Übung F & R 1: Explizite und rekursive Definition von Folgen

Klasse 155c / AGe

1. Notiere sowohl die Folge der positiven geraden Zahlen, wie auch die Folge der positiven ungeraden Zahlen einmal in expliziter und einmal in rekursiver Beschreibung.

2. Gib zu jeder Folge die explizite Darstellung des k-ten Gliedes a_k an (die Indexierungen starten bei 1):

   (a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ (c) $\frac{-2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{-8}{7}, \frac{16}{9}, \ldots$ (d) $\frac{4}{7}, \frac{12}{15}, \frac{20}{23}, \frac{28}{31}, \ldots$

3. Berechne bei jeder Folge die Glieder a_{50} und a_{51}:

   (a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \ldots$ (b) $\frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{13}, \frac{7}{16}, \ldots$

4. Gib bei jeder Folge die Rekursionsvorschrift $a_n = \ldots$ an:

   (a) $\frac{8}{81}, \frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ (b) $6, 13, 27, 55, 111, \ldots$ (c) $4, 11, 32, 95, 284, \ldots$

5. Von der Folge (a_i) sind die beiden Startglieder a_1 und a_2 sowie die Rekursionsformel $a_i = 2a_{i-1} - a_{i-2}$ $(i \geq 3)$ gegeben. Bestimme die fünf Folgeglieder a_3 bis a_7 und suche die explizite Definition:

   (a) $a_1 = 3, a_2 = 7$ (b) $a_1 = 7, a_2 = 3$ (c) $a_1 = 0, a_2 = 1$ (d) $a_1 = -5, a_2 = -4$

6. Von einer Folge (a_n) sind die beiden ersten Glieder und die Rekursionsformel bekannt. Berechne die ersten 10 Glieder und bestimme danach a_{100}, a_{101}, a_{102} und a_{107}:

   (a) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 3)$ (b) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad (n \geq 3)$

7. Die Folge (b_m) ist durch die beiden Startglieder sowie die Rekursionsformel $b_{m+2} = \frac{b_{m+1}^2}{b_m}$ $(m \geq 1)$ gegeben. Berechne die fünf Glieder b_3 bis b_7 und bestimme die explizite Definition der Folge:

   (a) $b_1 = 3, b_2 = 8$ (b) $b_1 = 81, b_2 = 27$ (c) $b_1 = 16, b_2 = -24$

8. Gib sowohl eine explizite, als auch eine rekursive Definition der jeweiligen Folge an:

   (a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ (b) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

   (c) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ (d) $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots$

9. Gib die rekursive Definition zur explizit beschriebenen Folge an:

   (a) $a_n = 2n + 34$ (b) $a_j = (-3)^j$ (c) $a_k = k^2$

   Hinweis: Bei Aufgabe (c) benötigen wir in der rekursiven Beschreibung ebenfalls den Index k. Das ist im strengen Sinne nicht mehr ganz rekursiv, aber es geht hier vor allem darum, mit diesen formalen Ausdrücken umzugehen und zu sehen, wie die Sache funktioniert.

10. Von einer Folge (c_n) sind das erste Glied und die Rekursionsformel gegeben. Notiere die ersten sechs Glieder und entwickle daraus eine explizite Definition der Folge:

    (a) $c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}$ mit $c_1 = 1$ (b) $c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2^n}$ mit $c_1 = 1$

    (c) $c_{n+1} = c_n + (-1)^n \cdot (n^2 + 2n + 1)$ mit $c_1 = 1$ (d) $c_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{c_n}{2}$ mit $c_1 = 2$