

Übung Exp&Log 9: Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Klasse 155c / AGe

1. Teuerung

Von Dezember 1982 bis Dezember 1990 betrug in der Schweiz die durchschnittliche Jahresteuierung 2.8%. Was müsste ein Artikel zu den angegebenen Zeitpunkten (auf Rappen genau) gekostet haben, wenn sein Kaufpreis im Dezember 1990 CHF 61.20 betrug und angenommen wird, dass sich dessen Preis stets gemäss dieser Teuerungsrate entwickelt hat?

- (a) Dezember 1982 (b) Dezember 1995 (c) Juli 2005 (d) April 2025
(e) Zu welchem Zeitpunkt (Monat und Jahr) betrug der Preis genau CHF 100?
(f) Wann wäre der Artikel CHF 1000 wert, wenn die Teuerung immer gleich weitergehen würde?

2. Auskühlender Tee

Nach dem Eingiessen aus dem Wasserkocher messe ich in meiner Teetasse eine Temperatur von 96 °C. 15 min später beträgt die Teetemperatur noch 71 °C. Die aktuelle Zimmertemperatur beträgt 21 °C. Das Abfallverhalten der Temperatur verlaufe exponentiell.

- (a) Überlege dir zunächst ohne vorgängige Ermittlung der Exponentialfunktion, wie heiss der Tee nach 30 min und nach 45 min sein wird.
(b) Skizziere den Verlauf der Temperaturfunktion in einem geeigneten t - ϑ -Diagramm.
(c) Notiere die Temperaturfunktion $\vartheta(t)$. Gib mehrere Varianten an (unterschiedliche Wachstumsfaktoren und Schritte). Welche dürfte für die Anwendung am einfachsten sein?
(d) Wie heiss ist der Tee nach 35 min?
(e) Nach welcher Zeit ist der Tee "kalt" geworden, also z.B. nur noch 22 °C warm?

3. Löse die folgenden Ungleichungen in der Menge $n \in \mathbb{N}$:

- (a) $2^n > 10^{12}$ (b) $0.9^n < 0.01$ (c) $1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.9$ (d) $3^n < 2^{100} < 3^{n+1}$

4. Eine Computeranlage mit dem Neuwert 2 056 900 sFr. wird nach 6.5 Jahren für 400 000 sFr. verkauft.

- (a) Wie viel Prozent beträgt die mittlere jährliche Wertabnahme?
(b) Welchen Wert hat die Anlage nach 10 Jahren?
(c) Wie gross ist die Halbwertszeit des Preises?
(d) Wie gross ist die 7-jährliche prozentuale Wertabnahme?
(e) Wann wird die Anlage nur noch 1000 sFr. wert sein, wenn der Wertezzerfall gleich weiter geht.

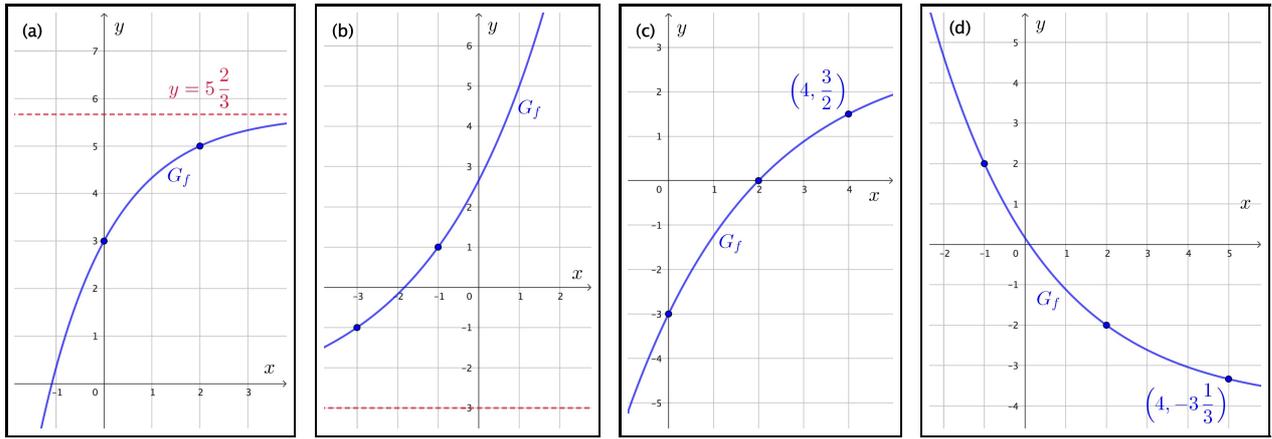
5. Sehr grosse und sehr kleine Zahlen kann der TR nur bedingt handhaben. Logarithmen machen es allerdings möglich, dass mit Zahlen gerechnet werden kann, die aus dem eigentlichen Rechenbereich der Maschine herausfallen würden.

- (a) Welche Zahl ist grösser, 2^{2000} oder 3^{630} ?
(b) Welche Zahl ist grösser, 0.9^{3000} oder 0.8^{1500} ?
(c) Wie viele Ziffern haben 2^{2000} , 1992^{1993} , $(9^9)^9$ und $7^{(7^7)}$ ausgeschrieben im Zehnersystem?
(d) Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung $10^n < e^{4000} < 10.5^n$?

6. Skizziere möglichst effizient – nicht zu genau – die Graphen der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = 4 - 3^{\frac{x}{4}}$ (b) $f(x) = 3 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}} - 2$ (c) $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{3}} + 6$

7. Bestimme die Funktionsgleichungen zu den folgenden Exponentialgraphen (Form egal):



8. Bei der *temperierten Stimmung* (z.B. beim Klavier) ist das Verhältnis der Frequenzen zweier aufeinander folgender Töne (Halbtonschritt) konstant. Die Frequenz von a'' ist doppelt so gross wie die von a' (Oktavsprung). Die Töne einer Oktave nummerieren wir von $n = 0$ bis $n = 12$:

Ton	a'	ais'	h'	c''	cis''	d''	dis''	e''	f''	fis''	g''	gis''	a''
Nummer n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frequenz f (Hz)	440												880

- (a) Um wie viele Prozente nimmt die Frequenz bei einem temperierten Halbtonschritt zu?
 - (b) Gib die Gleichungen der Funktionen $g : n \rightarrow f$ und $h : f \rightarrow n$ an.
 - (c) Welche Frequenz gehört in der temperierten Stimmung zum Ton e'' ?
 - (d) Welcher Ton gehört zur Frequenz 587.3 Hz?
9. Ein Joghurt wird aus dem 5°C kalten Kühlschrank genommen und erwärmt sich langsam auf die Zimmertemperatur von 20°C . Nach zehn Minuten hat es sich bereits auf 11°C erwärmt.
- (a) Wie lautet die exponentielle Funktionsgleichung $\vartheta(t)$ für die Temperatur ϑ in Abhängigkeit von der Zeit t seit dem Herausnehmen des Joghurts aus dem Kühlschrank. Notiere das Resultat dreimal in der Form $\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot a^{\frac{t}{T_a}} + D$, wobei T_a einmal 10 min, einmal 1 min und einmal 1 h sein soll.
 - (b) Welche Temperatur hat das Joghurt nach einer halben Stunde?
 - (c) Nach wie vielen Minuten ist das Joghurt wärmer als 19°C ?
10. Das *Moore'sche Gesetz* (*Gordon Moore*, USA, 1929–2023) besagt, dass sich die Speicherkapazität eines Computers, gemessen in Anzahl Transistoren pro Flächeneinheit auf einem Prozessor, alle 2 Jahre verdoppelt. 1971 betrug diese Speicherkapazität etwa $2000 \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2}$.
- (a) Wie gross sind gemäss dem Moore'schen Gesetz das jährliche und das 5-jährliche prozentuale Wachstum der Speicherkapazität?
 - (b) In wie vielen Jahren verzehntausendfacht sich demnach die Speicherkapazität?
 - (c) Im Jahr 2019 betrug der reale Wert etwa $25\,000\,000\,000 \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2}$. War das noch einigermaßen im Einklang mit dem Moore'schen Gesetz?
11. Vergleiche hierzu die Teeaufgabe 2. Nun geht es allerdings um Glühwein. . . Hier die Messung der Glühweintemperatur in einem Becher zu verschiedenen Zeitpunkten nach dem Einschenken:
- $\vartheta(4 \text{ min}) = 57.0^\circ\text{C}$ $\vartheta(8 \text{ min}) = 45.5^\circ\text{C}$ $\vartheta(12 \text{ min}) = 36.2^\circ\text{C}$
- (a) Temperatur beim Einschenken und Umgebungstemperatur?
 - (b) Wie gross ist die Halbwertszeit der Glühweintemperatur? (Wie ist dieser Begriff hier zu verstehen?)
 - (c) Wie heiss ist der Glühwein 15 Minuten nach dem Einschenken?
 - (d) Wann hat der Glühwein eine Temperatur von 25.0°C ?