Übungen zum Elektromagnetismus – Lösungen Serie 10

1. *Die Geschwindigkeit der Elektronen in unserem Fadenstrahlrohr*

   (a) Für die Magnetfeldstärke im Innern des Spulenpaares bestimmen wir:

$$B = 0.716 \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{R} = 0.716 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 124 \cdot 1.89\,\mathrm{A}}{0.148\,\mathrm{m}}$$
$$= 0.001\,425\,\mathrm{T} = 1.425\,\mathrm{mT}$$

   (b) Da die Lorentzkraft die einzige relevante Kraft auf die Elektronen darstellt, ist sie der Zentripetalkraft gleichzusetzen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
& F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{L} && |\,\text{Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow\quad & \frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B \cdot \sin\varphi && |\,\varphi = 90^\circ \mathrm{resp.}\sin\varphi = 1 \\
\Rightarrow\quad & \frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B && |\,\cdot \frac{r}{m \cdot v} \\
\Leftrightarrow\quad & v = \frac{e \cdot B \cdot r}{m}
\end{aligned}$$

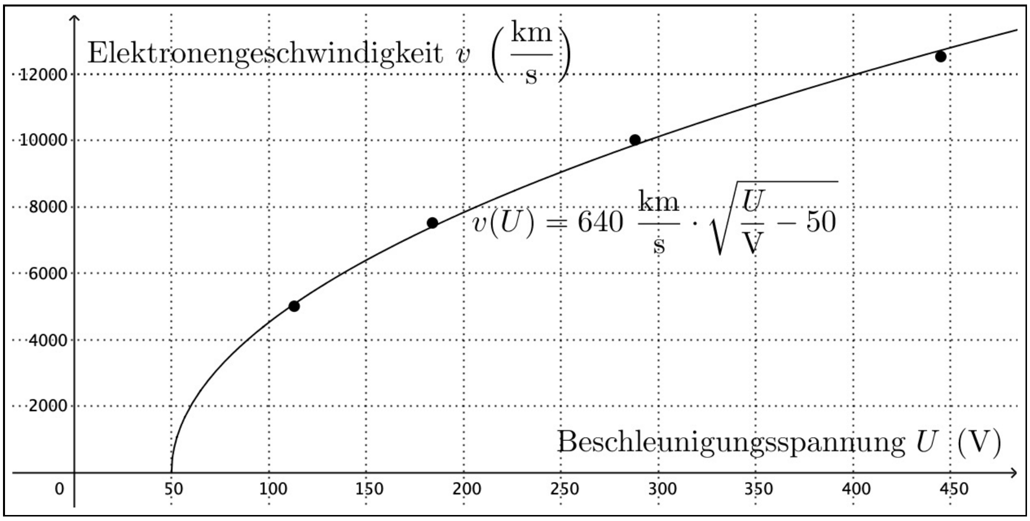
   Nun können wir die Elektronengeschwindigkeiten bei den verschiedenen Kreisbahndurchmessern d ermitteln, z.B. für $r = \frac{d}{2} = \frac{8.0\,\mathrm{cm}}{2} = 4.0\,\mathrm{cm}$:

$$v = \frac{e \cdot B \cdot r}{m} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 1.432 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot 0.040\,\mathrm{m}}{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 10.025 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{1\underline{0}\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}}$$

   Zum Vergleich: Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa $c = 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.
   Ebenso erhalten wir die Geschwindigkeitswerte zu den anderen Durchmessern und Beschleunigungsspannungen, womit wir die Tabelle komplettieren können:

Messgrösse	Messwerte / Rechnungsresultate			
Bahndurchmesser d (cm)	4.0	6.0	8.0	10.0
Beschleunigungsspannung U (V)	113	184	288	444
Elektronengeschwindigkeit v ($\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$)	$5\,\underline{0}00$	7500	10 100	12 300

(c) Trägt man die Werte von v als Funktion von U in ein Koordinatensystem ein, so erkennt man eine von 0 ausgehende Rechtskurve. Dies könnte gut einer Wurzelfunktion entsprechen, wie der darüber gelegte Graph zur Funktion $v(U) = 640 \cdot \sqrt{U - 50}$ (mit U in Volt und v in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$) andeutet:

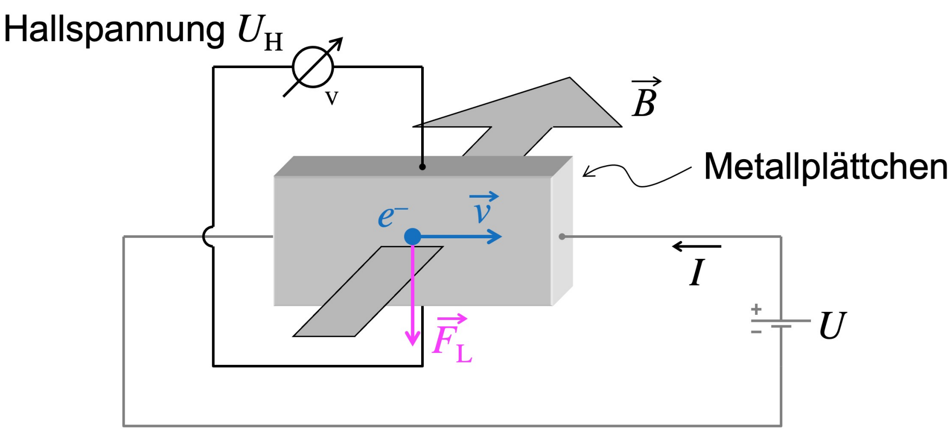


Dass die Kurve nicht durch den Nullpunkt verläuft, hat damit zu tun, dass der Mechanismus der Strahlbündelung in unserem Fadenstrahlrohr der Beschleunigung leicht entgegenarbeitet und dass ein Teil der Beschleunigungsspannung doch immer noch dafür benötigt wird die Elektronen aus dem Material zu holen. Deshalb können offenbar erst ab einem Minimalwert von $50\,\text{V}$ Spannung Elektronen beschleunigt werden.

2. *Der Hall-Sensor*

(a) Im Plättchen fliesst der Strom von rechts nach links, d.h., die **Leitungselektronen driften von links nach rechts** und erfahren im nach hinten zeigenden Magnetfeld eine Lorentzkraft. Mit der **3-Finger-Regel** erhalten wir:

i. **Bewegungsrichtung $\vec{v}$ nach rechts**
ii. **Magnetfeld $\vec{B}$ nach hinten**
iii. Drei-Finger-Regel (negative Ladung $\Rightarrow$ linke Hand!) $\Rightarrow$ **Lorentzkraft $\vec{F}_\text{L}$ nach unten**
$\Rightarrow$ Am unteren Rand des Plättchens entsteht ein Elektronenüberschuss, also ein negativer Pol, am oberen Rand entsteht ein Elektronenmangel, also ein positiver Pol.



(b) Sind es negativ geladene Teilchen, welche den Strom ausmachen, so ergibt sich, wie eben gesehen, ein negativer Pol unten und ein positiver oben.

Wären die sich bewegenden Ladungsträger eines elektrischen Stromes in einem Metall positiv geladen, so würden sie ebenfalls eine Lorentzkraft nach unten erfahren. Mit der **3-Finger-Regel der rechten Hand** ergibt sich nämlich:

i. **Bewegungsrichtung $\vec{v}$ für positive Ladungen nach links!**

ii. **Magnetfeld $\vec{B}$ nach hinten**

iii. Drei-Finger-Regel (positive Ladung $\Rightarrow$ rechte Hand!) $\Rightarrow$ **Lorentzkraft $\vec{F}_\mathrm{L}$ nach unten** $\Rightarrow$ Am unteren Rand des Plättchens entsteht ein Überschuss an positiver Ladung, also ein positiver Pol, am oberen Rand ein gleich starker negativer Pol.

Der Wechsel der Bewegungsrichtung von $\rightarrow$ nach $\leftarrow$ und der Wechsel der Hand für die 3-Finger-Regel heben sich gegenseitig auf. Es entsteht die gleiche Richtung für die Lorentzkraft, egal, ob wir es mit positiven oder negativen Ladungsträgern zu tun haben.

An der Polung am unteren Rand des Plättchens kann man also direkt erkennen, welches Vorzeichen die beweglichen Ladungsträger in einem Metall aufweisen. In der Realität messen wir bei einem Metallplättchen unten einen negativen Pol, und damit müssen die frei beweglichen Ladungsträger in Metallen eben negativ geladen sein.

3. *Relativistische Protonen im LHC-Speicherring*

(a)
- Von uns aus gesehen läuft das Proton am vorderen unteren Rand des LHCs nach links (Daumen), wenn es sich von oben gesehen im Uhrzeigersinn durch den Tunnel bewegt.
- Da eine Kreisbewegung zu beobachten ist, muss die Lorentzkraft die Ursache der Zentripetalkraft sein, also ins Zentrum der Kreisbahn zeigen (Mittelfinger).
- Mit der 3-Finger-Regel der rechten Hand (positiv geladenes Teilchen) sehen wir, dass demzufolgedas Magnetfeld (Zeigefinger) **in Aufwärtsrichtung** zu zeigen hat!

(b) Für die Berechnungen wird der Radius der Kreisbahn benötigt:

$$r = \frac{U}{2\pi} = \frac{26\,659\,\mathrm{m}}{2\pi} = 4242.9\,\mathrm{m}$$

Das Proton ist einfach positiv geladen ($q_p = e$) und seine Geschwindigkeit entspricht ungefähr derjenigen des Lichts ($v \approx c$). Der Winkel zwischen Bewegungsrichtung des Protons und Magnetfeldrichtung beträgt 90° ($\Rightarrow \sin\varphi = 1$). Setzen wir Lorentzkraft und Zentripetalkraft gleich, so folgt:

$$
\begin{aligned}
& & F_\mathrm{Z} &= F_\mathrm{L} & &\mid \text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & \frac{m\cdot v^2}{r} &= q_p\cdot v\cdot B\cdot\sin\varphi & &\mid q_p = e\,,\ v\approx c\,,\ \varphi = 90^\circ\\
&\Rightarrow & \frac{m\cdot c^2}{r} &= e\cdot c\cdot B & &\mid \cdot\frac{r}{c^2}\\
&\Leftrightarrow & m &= \frac{e\cdot B\cdot r}{c} = \frac{1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 5.1\,\mathrm{T}\cdot 4242.9\,\mathrm{m}}{2.998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.156\cdot 10^{-23}\,\mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit der Protonenruhemasse:

$$\frac{m}{m_p} = \frac{1.156\cdot 10^{-23}\,\mathrm{kg}}{1.672\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{6900}}$$

Die Masse eines Protons im LHC ist also mehr als 6900-mal grösser als bei einem ruhenden Proton!

4. *Massenspektroskopie*

   (a) Im natürlichen Isotopengemisch gibt es viel mehr $^{12}\mathrm{C}$- als $^{13}\mathrm{C}$-Nuklide ($98.9\,\%$ vs. $1.1\,\%$). Dies erklärt den deutlichen Intensitätsunterschied der beiden Teilchenstrahlen.

   Entscheidend ist die Ionenmasse. Je massiger das Teilchen, desto mehr widersetzt es sich der Änderung seiner Bewegungsrichtung (Trägheit). Daher muss der Strahl mit dem grösseren Bahnradius zur schwereren Teilchensorte, also zu den $\mathrm{CH_4}$-Ionen mit $^{13}\mathrm{C}$-Nukliden gehören.

   (b) Zur Massenberechnung setzen wir die Lorentzkraft der Zentripetalkraft gleich:

$$F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{L} \qquad |\,\text{Formeln einsetzen}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B \qquad |\cdot \frac{r}{v^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{e \cdot B \cdot r}{v}$$

$$^{12}\mathrm{CH_4}: \quad m_{12} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0.2700\,\mathrm{T} \cdot 0.30159\,\mathrm{m}}{490.0 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{2.6622 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}}}$$

$$^{13}\mathrm{CH_4}: \quad m_{13} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0.2700\,\mathrm{T} \cdot 0.32046\,\mathrm{m}}{490.0 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{2.8288 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}}}$$

   (c) Die beiden Moleküle unterscheiden sich lediglich durch die Neutronenzahl im C-Kern, alle anderen Teilchenzahlen (Anzahl Protonen, Anzahl Elektronen in den Hüllen) sind identisch. Das schwerere Molekül besitzt einfach ein Neutron mehr. Dieses hat, gebunden im Kern, logischerweise eine Masse, welche dem Unterschied der beiden erhaltenen Werte entspricht:

$$\begin{aligned} m_n(\text{gebunden}) &= \Delta m = m_{13} - m_{12} = 2.8288 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} - 2.6622 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \\ &= \underline{\underline{1.666 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}} < 1.6750 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = m_n(\text{frei}) \end{aligned}$$

   Hier sehen Sie ein Resultat, das wir in der Kernphysik noch genauer anschauen werden: In einem Atomkern gebundene Protonen oder Neutronen besitzen weniger Masse als im freien Zustand. Beim Eingehen der Kernbindung wird Masse gemäss $E = m \cdot c^2$ in eine andere Energieform umgewandelt!

5. *Protonen im inneren Van-Allen-Gürtel*

   (a) Die p werden durch die Lorentzkraft F_L auf der Kreisbahn gehalten. Dafür verantwortlich ist nur die Geschwindigkeitskomponente $\vec{v}_\perp \perp \vec{B}$, womit $\varphi = 90^\circ$ resp. $\sin\varphi = 1$ ist. Es folgt:

$$F_\mathrm{L} = F_\mathrm{Z} \qquad |\,\text{Formeln einsetzen}$$

$$\Rightarrow \quad q \cdot v \cdot B \cdot \sin\varphi = \frac{m \cdot v^2}{r} \qquad |\,\sin\varphi = 1 \text{ und } q = e$$

$$\Rightarrow \quad e \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r} \qquad |\cdot \frac{r}{e \cdot v \cdot B}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{m \cdot v}{e \cdot B} = \frac{1.672 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 45\,000\,000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}} = 58\,700\,\mathrm{m} = \underline{\underline{59\,\mathrm{km}}}$$

   (b) Folgende beiden Aspekte wären für eine massstäbliche Skizze sicher zu korrigieren:

   - Bahn verläuft deutlich näher an der Erdoberfläche (Erdradius: $R_\mathrm{E} \approx 6400\,\mathrm{km}$ vs. Höhe des inneren Van-Allen-Gürtels über Erdboden: zwischen $1000\,\mathrm{km}$ und $6000\,\mathrm{km}$).
   - Spiralwindungen viel kleiner (Berechneter Spiralbahndurchmesser: $d \approx 120\,\mathrm{km}$ vs. Erdradius: $R_\mathrm{E} \approx 6400\,\mathrm{km}$).

6. *Repetition zum Fadenstrahlrohr*

   (a) Der Strom im HH-Spulenpaar fliesst von uns aus gesehen im **im Gegenuhrzeigersinn**:

      i. Elektronen e^- kreisen von uns aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn, also z.B. **an der obersten Stelle im Kreis** nach links $\rightarrow$ **Daumen nach links**.

      ii. Lorentzkraft $\vec{F}_\mathrm{L}$ zeigt stets ins Zentrum der Kreisbahn, weil sie die Zentripetalkraft $\vec{F}_\mathrm{Z}$ ausmacht $\rightarrow$ **Mittelfinger nach unten**.

      iii. **3-Finger-Regel mit der linken Hand** $\Rightarrow$ Zeigefinger im Spulenninnern zu uns resp. $\vec{B}$**-Feld zu uns** (aus dem Blatt heraus).

      iv. **Rechte-Hand-Regel:** gekrümmte Finger (ausser Daumen) der rechten Hand in Richtung des $\vec{B}$-Feldes, also im Spuleninnern zu uns.

      v. Dafür müssen wir der Spule mit dem Daumen von uns aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn folgen. Somit fliesst der Spulenstrom von uns aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn.

   (b) Aus der Beschleunigungsspannung schliessen wir auf die Geschwindigkeit der Elektronen. Ein Elektron, das die Beschleunigungsspannung U_B passiert, erhält die kinetische Energie:

$$E_\mathrm{kin} = \Delta E = U \cdot q = U \cdot e = 380\,\mathrm{V} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = 6.088 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{J}$$

Mit der klassischen Formel für die kinetische Energie ergibt sich daraus:

$$E_\mathrm{kin} = \frac{mv^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.088 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{J}}{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 11\,560\,000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 11\,560\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Einen ähnlichen Wert kann man mit der Formel erhalten, die in Aufgabe 1.(c) ermittelt wurde, die der realen Situation im von uns verwendeten Fadenstrahlrohr noch etwas genauer entspricht:

$$v(U) = 640\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{\frac{U}{\mathrm{V}} - 50} = 640\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{\frac{380\,\mathrm{V}}{\mathrm{V}} - 50} = 640\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{330} = 11\,630\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Ich rechne hier allerdings mit dem theoretischen Wert weiter.
Aus der Geschwindigkeit schliessen wir auf die magnetische Flussdichte im Innern des HH-Spulenpaares:

$$\begin{aligned}
& & F_\mathrm{L} &= F_\mathrm{Z} & &\mid \text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & q \cdot v \cdot B \cdot \sin\varphi &= \frac{m \cdot v^2}{r} & &\mid q = e\,,\ \varphi = 90^\circ\\
&\Rightarrow & e \cdot v \cdot B &= \frac{m \cdot v^2}{r} & &\mid\ : (e \cdot v)\\
&\Leftrightarrow & B &= \frac{m \cdot v}{e \cdot r} = \frac{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 11\,560\,000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0.040\,\mathrm{m}} = 0.001643\,\mathrm{T} & &
\end{aligned}$$

Mit diesem Wert geht es schliesslich in die Formel für die Flussdichte im Helmholtz-Spulenpaar:

$$B = 0.716 \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{R} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{B \cdot R}{0.716 \cdot \mu_0 \cdot N} = \frac{0.001643\,\mathrm{T} \cdot 0.148\,\mathrm{m}}{0.716 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 124} = \underline{\underline{2.2\,\mathrm{A}}}$$

Es wurde also mit einer etwas grösseren Stromstärke als bei Aufgabe 1 gearbeitet.