Übungen zum Elektromagnetismus – Lösungen Serie 8

1. *Die Magnetnadel*

   Der Strom muss **nach rechts** fliessen, denn nur auf diese Weise zeigt das Magnetfeld unter dem Leiter gegen hinten, also ins Blatt hinein (Rechte-Hand-Regel). So weist der Nordpol der Magnetnadel ebenfalls in diese Richtung und der Südpol schaut zu uns Betrachtern.

2. *Quantitatives zu Oersted*

   (a) Wir berechnen zuerst die magnetische Flussdichte im Abstand $r = 1.0\,\mathrm{cm}$:

   $$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 5.0\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 0.010\,\mathrm{m}} = 1.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T} = \underline{\underline{1\underline{0}0\,\mu\mathrm{T}}}$$

   Weil hier mit $r = 1.0\,\mathrm{cm}$ gerechnet wurde, brauchen wir für die weiteren Werte nur diesen ersten Wert durch die jeweilige Zentimeteranzahl zu teilen. Es folgt:

Abstand r	$1.0\,\mathrm{cm}$	$2.0\,\mathrm{cm}$	$4.0\,\mathrm{cm}$	$20.0\,\mathrm{cm}$	$1.00\,\mathrm{m}$
Flussdichte B	$1\underline{0}0\,\mu\mathrm{T}$	$5\underline{0}\,\mu\mathrm{T}$	$25\,\mu\mathrm{T}$	$5.0\,\mu\mathrm{T}$	$1.0\,\mu\mathrm{T}$

   (b) Aus der Gleichung für das Feld im Innenraum einer Spule folgern wir:

   $$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\sqrt{l^2 + d^2}} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{B \cdot \sqrt{l^2 + d^2}}{\mu_0 \cdot I} = \frac{0.0014\,\mathrm{T} \cdot \sqrt{(0.085\,\mathrm{m})^2 + (0.038\,\mathrm{m})^2}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 0.74\,\mathrm{A}} = 140$$

   Martin muss also eine Spule mit **140 Windungen** hergestellt haben.

   (c) Vereinfachen wir zunächst die Formel für die magnetische Flussdichte in der Spule mit dem gegebenen Hinweis für lange, schlanke Spulen:

   $$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\sqrt{l^2 + d^2}} \approx \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l}$$

   Wird nach der "Windungszahl pro Zentimeter" gefragt, so entspricht diese Angabe in der Gleichung dem Bruch $\frac{N}{l}$. Lösen wir nach diesem Bruch auf, so ergibt sich bei maximaler Flussdichte und Stromstärke:

   $$\frac{N}{l} = \frac{B}{\mu_0 \cdot I} = \frac{0.0240\,\mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 10.0\,\mathrm{A}} = 1910\,\frac{1}{\mathrm{m}} = 19.1\,\frac{1}{\mathrm{cm}}$$

   Es braucht also etwa **20 Windungen pro Zentimeter**, damit diese Spule bei $10.0\,\mathrm{A}$ maximaler Stromstärke sicher die geforderte Flussdichte erzeugen kann.

   (d) "$\frac{1}{10}$ des Erdmagnetfeldes", das bedeutet in horizontaler Richtung $B \approx \frac{1}{10} \cdot 21.3\,\mu\mathrm{T} = 2.13 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}$. Soll diese magnetische Flussdichte erzielt werden, so folgt für den Spulenstrom gemäss der Gleichung für Helmholtz-Spulenpaare:

   $$B = 0.716 \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{R}$$

   $$\Rightarrow \quad I = \frac{B \cdot R}{0.716 \cdot \mu_0 \cdot N} = \frac{2.13 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T} \cdot 0.15\,\mathrm{m}}{0.716 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 124} = 2.86 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} = \underline{\underline{2.9\,\mathrm{mA}}}$$

   Mit dem Spulenpaar ist also bereits bei ziemlich geringer Stromstärke ein Effekt bei der Kompassnadel zu beobachten.

3. *Elektromagnetische Wirkung von Strömen im Haushalt?*

   Es gibt zwei Gründe, welche gegen den Ausschlag der Kompassnadel sprechen:

   - Im Kabel sind zwei Leiter enthalten. Der eine führt den Strom in einem bestimmten Moment zum Staubsauger, der andere führt ihn im selben Moment davon weg. Das kombinierte Magnetfeld dieser beiden stets gleich starken Ströme verschwindet bereits in sehr geringem Abstand vom Kabel praktisch vollständig. Die magnetischen Wirkungen zweier gegenläufigen, nahe beieinander liegenden und gleich starken Ströme heben sich im Fernbereich auf!
   - Zweitens handelt es sich beim Netzstrom um Wechselstrom. Dieser hat eine Frequenz von $50\,\mathrm{Hz}$, wechselt also 100-mal pro Sekunde seine Richtung. Die Kompassnadel dürfte aufgrund ihrer – wenn auch geringen – Masse bereits zu träge sein, um in diesem Tempo auf das Magnetfeld zu reagieren. Allenfalls würde sie in der Nähe des Kabels ein wenig zittern.

4. *Magnetfeldtherapie*

   (a) Durchmesser: $d = 2r = 2 \cdot 37\,\mathrm{cm} = 74\,\mathrm{cm} = 0.74\,\mathrm{m}$.
   Durch Umstellen der Formel für die magnetische Flussidchte im Innern von Spulen erhalten wir:

   $$I = \frac{B \cdot \sqrt{l^2 + d^2}}{\mu_0 \cdot N} = \frac{5.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot \sqrt{(0.12\,\mathrm{m})^2 + (0.74\,\mathrm{m})^2}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 280} = 10.7\,\mathrm{A} = \underline{\underline{11\,\mathrm{A}}}$$

   (b) **Rechte-Hand-Regel (Oersted):**

   i. Daumen der rechten Hand fährt im Gegenuhrzeigersinn dem Ring nach.

   ii. ⇒ Restliche Finger zeigen im Aussenraum des Ringes nach hinten, d.h. weg von uns ins Blatt hinein, und innerhalb des Ringes nach vorne, also auf uns zu aus dem Blatt hinaus.

   Das Feld zeigt also im Spuleninnenraum **in unsere Richtung**.

5. *Die elektrische Klingel*

   Zum gezeigten Bild muss man sich eine Gleichstromspannungsquelle und einen Schalter dazudenken. Nun der logische Ablauf beim Betrieb der Klingel:

   Schalter schliessen
   ⇒ **Stromkreis** aus Anker, Unterbrecher und Elektromagnet **wird geschlossen**
   ⇒ **Anker wird** durch den Elektromagneten **magnetisiert**, da aus Eisen oder Stahl
   ⇒ **Anker wird** vom Elektromagneten **angezogen** und bewegt sich nach unten
   ⇒ **Glocke wird angeschlagen**, **Stromkreis wird** wieder **unterbrochen**
   ⇒ **Elektromagnet** ist wieder **ausgeschaltet**
   ⇒ **Anker bewegt sich** aufgrund seiner Elastizität **zurück** bis der **Stromkreis wieder geschlossen** wird
   ⇒ **Prozess wiederholt sich** in rascher Abfolge, woraus das Klingeln resultiert

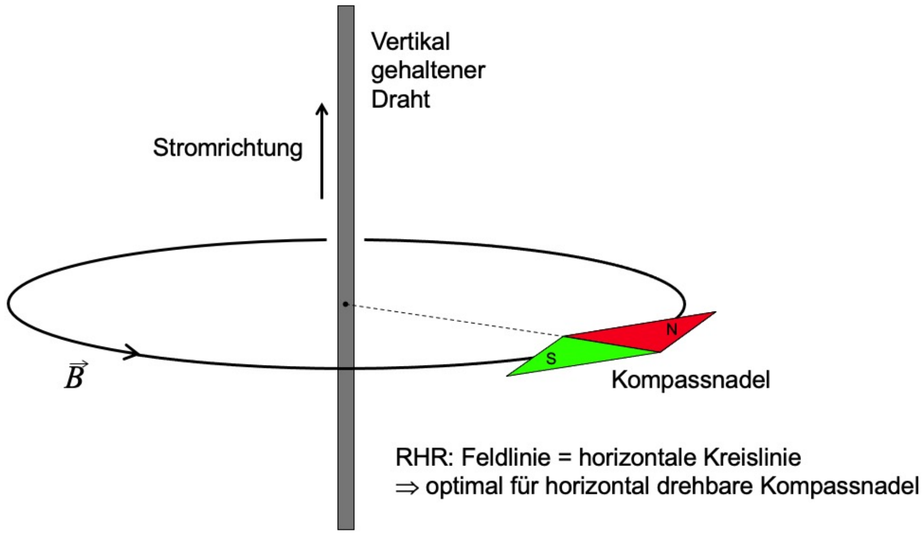
6. *Oersteds "Volta'sche Säule"*

   (a) Wir schätzen die Distanz zwischen Draht und Kompass auf $30\,\mathrm{cm}$ bis $60\,\mathrm{cm}$. Z.B.: $r = 40\,\mathrm{cm}$:

   $$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2\pi \cdot r \cdot B}{\mu_0} = \frac{2\pi \cdot 0.4\,\mathrm{m} \cdot \frac{1}{10} \cdot 17 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}} = \underline{\underline{3.4\,\mathrm{A}}}$$

   Es ist zweifelhaft, ob Oersteds Volta'sche Säule tatsächlich diese Stromstärke liefern konnte. Vermutlich ist das Bild nicht ganz richtig gezeichnet und der Draht war erstens näher am Kompass und dieser war zweitens etwas kleiner.

(b) Das Magnetfeld sollte am Ort des Kompasses in horizontaler Richtung verlaufen. Optimalerweise müsste dafür der Draht **vertikal** ausgerichtet werden (RHR):



7. *Das magnetische Bahnmoment – ein Atom als Stromschlaufe*

(a) Wir benutzen die Formel für den Bohr'schen Radius und setzen die Werte für die darin enthaltenen fundamentalen Konstanten ein:

$$\begin{aligned} r_\mathrm{B} &= \frac{h^2}{\pi\mu_0 m_e c^2 e^2} \\ &= \frac{(6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js})^2}{\pi\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 9.109\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot\left(2.998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot(1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2} \\ &= 5.293\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} = 52.93\,\mathrm{pm} \end{aligned}$$

Tipp: Im Prinzip sind die Werte all dieser Konstanten bereits in Ihrem TR abgespeichert (`2nd constants` liefert den Katalog). Dort können Sie sie abrufen und die Rechnung bleibt deutlich übersichtlicher, abgesehen davon, dass Sie keine Tippfehler bei der Eingabe der Zahlen machen können. Aufgrund der dort um mehrere Dezimalen genauer festgehaltenen Werte ergibt sich dann $5.292\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$.

Damit haben wir einen ungefähren Wert für die Grösse eines H-Atoms bestimmt: ca. $50\,\mathrm{pm}$ Radius, also etwa $100\pm$ Durchmesser. Das sind $0.1\,\mathrm{nm}$. Vergleichen wir das mit dem Wellenlängenbereich von scihtbarem Licht ($450\,\mathrm{nm} - 700\,\mathrm{nm}$), so wird klar, dass man Atome nicht mit den Augen sehen kann. Aus der Wellenoptik geht nämlich hervor, dass das Licht, mit dem man Objekte beleuchtet, die man gerne "sehen" möchte, Wellenlängen in der Grösse des Objektes oder kleiner aufweisen muss. Demzufolge können wir atomare Strukturen eben nur mit hochenergetischerer Strahlung, also Röntgen- oder γ-Strahlung "unter die Lupe nehmen".

(b) Die Coulombkraft hält das Elektron auf der Kreisbahn um das viel massigere Proton. Sie ist die einzige wirkende Kraft und muss somit mit der Zentripetalkraft gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned}
& F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{el}} && \mid \text{Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow\quad & \frac{m_e v^2}{r} = k \cdot \frac{|q_p| \cdot |q_e|}{r^2} && \mid |q_p| = |q_e| = e \\
\Rightarrow\quad & \frac{m_e v^2}{r} = k \cdot \frac{e^2}{r^2} && \mid \cdot \frac{r}{m_e} \text{ und } \sqrt{\ldots} \\
\Leftrightarrow\quad & v = \sqrt{\frac{k \cdot e^2}{r \cdot m_e}} && \mid \text{Werte einsetzen} \\
& = \sqrt{\frac{9.00 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{5.293 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \cdot 9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 2.189 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2190\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Aus der Geschwindigkeit folgt für die Umlaufszeit:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 5.293 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}}{2.189 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.519 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{s} = 1.52 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{s}$$

Man könnte sagen, dass das Elektron innerhalb dieser Zeitspanne innerhalb des Atoms einmal hin- und herschwingt. In eine Frequenz umgerechnet folgt:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.519 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{s}} = 6.58 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

Als System mit einer hin- und herschwingenden Ladung müsste das H-Atom gemäss der klassischen Elektrodynamik nun eigentlich elektromagnetische Strahlung dieser Frequenz aussenden. Das würde dazu führen, dass das Elektron Energie verlieren und damit in den Kern stürzen müsste. Dies war ein grosser Kritikpunkt an Bohrs Atommodell. Die Stabilität der Atome konnte damit nicht wirklich begründet werden.

(c) Für die Stromstäre des kreisenden Elektrons folgt aus der Umlaufszeit:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{1.519 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{s}} = 0.001\,055\,\mathrm{A}$$

Mit der Spulenformel, vereinfacht für eine einzelne Schlaufe, erhalten wir damit für die magnetische Flussdichte am Ort des Atomkerns:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{d} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 0.001\,055\,\mathrm{A}}{2 \cdot 5.293 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}} = 12.52\,\mathrm{T} = 12.5\,\mathrm{T}$$

(d) Analog berechnen wir die Flussdichte in einer kleinen makroskopischen Stromschlaufe:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{d} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 1\,\mathrm{A}}{2 \cdot 0.01\,\mathrm{m}} = 62.8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T} = 60\,\mu\mathrm{T}$$

Die Flussdichte im Innern eines einzelnen H-Atoms hätte nach dem Bohr'schen Atommodell also einen riesigen Wert! Aber wie schon in der Aufgabenstellung zuletzt erwähnt, ist das Bohr'sche Atommodell für die Erklärung des Magnetismus auf atomarer resp. subatomarer Ebene nicht geeignet.