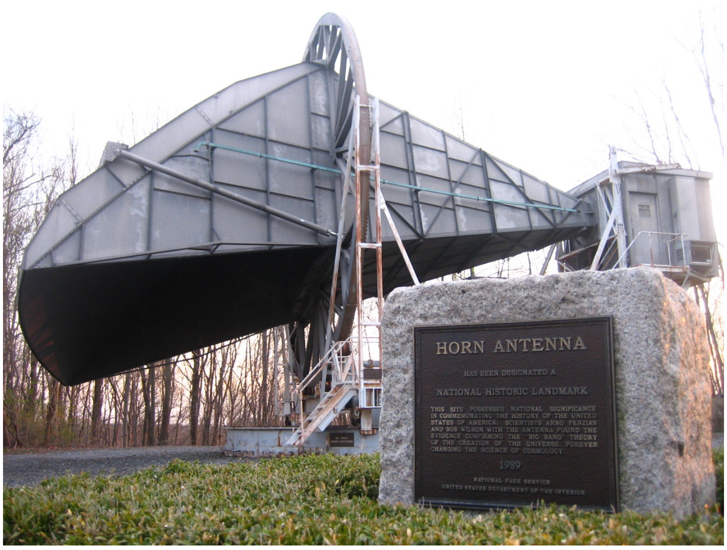
14. *Cosmic Background Radiation*

Mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz erhalten wir für die "Temperatur der Hintergrundstrahlung":

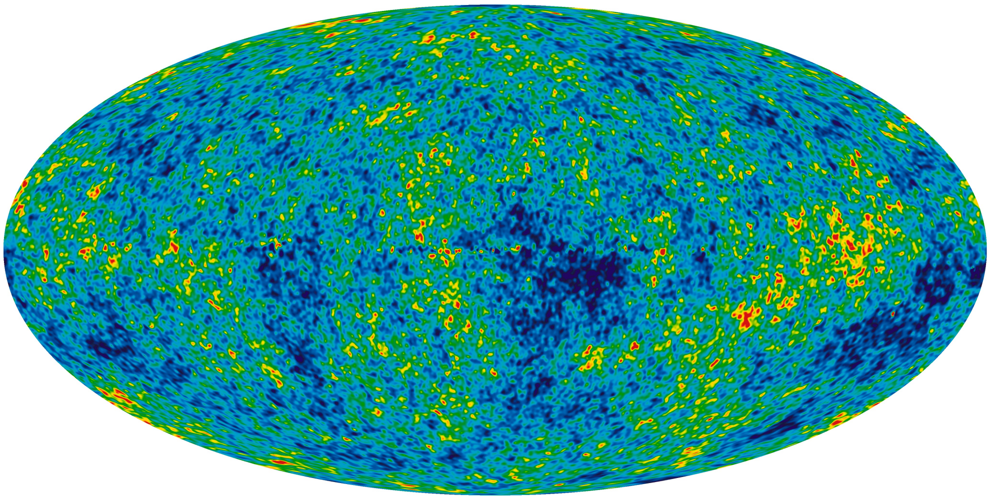
$$T = \frac{2898\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}{\lambda_{\max}} = \frac{2898\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}{1.063\,\mathrm{mm}} = \frac{2.898\,\mathrm{mm} \cdot \mathrm{K}}{1.063\,\mathrm{mm}} = \underline{\underline{2.726\,\mathrm{K}}} \approx 3\,\mathrm{K}$$

Diese Kosmische Hintergrundstrahlung wurde von der theoretischen Astrophysik schon Jahre vor ihrer Entdeckung vorausgesagt, denn sie wäre eine direkte Folge der Urknalltheorie und eines expandierenden Universums. Allerdings war man sich nicht so einig, welche Temperatur diese Strahlung haben müsste.

Die Entdeckung durch Penzias und Wilson war dann aber eher ein Zufall, weil die beiden mit ihrer Infrarotantenne ("Horn Antenna", siehe Bild) eigentlich etwas ganz anderes untersuchen wollten.



Die Untersuchung der kosmischen Hintergrundstrahlung ist in der heutigen Forschung ein topaktuelles Thema, denn offensichtlich erreicht sie die Erde doch nicht aus allen Himmelsrichtungen gleich stark. Es gibt also eine Anisotropie der Strahlung, die wir mit der Entwicklung des Universums in Verbindung bringen und die deshalb für die Kosmologie von großem Interesse ist.



15. *Schwarz-Planeten-Temperaturen*

(a) Von der Sonne aus gesehen ist die Erde mit Radius R eine Scheibe mit Fläche $A_{\text{Scheibe}} = \pi R^2$. Diese Scheibe erfährt die Intensität der Sonnenstrahlung (= Solarkonstante S). Mit der Annahme, dass die Erde ein Schwarzer Körper ist, folgt für die von ihr absorbierte Strahlungsleistung:

$$P_{\text{in}} = S \cdot A_{\text{Scheibe}} = S \cdot \pi \cdot R^2$$

Im Prinzip könnten wir hier die Solarkonstante einsetzen. Allerdings suggeriert die Aufgabenstellung, dass man diese aufgenommene Strahlungsleistung durch die Leuchtkraft L der Sonne und ihren Abstand r von der Erde ausdrücken soll. Somit schreiben wir mittels Abstandsgesetz:

$$S = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{in}} = \frac{L}{4\pi r^2} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{L \cdot R^2}{4r^2}$$

Nun sendet die Erde als schwarzer Körper aber umgekehrt auch Strahlung aus. Die emittierte Strahlungsleistung berechnet sich aus dem **Stefan-Boltzmann-Gesetz**. Dabei strahlt die gesamte Oberfläche mit einer Größe von $A_{\text{Oberfläche}} = 4\pi R^2$ Leistung ab:

$$P_{\text{out}} = \sigma \cdot A \cdot T^4 = \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4$$

Die Erde soll sich im Strahlungsgleichgewicht befinden. D.h., es soll sich eine konstante Temperatur eingestellt haben. Daraus folgern wir:

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \quad \Rightarrow \quad \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4 = \frac{L \cdot R^2}{4r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \cdot 4\pi \cdot T^4 = \frac{L}{4r^2}$$

Der Erdradius R hat sich heraus gekürzt. Wir lösen nach der Temperatur auf:

$$T^4 = \frac{L}{16\pi \cdot \sigma \cdot r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T(r) = \sqrt[4]{\frac{L}{16\pi \cdot \sigma \cdot r^2}}}}$$

Damit habe ich ein formales Resultat für die Temperatur des Schwarzen Planeten im Abstand r von der Sonne erhalten!

Für die Erde errechnen wir so eine Temperatur von:

$$T(1\,\text{AE}) = \sqrt[4]{\frac{3.828 \cdot 10^{26}\,\text{W}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (1.496 \cdot 10^{11}\,\text{m})^2}} = 278.3\,\text{K} \approx \underline{\underline{5\,^\circ\text{C}}}$$

Das entspricht der Erwartung aus der Aufgabenstellung.

(b) Die Funktionseingabe ist wegen der Wurzel und wegen den vielen Zehnerpotenzen technisch anspruchsvoll. Grundsätzlich ist aber alles "straight forward" machbar. Zunächst will allerdings die Distanzeingabe in astronomischen Einheiten AE verstanden sein!

Für die Distanz schreibe ich neu $r = x\,\mathrm{AE}$. Darin steht x für die Anzahl der in r enthaltenen astronomischen Einheiten. Dieses x steht also für die Zahlen, die auf der horizontalen Achse in unserem Diagramm zu finden sind. Aus der Funktion $T(r)$ wird so eine Funktion $T(x)$:

$$T(x) = \sqrt[4]{\frac{L}{16\pi \cdot \sigma \cdot (x \cdot \mathrm{AE})^2}}$$

Nun kann ich die Zahlenwerte einsetzen und erhalte so den Ausdruck, der in die `GeoGebra`-Eingabezeile eingetippt werden kann:

$$T(x) = \sqrt[4]{\frac{3.846 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4} \cdot x^2 \cdot (1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2}}$$

Diesen Eindruck können wir vor der Eingabe weiter vereinfachen. Zunächst überzeugen wir uns, dass bei der Rechnung wirklich eine Temperatur in Kelvin herauskommt. Ich schaue einfach kurz die Einheitenzusammensetzung an:

$$\sqrt[4]{\frac{\mathrm{W}}{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4} \cdot \mathrm{m}^2}} = \sqrt[4]{\frac{\mathrm{W}}{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^4}}} = \sqrt[4]{\mathrm{W} \cdot \frac{\mathrm{K}^4}{\mathrm{W}}} = \sqrt[4]{\mathrm{K}^4} = \mathrm{K}$$

Ich darf also alle Einheiten unter der Wurzel weglassen und dahinter einfach ein K schreiben:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sqrt[4]{\frac{3.846 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4} \cdot x^2 \cdot (1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{3.846 \cdot 10^{26}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 \cdot (1.496 \cdot 10^{11})^2}}\ \mathrm{K} \end{aligned}$$

Weiter lassen sich die Zehnerpotenzen zusammenfassen und teilweise radizieren:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sqrt[4]{\frac{3.846 \cdot 10^{26}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 \cdot (1.496 \cdot 10^{11})^2}}\ \mathrm{K} \\ &= \sqrt[4]{\frac{3.846 \cdot 10^{26}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 \cdot 1.496^2 \cdot 10^{22}}}\ \mathrm{K} = \sqrt[4]{\frac{3.846 \cdot 10^{26}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot x^2 \cdot 1.496^2 \cdot 10^{14}}}\ \mathrm{K} \\ &= \sqrt[4]{\frac{3.846 \cdot 10^{12}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot x^2 \cdot 1.496^2}}\ \mathrm{K} = 1000\,\mathrm{K} \cdot \sqrt[4]{\frac{3.846}{16\pi \cdot 5.670 \cdot x^2 \cdot 1.496^2}} \end{aligned}$$

Da sich die 4. Wurzel auch gut von der Zahl 16 im Nenner ziehen lässt, schreibe ich nochmals vereinfacht:

$$T(x) = 500\,\mathrm{K} \cdot \sqrt[4]{\frac{3.846}{\pi \cdot 5.670 \cdot x^2 \cdot 1.496^2}}$$

Die 4. Wurzel kann man als "hoch 0.25" notieren. Und natürlich geben wir in der GeoGebra-Eingabezeile die Einheit nicht mehr mit ein. Die GeoGebra-Eingabe lautet somit:

$$500 \cdot \Big(3.846/\big(\pi \cdot 5.67 \cdot x^2 \cdot 1.496^2\big)\Big)^{0.25}$$

Diese Eingabe ist immer noch mühsam genug!

Wer ganz clever ist, erkennt aber noch eine weitere Vereinfachungsmöglichkeit. Da wir einen einzelnen Punkt des Funktionsgraphen schon kennen, nämlich $(1, 278.3)$ für die Erde, ergeben sich alle weiteren Punkte durch Neuskalierung dieses Wertes aufgrund der Veränderung von x.

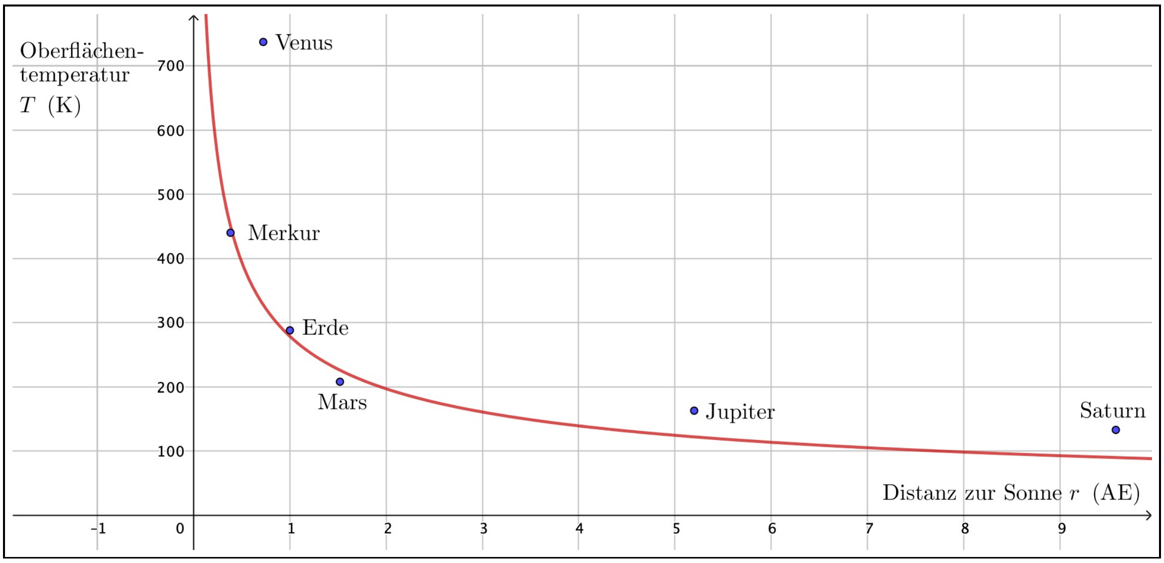
Wie verändert sich denn der Wert mit der Variable x? $T(x)$ ist proportional zu $\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Kennen wir den Funktionswert $T(x_1)$ in einer Distanz x_1, so können wir daraus wie folgt auf den Funktionswert $T(x)$ in einer anderen Distanz x schließen:

$$T(x) = T(x_1) \cdot \sqrt{\frac{x_1}{x}}$$

Der Faktor $\cdot\sqrt{x_1}$ schafft den Einfluss von x_1 weg und die Division $: \sqrt{x}$ bringt den Einfluss von x in den Funktionswert rein. Da bei uns $x_1 = 1$ und $T(x_1) = 279$ ist, lautet die Eingabe von $T(x)$ in GeoGebra also:

$$279/\sqrt{x}$$

Viel einfacher geht's nicht mehr! Hier der Verlauf des Funktionsgraphen:



(c) **Albedo:** Die "Weissheit" eines Himmelkörpers steht für die Fähigkeit, Strahlung durch Reflexion oder Streuung zurückzuwerfen. Je größer die Albedo einer Oberfläche oder eines Planeten, umso weniger Strahlung wird sie resp. er absorbieren. Damit muss im Strahlungsgleichgewicht auch weniger Strahlung emittiert werden, was bei einer geringeren Temperatur der Fall ist.
Kurz: **"Je größer die Albedo, desto geringer die Temperatur!"**

Atmosphäre: Die Atmosphäre eines Planeten absorbiert aufgrund der in ihr enthaltenen Treibhausgase einen Teil der vom Planeten ausgesendeten Temperaturstrahlung, hat deshalb selber auch eine bestimmte Temperatur und sendet ihrerseits wiederum eine Temperaturstrahlung zur Erde. Auf diese Weise empfängt die Erde mehr Strahlungsleistung als nur von der Sonne. Damit sie im Strahlungsgleichgewicht ist, muss sie selber mehr Strahlung emittieren, wozu eine höhere Temperatur notwendig ist.
Kurz: **"Je größer die Treibhausgaskonzentration der Atmosphäre, desto höher die Temperatur!"**

Bei der realen Erde ist offenbar der Effekt der Treibhausgase in der Atmosphäre größer als derjenige der Albedo. Dadurch besitzt die Erde eine mittlere Temperatur, die über der Schwarz-Planet-Temperatur liegt.

(d) Aus der unter (a) erhaltenen Gleichung lassen sich die beiden Schwarz-Planet-Temperaturen rasch berechnen:

$$T_{\mathrm{V}} = T(0.72\,\mathrm{AE}) = \sqrt[4]{\frac{3.828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^4} \cdot (0.72 \cdot 1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2}} \simeq \underline{\underline{328.0\,\mathrm{K} \approx 55\,^\circ\mathrm{C}}}$$

$$T_{\mathrm{M}} = T(1.52\,\mathrm{AE}) = \sqrt[4]{\frac{3.828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^4} \cdot (1.52 \cdot 1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2}} \simeq \underline{\underline{225.8\,\mathrm{K} \approx -47\,^\circ\mathrm{C}}}$$

Venus hat eine ungeheuer dichte Atmosphäre mit sehr starker Treibhausgaskonzentration. Deshalb ist die Temperatur auf der Venusoberfläche viel heißer. Die Albedo spielt kaum eine Rolle.

Ganz anders sieht es bei Mars aus. Aufgrund seiner geringeren Anziehungskraft besitzt er praktisch gar keine Atmosphäre. Die Albedo dominiert und die reale Oberflächentemperatur liegt dadurch nochmals klar unterhalb der Schwarz-Planet-Temperatur.

(e) Wir lösen das formale Resultat von oben nach dem Radius r auf:

$$T^4 = \frac{L_\odot}{16\pi\,\sigma\,r^2} \quad\Leftrightarrow\quad r^2 = \frac{L_\odot}{16\pi\,\sigma\,T^4} \quad\Leftrightarrow\quad r = \sqrt{\frac{L_\odot}{16\pi\,\sigma\,T^4}}$$

Nun setzen wir die beiden Temperaturgrenzen ein:

$$r_\uparrow = \sqrt{\frac{3.828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^4} \cdot (323\,\mathrm{K})^4}} = 1.111 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{0.74\,\mathrm{AE}}}$$

$$r_\downarrow = \sqrt{\frac{3.828 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{16\pi \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^4} \cdot (223\,\mathrm{K})^4}} = 2.331 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{1.6\,\mathrm{AE}}}$$

Wir sehen, dass Venus aufgrund der Annahme dieser Lebenszonengrenzen gerade nicht mehr darin zu liegen kommt ($0.72\,\mathrm{AE} < 0.74\,\mathrm{AE}$), während dem Mars gerade noch unterhalb der oberen Grenze liegt ($1.52\,\mathrm{AE} < 1.6\,\mathrm{AE}$).

Wie auch immer, die Erde liegt mitten in der Lebenszone. Auf den anderen Planeten wären auch bei günstigsten Annahmen richtig extreme Bedingungen zu erwarten.

16. *Strahlungsabgabe einer Glühlampe*

(a) Wenn wir vom Glühdraht als schwarzen Körper ausgehen, so lässt sich mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz direkt dessen Oberfläche bestimmen, da wir die abgestrahlte Leistung und die Glühtemperatur ($T = 2000\,^\circ\mathrm{C} = 2273\,\mathrm{K}$) kennen:

$$P_{\mathrm{out}} = \sigma \cdot A \cdot \left(T^4 - T^4_{\mathrm{Umgebung}}\right) \quad\Rightarrow\quad A = \frac{P_{\mathrm{out}}}{\sigma \cdot \left(T^4 - T^4_{\mathrm{Umgebung}}\right)}$$
$$= \frac{60\,\mathrm{W}}{5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}^4} \cdot \left((2273\,\mathrm{K})^4 - (293\,\mathrm{K}^4)\right)}$$
$$= 0.000\,0397\,\mathrm{m}^2 = 39.7\,\mathrm{mm}^2$$

Für diese Rechnung sind die $293\,\mathrm{K}$ Umgebungstemperatur übrigens beinahe bedeutungslos, denn die vierte Potenz von $2273\,\mathrm{K}$ ist dermaßen viel größer als die vierte Potenz von $293\,\mathrm{K}$, dass letztere ohne großen Fehler vernachlässigt werden kann. Bei Aufgabe (b), wo es um die zeitliche Abnahme der Temperatur geht, spielt die Umgebungstemperatur dann aber doch eine Rolle, weil die Temperatur des Glühdrahtes ja immer geringer wird und ihre vierte Potenz entsprechend zusammenschrumpft.

Nun fließt bei $230\,\mathrm{V}$ gerade so viel Strom, dass $60\,\mathrm{W}$ Leistung bezogen werden, also:

$$I = \frac{P_{\mathrm{out}}}{U} = \frac{60\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V}} = 0.261\,\mathrm{A}$$

Damit beträgt der Widerstand des Glühdrahtes:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{230\,\mathrm{V}}{0.261\,\mathrm{A}} = 882\,\Omega$$

Dieser elektrische Widerstand des Drahtes hängt von seiner Länge l, von seiner Querschnittsfläche Q und vom Material ab. Es gilt:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{Q}$$

Dabei bezeichnet ϱ den spezifischen Widerstand des Materials. Für Wolfram beträgt der Wert $\varrho_\mathrm{W} = 5.28 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$.
Ist r der Radius des Drahtes, so ist seine Mantelfläche Agegeben durch $2\pi r \cdot l$. Ihren Größe hatten wir weiter oben berechnet: $A = 39.7\,\mathrm{mm}^2$. Andererseits gilt für die Querschnittsfläche: $Q = \pi r^2$. Setzen wir alles Bisherige zusammen, so ergeben sich zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten r und l:

$$\left| \begin{array}{c} A = 2\pi r \cdot l \\ Q = \frac{\varrho \cdot l}{R} \overset{!}{=} \pi r^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad A = 2\pi r \cdot \frac{R \cdot \pi r^2}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{A \cdot \varrho}{2\pi^2 R}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{A \cdot \varrho}{2\pi^2 R}} = \sqrt[3]{\frac{0.000\,0397\,\mathrm{m}^2 \cdot 5.28 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}}{2\pi^2 \cdot 882\,\Omega}} = 0.000\,004\,94\,\mathrm{m} = 4.94\,\mu\mathrm{m}$$

Der Drahtdurchmesser beträgt folglich:

$$d = 2r = 2 \cdot 4.94\,\mu\mathrm{m} = 9.9\,\mu\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{10\,\mu\mathrm{m}}}$$

Und für die Drahtlänge ergibt sich:

$$l = \frac{A}{2\pi r} = \frac{0.000\,0397\,\mathrm{m}^2}{2\,\pi \cdot 0.000\,004\,94\,\mathrm{m}} = 1.279\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{1.3\,\mathrm{m}}}$$

Die Kombination aus $1.3\,\mathrm{m}$ und $10\,\mu\mathrm{m}$ Dicke widerspiegelt die Herausforderung bei der Herstellung eines Glühdrahtes! Man muss in der Lage sein einen langen, aber ungeheuer dünnen Metalldraht herzustellen. Das war eine der großen Herausforderungen zu Beginn des 20. Jahrhunderts, als die ersten Glühlampen entwickelt wurden.

(b) Ich habe mit einem `Excel`-File gearbeitet. Es ist oben auf der nächsten Seite abgebildet:

- Oben finden sich die Angaben der **konstanten Werte**, die für die nachfolgenden Berechnungen benötigt werden. Dazu gehören physikalische Konstanten, wie z.B. die Stefan-Boltzmann-Konstante σ, die spezifische Wärmekapazität c von Wolfram und die Dichte ϱ dieses Materials. Ebenso dabei sind die sich nicht verändernden Angaben zum Draht, also sein Radius r, seine Länge l, seine Oberfläche A, sein Volumen V und seine Masse m. Dabei werden A, V und m aus l und r berechnet. Es gilt:

$$A = l \cdot 2\pi r \qquad\qquad V = l \cdot \pi r^2 \qquad\qquad m = \varrho \cdot V$$

  Weiter angegeben ist die Temperatur der Umgebung, also $T_\mathrm{Umg} = 20\,^\circ\mathrm{C} = 293\,\mathrm{K}$, woraus die vom Draht aufgenommene Strahlungsleistung P_in berechnet wird:

$$P_\mathrm{in} = \sigma \cdot A \cdot T_\mathrm{Umg}^4$$

- Unten erscheinen die sich im Laufe der Zeit verändernden Werte in mehreren Spalten. Die Drahttemperatur ϑ in der Spalte ganz links nimmt von Zeile zu Zeile um $100\,^\circ\mathrm{C}$ ab.
- Die abgestrahlte Leistung P_out wird aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz bestimmt. Dabei wird als Drahttemperatur jeweils die mittlere Temperatur $\overline{T}$ während des Temperaturintervalls eingesetzt. Diese wird vorher berechnet (2. Spalte):

$$P_\mathrm{out} = \sigma \cdot A \cdot \overline{T}^4$$

- Wie viel Strahlungsleistung P_netto der Draht netto aufnimmt, ergibt sich aus der Differenz zwischen empfangener und abgestrahlter Leistung:

$$P_\mathrm{netto} = P_\mathrm{in} - P_\mathrm{out}$$

  Natürlich ergibt sich ein negativer Wert, solange die Drahttemperatur höher als die Umgebungstemperatur ist, denn der Draht gibt ja Leistung ab.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Sigma	5.67E-08	W/(m^2 K^4)						
2	Radius	4.94E-06	m						
3	Länge	1.28E+00	m						
4	Oberfläche	3.97E-05	m^2						
5	Volumen	9.81E-11	m^3						
6	Umgebung	293	K						
7	Pin	1.66E-02	W						
8	c	1.34E+02	J/(kg °C)						
9	Dichte	19300	kg/m^3						
10	Masse	1.89E-06	kg						
11									
12	Theta	T	mittl. T	Pout	Pnetto	DT	Q	Dt	Dt cum
13	°C	K	K	W	W	°C	mJ	ms	ms
14	2000	2273	2223	54.97	-54.95	-100	-25.4	0.46	0.46
15	1900	2173	2123	45.73	-45.71	-100	-25.4	0.55	1.02
16	1800	2073	2023	37.70	-37.68	-100	-25.4	0.67	1.69
17	1700	1973	1923	30.78	-30.76	-100	-25.4	0.82	2.51
18	1600	1873	1823	24.86	-24.84	-100	-25.4	1.02	3.53
19	1500	1773	1723	19.84	-19.82	-100	-25.4	1.28	4.81
20	1400	1673	1623	15.62	-15.60	-100	-25.4	1.63	6.44
21	1300	1573	1523	12.11	-12.09	-100	-25.4	2.10	8.54
22	1200	1473	1423	9.23	-9.21	-100	-25.4	2.75	11.29
23	1100	1373	1323	6.90	-6.88	-100	-25.4	3.69	14.97
24	1000	1273	1223	5.04	-5.02	-100	-25.4	5.05	20.03
25	900	1173	1123	3.58	-3.56	-100	-25.4	7.12	27.14
26	800	1073	1023	2.47	-2.45	-100	-25.4	10.36	37.50
27	700	973	923	1.63	-1.62	-100	-25.4	15.68	53.18
28	600	873	823	1.03	-1.02	-100	-25.4	24.96	**78.14**
29	500	773							
30									

- Die Wärme Q, die der Draht in einem $100\,^\circ\mathrm{C}$-Schritt ($\Delta T = -100\,^\circ\mathrm{C}$, $Q < 0$) abgibt, ist stets dieselbe. Sie ergibt sich aus der Drahtmasse m und der spezifischen Wärmekapazität c von Wolfram:
$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$
In der Tabelle habe ich diese Wärme in Millijoule (mJ) angegeben.
- Die Wärme Q verliert der Draht aufgrund der Netto-Abstrahlungsleistung P_{netto}. Daraus können wir auf die Dauer Δt des jeweiligen Abkühlungsschrittes schließen:
$$\Delta t = \frac{Q}{P_{\mathrm{netto}}}$$
Diese Zeiten habe ich in Millisekunden (ms) in die Tabelle eingetragen.
- In der letzten Spalte rechts werden die Zeitschritte kontinuierlich aufsummiert (kumulierte Zeit).
Am Ende des letzten Abkühlungsschrittes finden wir in der hintersten Spalte zu unterst die Gesamtzeit des Abkühlungsvorganges (fett): knapp $80\,\mathrm{ms}$, also nicht einmal eine Zehntelsekunde. Das Licht geht also extrem schnell aus.

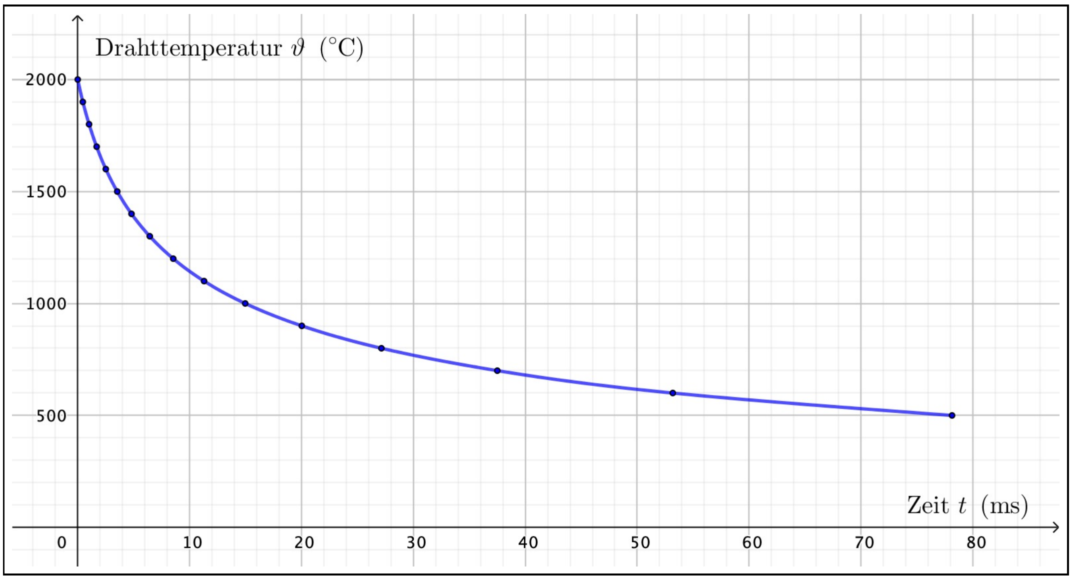
Weitere Diskussion von Tabellenwerten und Resultat

Leistungsrückgang: Der Rückgang der effektiv abgestrahlten Leistung P_{netto} ist bemerkenswert. Diese Leistung ist während der ersten $100\,^\circ\mathrm{C}$ Temperaturabnahme über 50-mal größer als im letzten Schritt von $600\,^\circ\mathrm{C}$ auf $500\,^\circ\mathrm{C}$.

Grund dafür ist natürlich das Stefan-Boltzmann-Gesetz, das mit seiner vierten Potenz der absoluten Temperatur eben zu riesigen Leistungsunterschieden führt, wenn sich die Temperatur merklich verändert.

Verlängerung der Zeitschritte: Da die Abstrahlungsleistung rapide abnimmt, wird für jeden weiteren $100\,^\circ\mathrm{C}$-Schritt mehr Zeit benötigt. Das drückt sich in der vorletzten Spalte aus. Wird für den Schritt von $2000\,^\circ\mathrm{C}$ auf $1900\,^\circ\mathrm{C}$ noch weniger als eine halbe Millisekunde Zeit benötigt, so sind es für die letzten $100\,^\circ\mathrm{C}$ knapp $25\,\mathrm{ms}$. Tatsächlich macht dieser letzte Schritt punkto Zeit fast ein Drittel der Gesamtzeit aus!

t-ϑ-Diagramm: Aus den erhaltenen Zeitschritten lässt sich nun ein Zeit-Temperatur-Diagramm skizzieren. Dieses sieht folgendermaßen aus:



Man sieht sehr schön, wie die Abkühlung anfänglich sehr rasch vor sich geht und dann immer langsamer wird.

(c) Bei der Berechnung sind wir ja in Temperaturschritten von $100\,^\circ\mathrm{C}$ vorgegangen und haben die Abstrahlungsleistung jeweils aus einer mittleren Temperatur dieses Schrittes berechnet. Ist das nicht ein bisschen fragwürdig? Verlieren wir da nicht die Genauigkeit?

Die Antwort lautet: Ja, grundsätzlich ist dieses Verfahren mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet. Es ist klar, dass die Präzision steigt, wenn wir mit kleineren Temperaturschritten arbeiten. Mathematisch gesehen könnten wir diese Schritte unendlich klein machen. Der Computer braucht hingegen einen endlichen Wert, damit er rechnen kann.

Wie klein muss denn der Temperaturschritt $\Delta\vartheta$ sein, damit die Gesamtdauer der Abkühlung hinreichend genau wird?

Solche Fragen lassen sich tatsächlich abschätzen und sind für Computersimulationen von großer Wichtigkeit. In unserem Beispiel stellt sich heraus, dass wir mit $100\,^\circ\mathrm{C}$-Schritten gar nicht schlecht dran sind. Hier eine Tabelle von Gesamtabkühlungszeiten Δt_{total} bei der Arbeit mit verschieden kleinen Temperaturschritten $\Delta\vartheta$:

Temperaturschritt $\Delta\vartheta$ (°C)	-250	-100	-50	-20	-10	-1
Gesamtzeit Δt_{total} (ms)	74.80	78.14	78.66	78.81	78.83	78.84

Wir sehen, dass wir mit Schritten von $\Delta\vartheta = -100\,^\circ\mathrm{C}$ immer noch in der richtigen Tausendstelsekunde landen. Das ist mehr als genau genug für unsere Belange!