

Merkblatt zu Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzdefinitionen und Potenzgesetze

Definitionen Negative Exponenten: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ Exponent Null: $a^0 := 1$

Rationale (= gebrochene) Exponenten: $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$

Potenz im Exponenten: $a^{m^n} := a^{(m^n)}$

Potenzgesetze Gleiche Basen: i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Gleiche Exponenten: iii. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ iv. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Potenz als Basis: v. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Wurzelgesetze Gleiche Wurzel: i. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ ii. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Wurzel von Wurzel: iii. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

N.B.: $(a^m)^n \neq a^{m^n}$.

Definition des Logarithmus resp. Exponentialgleichung und zugehöriger Logarithmus

$$a^x = b \iff x = \log_a(b)$$

Lies: $\log_2(7)$ ist der "Logarithmus zur Basis 2 von 7" oder kurz: "Log 2 von 7".

Merke: $\log_a(b)$ ist stets die Antwort auf die Frage: "a hoch wie viel ergibt b?"

Exponentialfunktion und Logarithmus als Umkehrfunktionen zueinander

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{und} \quad a^{\log_a(x)} = x$$

Definitionen Logarithmus naturalis: $\ln(x) := \log_e(x)$ mit $e \approx 2.718$ Euler'sche Zahl

10-er Logarithmus: $\log(x) = \lg(x) := \log_{10}(x)$

Logarithmengesetze Logarithmus von Produkt: i. $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

Logarithmus von Quotient: ii. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$

Logarithmus von Potenz: iii. $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

Basiswechselformel: iv. $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

Oft gebrauchte Umwandlung (folgend aus dem dritten Logarithmengesetz):

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a(b) \quad \left(\text{denn: } \log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a(b^{-1}) = -\log_a(b)\right)$$