Übung Exp&Log 2: Potenz- & Exponentialgleichungen, Logarithmen

Klasse 155c / AGe

1. *Zu jeder Potenzgleichung gehört als Lösung die entsprechende Wurzel:*

$$x^n = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \text{mit} \quad a, x \in \mathbb{R}^+, x \neq 1 \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{Q}, n \neq 0$$

Anders formuliert: $\sqrt[n]{a}$ *ist die Antwort auf die Frage: "Wie viel hoch* n *ergibt* a*?"*

Löse mit diesem Wissen die folgenden Potenzgleichungen. Bleibt eine Wurzel stehen, so notiere sie in der Potenzschreibweise mit möglichst kleiner Basis:

(a) $x^3 = 8$ (b) $x^2 = 8$ (c) $x^4 = 8$ (d) $x^4 = \frac{1}{256}$ (e) $3x^2 = -2$

(f) $12x^3 = -\frac{4}{9}$ (g) $\frac{1}{2}x^{\frac{2}{5}} + 30 = 80$ (h) $0.1x^{\frac{3}{4}} - 2.4 = 4$ (i) $-4x^5 + 12 = 6x^5 - 88$

2. *Nebenschauplatz (nicht so wahnsinnig wichtig):* Schätze ab, wo die folgenden Zahlen liegen und überprüfe deine Schätzung mit dem TR:

(a) $\sqrt{7}$ (b) $20^{\frac{1}{3}}$ (c) $\left(\sqrt{5}\right)^3$ (d) $60^{-\frac{2}{3}}$ (e) $\left(\frac{1}{30}\right)^{\frac{4}{3}}$

3. Exponentialgleichungen lassen sich durch einen sogenannten *Exponentenvergleich (EV)*, z.B.:

$$5^{2x+1} = 625 \quad \Leftrightarrow \quad 5^{2x+1} = 5^4 \quad \overset{\text{EV}}{\Longleftrightarrow} \quad 2x + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$$

Löse die folgenden Exponenzialgleichungen mittels Exponentenvergleich – das bedeutet, zuerst musst du auf beiden Gleichungsseiten dieselbe Basis hinbekommen:

(a) $3^x = 81$ (b) $4^x = \frac{1}{64}$ (c) $8^x = 16$ (d) $3^x = -9$ (e) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \sqrt{2}$

(f) $3^{\frac{x}{3}+2} = \sqrt[3]{81}$ (g) $2^{4x-7} = \frac{1}{16}$ (h) $9^{3x+2} = \frac{1}{3}$ (i) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{5}x-2} = \frac{1}{\sqrt{125}}$

4. *Die Lösung zur Exponentialgleichung* $a^x = b$ *lautet stets* $x = \log_a(b)$*.*

Notiere die zur Exponenzialgleichung gehörende Lösung als Logarithmus:

(a) $3^x = 7$ (b) $(3c)^x = 2d$ (c) $\left(\frac{2}{7}\right)^x = \frac{7}{3}$ (d) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \sqrt{6}$ (e) $6^{2x} = 20$

5. Notiere die zum Logarithmus gehörende Exponentialgleichung und gib wenn möglich seinen Wert an:

(a) $\log_3(27)$ (b) $\log_4(8)$ (c) $\log_2\left(\frac{1}{64}\right)$ (d) $\log_4(13)$

(e) $\log_{125}(25)$ (f) $\log_{128}(32)$ (g) $\log_\pi(2)$ (h) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{81}{16}\right)$

(i) $\log_{25}\left(125^{38}\right)$ (j) $\log_{\frac{25}{9}}\left(\frac{125}{27}\right)$ (k) $\log\left(\frac{1}{\sqrt{1000}}\right)$ (l) $\log_{\frac{81}{16}}\left(\frac{8}{27}\right)$

6. (a) Für welche reellen Zahlen a und b existiert $\log_a(b)$ mit Sicherheit?
   Tipp: Denke an die zugehörige Exponentialgleichung!

   (b) Für welche Werte von a und b gilt $\log_a(b) = 0$?

   (c) Überlege dir, welche Werte $\log_2(b)$ für alle erlaubten Zahlen b annehmen kann.
   Gilt das neben $a = 2$ auch für jede andere sinnvolle Basis a?