Übung Exp&Log 4: Exponential- und Logarithmengleichungen

Klasse 155c / AGe

1. Gib die exakten Lösungen zu den folgenden *Exponentialgleichungen* (Unbekannte im Exponenten) in möglichst einfacher Form an:

(a) $e^x = \pi$ (b) $e^{2x-5} = 3$ (c) $10^{\frac{x}{x+1}} = \frac{4}{5}$ (d) $7^{\sqrt{x}} = 3$

(e) $e^{-x} = 100$ (f) $0.8^x = 0.005$ (g) $8 \cdot 3^{-x} = 5$ (h) $4^{1-x} = 0.6$

(i) $3^{-\frac{1}{x}} = 20$ (j) $2^x = 7^{x-2}$ (k) $7 \cdot 3^{1-2x} = 4^{2x+1}$ (l) $e^{-\ln x} = 3$

2. Löse die folgenden *Logarithmengleichungen*:

(a) $\log(100x) = 3\log(1000)$ (b) $3\log_2(x) = 2\log_2(27)$ (c) $\log_2(x) = \log_4(10)$

(d) $\log_3(16) = \log_x(256)$ (e) $\log_4\big(\log_2(x) - 1\big) = \log_{16}(9)$ (f) $2^{\log_4(x)} = 7$

3. Löst man Aufgabe 1 nicht von Hand, sondern mit einem algebrafähigen TR, so ergeben sich manchmal exakte Lösungen, die sich anscheinend von den selber ermittelten unterscheiden. Z.B. kann man bei 1.(c) von Hand auf den Ausdruck $\frac{\log(4/5)}{1-\log(4/5)}$ kommen, während der TR die Lösung $\frac{\ln(10)}{\ln(25/2)} - 1$ liefert. Natürlich sollten die beiden Lösungen übereinstimmen! Zeige daher die Richtigkeit folgender Gleichungen:

(a) $-\dfrac{1}{\log_3(20)} = \dfrac{-\ln(3)}{\ln(20)}$ (b) $\dfrac{2\log_2(7)}{\log_2(7)-1} = \dfrac{2\ln(7)}{\ln\left(\frac{7}{2}\right)}$

(c) $\dfrac{\log\left(\frac{4}{5}\right)}{1-\log\left(\frac{4}{5}\right)} = \dfrac{\ln(10)}{\ln\left(\frac{25}{2}\right)} - 1$ (d) $\dfrac{1+\log_3\left(\frac{7}{4}\right)}{2\cdot\big(1+\log_3(4)\big)} = \dfrac{\ln\left(\frac{21}{4}\right)}{2\ln(12)}$

4. Mehr Exponential- und Logarithmengleichungen:

(a) $15^{\frac{1}{x}} = 10^3$ (b) $2^{3-4x} = 5$ (c) $6^{3x+1} = 5^{2x}$

(d) $4 \cdot 5^{2-x} = 3$ (e) $e^{\frac{1}{x}} = \pi^{\frac{2}{x^2}}$ (f) $10^4 \cdot \pi^x = 12$

(g) $\log_2(x) = 4$ (h) $\log_x\left(\sqrt[6]{a}\right) = \frac{1}{2}$ (i) $\log_4\big(|x|\big) < 2$

(j) $x^{\log(x)} = 10^4$ (k) $\log(9x+5) - \log(x) = 1$ (l) $\log_{\sqrt{3}}(x) + \log_3(x) = 15$

5. Grössere Logarithmengleichungen:

(a) $3\log_a(x) = 2\log_a(8)$ (b) $\log_a(x+4) + \log_a(x) = 2\log_a(x+1)$

(c) $\frac{1}{2}\log_a(x+1) = \log_a(10) - \log_a(2)$ (d) $\log\left(\sqrt{x+1}\right) + 3\log\left(\sqrt{x-1}\right) = 2 + \log\left(\sqrt{x^2-1}\right)$

6. Und hier noch ein paar Knacknuss-Exponentialgleichungen:

(a) $\sqrt{x^{\log(\sqrt{x})}} = 10$ (b) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$ (c) $5^{x-1} + 6^x = 6^{x+1} - 5^x$

(d) $10^x + 10^{2x} = 600$ (e) $e^x = 1 + e^{-x}$ (f) $x^{\log(x)} = x \cdot 10^{12}$