

Lösungen F & R 1: Explizite und rekursive Definition von Folgen

Klasse 155c / AGe

1. Für die Folge (g_n) der positiven geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, etc. gilt $(n \in \mathbb{N})$:

$$\text{rekursiv: } \underline{\underline{g_n = g_{n-1} + 2}} \quad \text{mit } \underline{\underline{g_1 = 2}} \quad \text{und} \quad \text{explizit: } \underline{\underline{g_n = 2n}}$$

Ebenso finden wir für die Folge (u_n) der positiven ungeraden Zahlen $(n \in \mathbb{N})$:

$$\text{rekursiv: } \underline{\underline{u_n = u_{n-1} + 2}} \quad \text{mit } \underline{\underline{u_1 = 1}} \quad \text{und} \quad \text{explizit: } \underline{\underline{u_n = 2n - 1}}$$

2. Für die expliziten Definitionen erhalten wir $(k \in \mathbb{N})$:

$$(a) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \Rightarrow \underline{\underline{a_k = \frac{1}{k}}}$$

$$(b) \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \Rightarrow \underline{\underline{a_k = \frac{k}{k+1}}}$$

$$(c) \quad \frac{-2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{-8}{7}, \frac{16}{9}, \dots \Rightarrow \underline{\underline{a_k = \frac{(-2)^k}{2k+1}}}$$

$$(d) \quad \frac{4}{7}, \frac{12}{15}, \frac{20}{23}, \frac{28}{31}, \dots \Rightarrow \underline{\underline{a_k = \frac{8k-4}{8k-1}}}$$

3. Wir notieren die explizite Beschreibung der Folge und setzen danach den Index $n = 50$ resp. $n = 51$ ein:

$$(a) \quad \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \dots \Rightarrow a_n = \frac{2n-1}{4n} \Rightarrow \underline{\underline{a_{50} = \frac{99}{200}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{a_{51} = \frac{101}{204}}}$$

$$(b) \quad \frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{13}, \frac{7}{16}, \dots \Rightarrow a_n = \frac{n+2}{3n+1} \Rightarrow \underline{\underline{a_{50} = \frac{52}{151}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{a_{51} = \frac{53}{154}}}$$

4. Gib bei jeder Folge die Rekursionsvorschrift $a_n = \dots$ an:

$$(a) \quad \frac{8}{81}, \frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots \Rightarrow \underline{\underline{a_n = a_{n-1} \cdot \frac{3}{2}}}$$

$$(b) \quad 6, 13, 27, 55, 111, \dots \Rightarrow \underline{\underline{a_n = 2a_{n-1} + 1}}$$

$$(c) \quad 4, 11, 32, 95, 284, \dots \Rightarrow \underline{\underline{a_n = 3a_{n-1} - 1}}$$

5. Mit der Rekursionsformel $a_i = 2a_{i-1} - a_{i-2}$ ($i \geq 3$) bestimmen wir die ersten paar Glieder und schliessen danach auf die explizite Definition der Folge:

$$(a) \quad a_1 = 3, a_2 = 7 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11, a_4 = 2 \cdot 11 - 7 = 15, a_5 = 2 \cdot 15 - 11 = 19, \\ a_6 = 2 \cdot 19 - 15 = 23, a_7 = 2 \cdot 23 - 19 = 27 \Rightarrow \underline{\underline{a_n = 4n - 1}}$$

$$(b) \quad a_1 = 7, a_2 = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 - 7 = -1, a_4 = 2 \cdot (-1) - 3 = -5, a_5 = 2 \cdot (-5) - (-1) = -9, \\ a_6 = 2 \cdot (-9) - (-5) = -13, a_7 = 2 \cdot (-13) - (-9) = -17 \Rightarrow \underline{\underline{a_n = -4n + 11}}$$

$$(c) \quad a_1 = 0, a_2 = 1 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 1 - 0 = 2, a_4 = 2 \cdot 2 - 1 = 3, a_5 = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \\ a_6 = 2 \cdot 4 - 3 = 5, a_7 = 2 \cdot 5 - 4 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{a_n = n - 1}}$$

$$(d) \quad a_1 = -5, a_2 = -4 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot (-4) - (-5) = -3, a_4 = 2 \cdot (-3) - (-4) = -2, \\ a_5 = 2 \cdot (-2) - (-3) = -1, a_6 = 2 \cdot (-1) - (-2) = 0, a_7 = 2 \cdot 0 - (-1) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a_n = n - 6}}$$

6. (a) Aus $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ folgt mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$:

$$a_3 = 3 - 1 = 2, a_4 = 2 - 3 = -1, a_5 = -1 - 2 = -3, a_6 = -3 - (-1) = -2, \\ a_7 = -2 - (-3) = 1, a_8 = 1 - (-2) = 3, a_9 = 3 - 1 = 2, a_{10} = 2 - 3 = -1$$

Wir sehen, dass sich die Folge nun immer wiederholt. Die sechs Glieder 1, 3, 2, -1, -3, -2 reproduzieren sich in dieser Reihenfolge.

Demnach wird jedes sechste Glied wieder denselben Wert aufweisen. Somit ist $a_{100} = a_4 = -1$, $a_{101} = a_5 = -3$, $a_{102} = a_6 = -2$ und $a_{107} = a_{101} = a_5 = -3$. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer **zyklischen Folge**.

- (b) Ähnliches passiert bei der zweiten Folge. Aus $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ erhalten wir ausgehend von $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$:

$$a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1, a_6 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, a_7 = \frac{2}{1} = 2, a_8 = \frac{2}{2} = 1, a_9 = \frac{1}{2}, a_{10} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Hier wiederholen sich also die sechs Gliederwerte 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 zyklisch. und wir erhalten wie unter (a): $a_{100} = a_4 = \frac{1}{2}$, $a_{101} = a_5 = 1$, $a_{102} = a_6 = 2$ und $a_{107} = a_{101} = a_5 = 1$.

7. Die Folge (b_m) ist durch die beiden Startglieder sowie die Rekursionsformel $b_{m+2} = \frac{b_{m+1}^2}{b_m}$ ($m \geq 1$) gegeben. Berechne die fünf Glieder b_3 bis b_7 und bestimme die explizite Definition der Folge:

(a) $b_1 = 3, b_2 = 8 \Rightarrow b_3 = \frac{8^2}{3} = \frac{64}{3}, b_4 = \frac{\left(\frac{8^2}{3}\right)^2}{8} = \frac{8^3}{3^2} = \frac{512}{9}, b_5 = \frac{\left(\frac{8^3}{3^2}\right)^2}{\frac{8^2}{3}} = \frac{8^4}{3^3},$

$$b_6 = \frac{\left(\frac{8^4}{3^3}\right)^2}{\frac{8^3}{3^2}} = \frac{8^5}{3^4}, b_7 = \frac{\left(\frac{8^5}{3^4}\right)^2}{\frac{8^4}{3^3}} = \frac{8^6}{3^5} \Rightarrow \underline{\underline{b_m = \frac{8^{m-1}}{3^{m-2}}}}$$

(b) $b_1 = 81, b_2 = 27 \Rightarrow b_3 = \frac{27^2}{81} = \frac{3^6}{3^4} = 3^2 = 9, b_4 = \frac{9^2}{27} = \frac{3^4}{3^3} = 3, b_5 = \frac{3^2}{9} = 1,$

$$b_6 = \frac{1^2}{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1}, b_7 = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow \underline{\underline{b_m = 3^{5-m}}}$$

(c) $b_1 = 16, b_2 = -24 \Rightarrow b_3 = \frac{(-24)^2}{16} = \frac{2^6 \cdot 3^2}{2^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 36,$

$$b_4 = \frac{36^2}{-24} = \frac{2^4 \cdot 3^4}{-2^3 \cdot 3} = -2 \cdot 3^3 = -54, b_5 = \frac{(-54)^2}{36} = \frac{2^2 \cdot 3^6}{2^2 \cdot 3^2} = 3^4 = 81,$$

$$b_6 = \frac{81^2}{-54} = \frac{3^8}{-2 \cdot 3^3} = -\frac{3^5}{2} = -\frac{243}{2}, b_7 = \frac{\left(-\frac{3^5}{2}\right)^2}{3^4} = \frac{3^6}{2^2} = \frac{729}{4} \Rightarrow \underline{\underline{b_m = 2^{5-n} \cdot 3^{n-1}}}$$

8. Wir gehen davon aus, dass der Index des ersten Folgenglieds jeweils $n = 1$ ist. Damit folgt:

(a) explizit: $\underline{\underline{a_n = (-1)^{n-1}}}$ und rekursiv: $\underline{\underline{a_n = -a_{n-1} \text{ mit } a_1 = 1}}$

(b) explizit: $\underline{\underline{a_n = (-1)^n}}$ und rekursiv: $\underline{\underline{a_n = -a_{n-1} \text{ mit } a_1 = -1}}$

(c) explizit: $\underline{\underline{a_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}}}$ und rekursiv: $\underline{\underline{a_n = -a_{n-1} + 1 \text{ mit } a_1 = 1}}$

(d) explizit: $\underline{\underline{a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n-1)\right)}}$ und rekursiv: $\underline{\underline{a_n = -a_{n-2} \text{ mit } a_1 = 0, a_2 = 1}}$

Dabei mag es in jedem dieser Beispiele durchaus auch andere korrekte explizite und rekursive Beschreibungen der Folge geben!

9. Gib die rekursive Definition zur explizit beschriebenen Folge an:

$$(a) \quad a_n = 2n + 34 \Rightarrow \underline{\underline{a_n = a_{n-1} + 2 \quad \text{mit} \quad a_1 = 36}}$$

$$(b) \quad a_j = (-3)^j \Rightarrow \underline{\underline{a_j = -3 \cdot a_{j-1} \quad \text{mit} \quad a_1 = -3}}$$

$$(c) \quad a_k = k^2 \Rightarrow \underline{\underline{a_k = (\sqrt{a_{k-1}} + 1)^2 \quad \text{mit} \quad a_1 = 1}}$$

Bei (c) habe ich hier eine etwas billige Rekursionsdefinition angegeben. Ich berechne als Zwischenresultat den Index $k-1$, indem ich die Umkehrfunktion der expliziten Definition auf a_{k-1} anwende, also die Wurzel ziehe, dann $+1$ rechne und schliesslich wieder quadriere. Das stimmt natürlich so, aber vielleicht verpassen wir so eine einfachere Möglichkeit. . .

Betrachten wir doch einfach mal die Folge der Quadratzahlen:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \text{ etc.}$$

Wir stellen fest, dass von Glied zu Glied die nächst höhere ungerade Zahl addiert wird:

$$1 + 3 = 4 \quad 4 + 5 = 9 \quad 9 + 7 = 16 \quad 16 + 9 = 25 \quad 25 + 11 = 36 \quad \text{etc.}$$

Das bedeutet, wir können diese Folge quasi in einer Mischform aus expliziter und rekursiver Definition wie folgt "quasi-rekursiv" notieren:

$$\underline{\underline{a_k = a_{k-1} + 2k - 1}}$$

So ergibt sich beispielsweise ganz korrekt:

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 3 - 1 = a_2 + 5 = 4 + 5 = 9 \quad \text{oder} \quad a_6 = a_5 + 2 \cdot 6 - 1 = a_5 + 11 = 25 + 11 = 36$$

Wir können auch noch rasch zeigen, dass unsere beiden Resultate übereinstimmen. Dazu nehme ich das "unschöne" erste Resultat und multipliziere mittels binomischer Formel aus:

$$a_k = (\sqrt{a_{k-1}} + 1)^2 = (\sqrt{a_{k-1}})^2 + 2\sqrt{a_{k-1}} + 1 = a_{k-1} + 2(k-1) + 1 = a_{k-1} + 2k - 1 \quad \text{q.e.d.}$$

Dabei habe ich verwendet, dass $\sqrt{a_{k-1}}$ gemäss expliziter Definition eben $k-1$ ist. Zudem haben wir so auch bewiesen, dass bei der Folge der Quadratzahlen die Schritte von Glied zu Glied tatsächlich durch die Folge der ungeraden Zahlen gegeben sind.

10. Wir starten jeweils mit ein paar Gliedern und suchen dann nach der passenden expliziten Definition der Folge:

$$(a) \quad c_1 = 1 \quad c_2 = \frac{c_1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{c_2}{2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6} \quad c_4 = \frac{c_3}{3+1} = \frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24} \\ c_5 = \frac{c_4}{4+1} = \frac{\frac{1}{24}}{5} = \frac{1}{120} \quad c_6 = \frac{c_5}{5+1} = \frac{\frac{1}{120}}{6} = \frac{1}{720} \Rightarrow c_n = \frac{1}{\underline{\underline{1 \cdot \dots \cdot n}}} = \frac{1}{n!}$$

Dabei ist $n!$ die Kurzschreibweise für $1 \cdot \dots \cdot n$. Für dieses Produkt der n Zahlen von 1 bis n gibt es sogar einen eigenen Namen: **n -Fakultät**.

$$(b) \quad c_1 = 1 \quad c_2 = c_1 + \frac{1}{2^1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad c_3 = c_2 + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\ c_4 = c_3 + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \quad c_5 = c_4 + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} \\ c_6 = c_5 + \frac{1}{2^5} = \frac{31}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32} \Rightarrow \underline{\underline{c_n = \frac{(n+1)^2 - 1}{n^2}}}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad c_1 &= 1 & c_2 &= c_1 + (-1)^1 \cdot (1^2 + 2 \cdot 1 + 1) = 1 - 4 = -3 \\
c_3 &= c_2 + (-1)^2 \cdot (2^2 + 2 \cdot 2 + 1) = -3 + 9 = 6 \\
c_4 &= c_3 + (-1)^3 \cdot (3^2 + 2 \cdot 3 + 1) = 6 - 16 = -10 \\
c_5 &= c_4 + (-1)^4 \cdot (4^2 + 2 \cdot 4 + 1) = -10 + 25 = 15 \\
c_6 &= c_5 + (-1)^5 \cdot (5^2 + 2 \cdot 5 + 1) = 15 - 36 = -21 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}}}
\end{aligned}$$

Dabei habe ich ein Resultat verwendet, das wir bei den arithmetischen Reihen noch kennenlernen werden. Es gilt nämlich:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

So entsteht die Abfolge 1, 3, 6, 10, 15, usw., die wir hier nur noch mit einem wechselnden Vorzeichen versehen müssen.

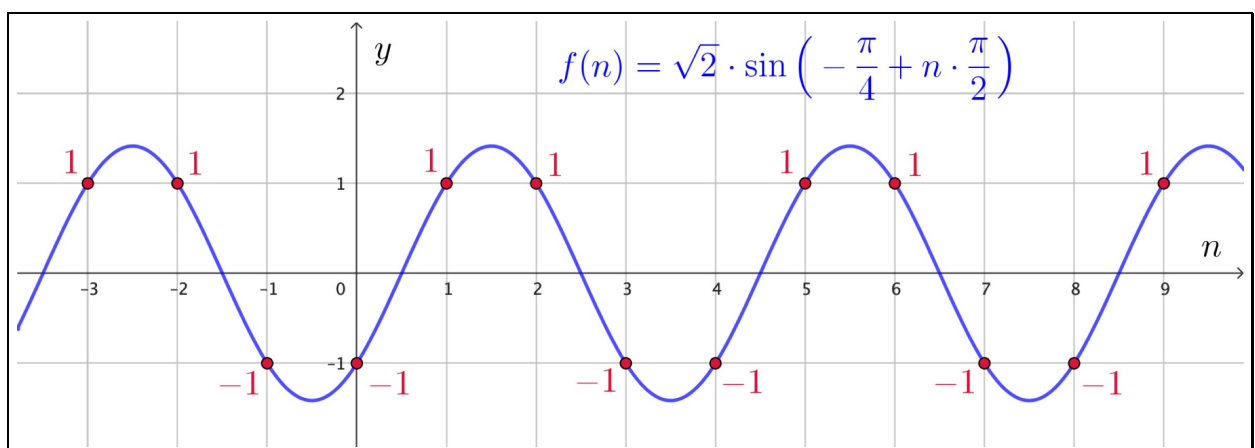
$$\begin{aligned}
(d) \quad c_1 &= 2 & c_2 &= (-1)^2 \cdot \frac{c_1}{2} = \frac{2}{2} = 1 & c_3 &= (-1)^3 \cdot \frac{c_2}{2} = -\frac{1}{2} \\
c_4 &= (-1)^4 \cdot \frac{c_3}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4} & c_5 &= (-1)^5 \cdot \frac{c_4}{2} = -\frac{-\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8} \\
c_6 &= (-1)^6 \cdot \frac{c_5}{2} = \frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c_n = \frac{4}{2^n} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

Auch hier bedarf es wohl eines Kommentars: Zunächst ergibt der Bruch $\frac{4}{2^n}$ die richtige Betragsabfolge 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, usw.

Nun müssen wir irgendwie die Vorzeichen richtig hinbekommen. Es gilt einen expliziten Ausdruck für die Folge 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, etc. zu finden. Das ist gar nicht so einfach. Mir kam dabei das Auf- und Abgehen der Sinusfunktion in den Sinn. Diese nimmt von der Stelle $\frac{\pi}{4}$ ($\hat{=}$ 45°) ausgehend alle $\frac{\pi}{2}$ ($\hat{=}$ 90°) den Betrag $\frac{\sqrt{2}}{2}$ an, der mit $\sqrt{2}$ multipliziert den Betrag 1 ergibt. Die Funktion

$$f(n) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

hat somit bei allen natürlichen Werten von n den Betrag 1 und weist immer zweimal hintereinander dasselbe Vorzeichen auf:



Achtung! Wir sollten für $n = 1$ beim ausgerechneten Sinusargument $\frac{\pi}{4}$ starten. Daher muss in diesem Argument zunächst eben $\frac{\pi}{4} + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}$ stehen, sodass bei $n = 1$ noch keinmal $\frac{\pi}{2}$ addiert wird.

Es gibt durchaus auch noch andere Möglichkeiten, die Vorzeichenabfolge 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, etc. explizit herzustellen.