

Lösungen Exp&Log 9: Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Klasse 155c / AGe

1. Teuerung

Der jährliche Wachstumsfaktor ist gegeben durch:

$$a = 1 + p = 1 + 2.8\% = 1 + 0.028 = 1.028$$

Damit schreiben wir für den Wert w des Artikels zur Zeit t , ausgehend vom Dezember 1990 ($a = \text{Jahr}$):

$$w(t) = w_0 \cdot a^{\frac{t}{1a}} = 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^{\frac{t}{1a}}$$

Nun können wir die Zeitpunkte einsetzen:

(a) Dez 1982: $t = -8a \Rightarrow w(-8a) = 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^{\frac{-8a}{1a}} = 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^{-8} \approx \underline{\underline{49.07 \text{ sFr.}}}$

(b) Dez 1995: $t = 5a \Rightarrow w(5a) = 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^{\frac{5a}{1a}} = 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^5 \approx \underline{\underline{70.26 \text{ sFr.}}}$

(c) Jul 2005: $t = 14 \frac{7}{12}a = \frac{175}{12}a \Rightarrow w\left(\frac{175}{12}a\right) = 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^{\frac{175}{12}} \approx \underline{\underline{91.55 \text{ sFr.}}}$

(d) Apr 2025: $t = 34 \frac{4}{12}a = 34 \frac{1}{3}a = \frac{103}{3}a \Rightarrow w\left(\frac{103}{3}a\right) = 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^{\frac{103}{3}} \approx \underline{\underline{157.95 \text{ sFr.}}}$

(e) Wir setzen die Funktionsgleichung gleich CHF 100 und erhalten so für die Zeit:

$$\begin{aligned} w(t) &\stackrel{!}{=} 100 \text{ sFr.} && | \text{ Fkt.gleichung einsetzen} \\ \Rightarrow 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^{\frac{t}{1a}} &= 100 \text{ sFr.} && | : 61.20 \text{ sFr.} \\ \Leftrightarrow 1.028^{\frac{t}{1a}} &= \frac{100}{61.20} && | \log_{1.028}(\dots) \\ \Leftrightarrow \frac{t}{1a} &= \log_{1.028}\left(\frac{100}{61.20}\right) && | \cdot 1a \\ \Leftrightarrow t &= 1a \cdot \log_{1.028}\left(\frac{100}{61.20}\right) \approx 17.781a \approx 17 \frac{3}{4}a = 17a \ 9 \text{ Mt.} \end{aligned}$$

Vom Dezember 1990 aus gelangen wir so zum September 2008.

(f) Wie bei (e), nur dass wir jetzt die Funktionsgleichung gleich CHF 1000 setzen:

$$\begin{aligned} w(t) &\stackrel{!}{=} 1000 \text{ sFr.} && | \text{ Fkt.gleichung einsetzen} \\ \Rightarrow 61.20 \text{ sFr.} \cdot 1.028^{\frac{t}{1a}} &= 1000 \text{ sFr.} && | : 61.20 \text{ sFr.} \\ \Leftrightarrow 1.028^{\frac{t}{1a}} &= \frac{1000}{61.20} && | \log_{1.028}(\dots) \\ \Leftrightarrow \frac{t}{1a} &= \log_{1.028}\left(\frac{1000}{61.20}\right) && | \cdot 1a \\ \Leftrightarrow t &= 1a \cdot \log_{1.028}\left(\frac{1000}{61.20}\right) \approx 101.162a \approx 101 \frac{1}{6}a = 101a \ 2 \text{ Mt.} \end{aligned}$$

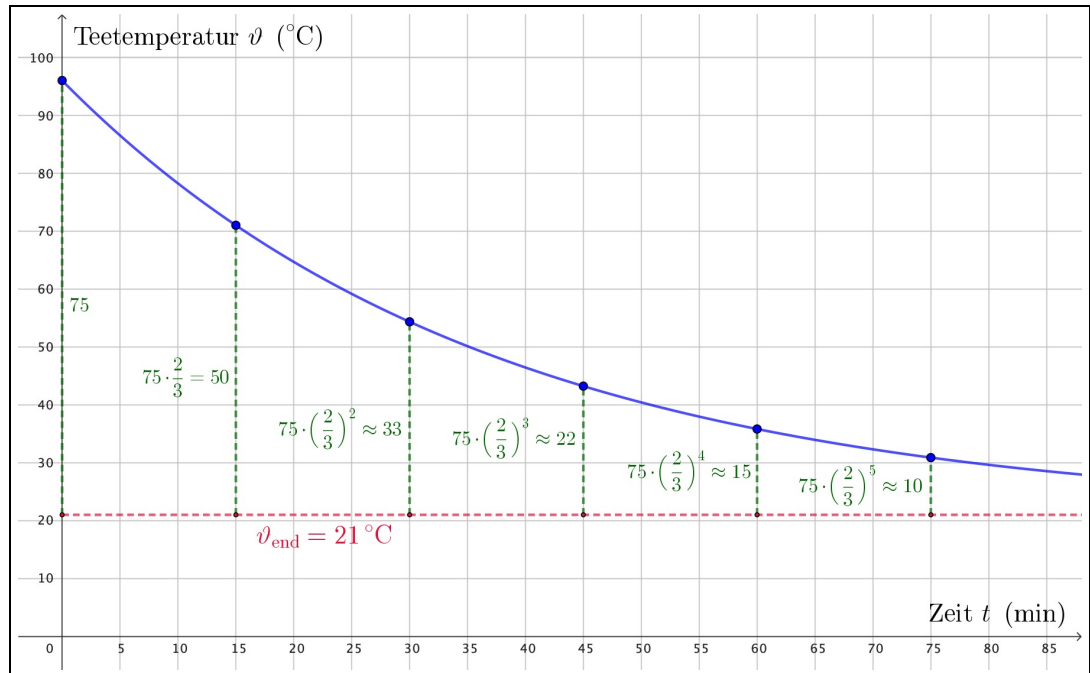
Vom Dezember 1990 aus gelangen wir so zum Februar 2092.

2. Auskühlender Tee

- (a) Zu Beginn ist der Tee 75°C heisser als die Zimmertemperatur. Nach 15 min ist der Tee nur noch 50°C heisser als das Zimmer. Das bedeutet, pro 15 min verringert sich der Temperaturunterschied zwischen Tee und Zimmer mit dem Faktor $\frac{2}{3}$.

Nach 30 min liegt dieser Unterschied folglich etwa bei $\frac{2}{3} \cdot 50^\circ\text{C} \approx 33^\circ\text{C}$, sodass die Teetemperatur dann etwa $21^\circ\text{C} + 33^\circ\text{C} = \underline{54^\circ\text{C}}$ beträgt; nach 45 min beträgt der Temperaturunterschied noch etwa $(\frac{2}{3})^2 \cdot 50^\circ\text{C} \approx 22^\circ\text{C}$, sodass der Tee eine Temperatur von ca. $21^\circ\text{C} + 22^\circ\text{C} = \underline{43^\circ\text{C}}$ aufweisen dürfte.

- (b) Wie schon unter (a) festgehalten: Pro 15 min wird der Temperaturunterschied zwischen Tee und Zimmer mit dem Faktor $\frac{2}{3}$ verkleinert. Mit dieser Angabe lässt sich der Temperaturverlauf relativ einfach skizzieren:



- (c) Eine Variante kennen wir nun bereits bestens, wir brauchen sie nur noch zu notieren:

$$\underline{\underline{\vartheta(t) = 75^\circ\text{C} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{15\text{ min}}} + 21^\circ\text{C}}}$$

Wenn man einfach die Zeit in Minuten eingeben und dabei keine Einheiten mehr notieren möchte, könnte man zuerst den minütlichen Verkleinerungsfaktor bestimmen:

$$a_{\text{min}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1\text{ min}}{15\text{ min}}} \approx 0.97333$$

Damit können wir schreiben:

$$\underline{\underline{\vartheta(t) = 75^\circ\text{C} \cdot 0.97333^t + 21^\circ\text{C}}}$$

Nun muss man sich einfach bewusst sein, dass die Zeit t nur in Minuten eingesetzt werden darf. Für die weitere Anwendung dürfte das aber recht praktisch sein.

Ganz analog könnten wir den stündlichen Verkleinerungsfaktor bestimmen und dann die Funktion so notieren, dass die Zeit nur t in Stunden eingesetzt werden darf:

$$a_{\text{h}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{60\text{ min}}{15\text{ min}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0.19753 \Rightarrow \underline{\underline{\vartheta(t) = 75^\circ\text{C} \cdot 0.19753^t + 21^\circ\text{C}}}$$

Natürlich ist es für das Verständnis immer noch am besten, die Zeiteinheit, auf die sich der Verkleinerungsfaktor bezieht, explizit im Nenner des Exponenten zu notieren, also:

$$\underline{\underline{\vartheta(t) = 75^\circ\text{C} \cdot 0.97333^{\frac{t}{1\text{ min}}} + 21^\circ\text{C}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\vartheta(t) = 75^\circ\text{C} \cdot 0.19753^{\frac{t}{1\text{ h}}} + 21^\circ\text{C}}}$$

Auf diese Weise kann es keine Missverständnisse geben und in jede dieser Funktionen kann die Zeit im Prinzip in beliebigen Einheiten eingesetzt werden.

(d) Wir setzen in die Funktionsgleichung für die Zeit in Minuten ein:

$$\vartheta(35) = 75^\circ\text{C} \cdot 0.97333^{35} + 21^\circ\text{C} \approx \underline{\underline{50.1^\circ\text{C}}}$$

(e) Wir setzen die Funktionsgleichung gleich 22°C und ermitteln die zugehörige Zeit:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &\stackrel{!}{=} 22^\circ\text{C} && | \text{ Fkt.gleichung einsetzen} \\ \Rightarrow 75^\circ\text{C} \cdot 0.97333^t + 21^\circ\text{C} &= 22^\circ\text{C} && | - 21^\circ\text{C} \\ \Leftrightarrow 75^\circ\text{C} \cdot 0.97333^t &= 1^\circ\text{C} && | : 75^\circ\text{C} \\ \Leftrightarrow 0.97333^t &= \frac{1}{75} && | \log_{0.97333}(\dots) \\ \Leftrightarrow t &= \log_{0.97333}\left(\frac{1}{75}\right) \approx \underline{\underline{160 \text{ min}}} \end{aligned}$$

3. Die Ungleichungen lassen sich fast gleich wie Gleichungen behandeln. Wichtig ist, dass sich beim Logarithmieren mit dem Log zu einer Basis $0 < a < 1$ das Vorzeichen der Ungleichung umkehrt, weil die Logarithmusfunktion zu einer solchen Basis monoton fällt.

(a) Wir lösen:

$$2^n > 10^{12} \Leftrightarrow n > \log_2(10^{12}) = 12 \cdot \log_2(10) \approx 39.9 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 40\}}}$$

(b) Wir folgen dem eben gesehenen Muster:

$$0.9^n < 0.01 \Leftrightarrow n > \log_{0.9}(0.01) \approx 43.7 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 44\}}}$$

(c) Mit ein paar vorbereitenden Umformung läuft es wieder genau gleich:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.9 &\Leftrightarrow 1 - 0.9 > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \Leftrightarrow 0.1 > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.2 \\ \Leftrightarrow n > \log_{5/6}(0.2) \approx 8.8 &\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 9\}}} \end{aligned}$$

(d) Hier gilt es zwei Ungleichungen zu lösen und dann die Schnittmenge der beiden einzelnen Lösungsmenge zu nehmen:

$$\begin{aligned} 3^n < 2^{100} &\Leftrightarrow n < \log_3(2^{100}) = 100 \cdot \log_3(2) \approx 63.1 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 63\} \\ 3^{n+1} > 2^{100} &\Leftrightarrow n > 100 \cdot \log_3(2) - 1 \approx 62.1 \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 63\} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet folglich $n = 63$.

4. (a) Für den jährlichen Wachstumsfaktor a gilt:

$$a^{6.5} = \frac{400\,000 \text{ sFr.}}{2\,056\,900 \text{ sFr.}} = \frac{4000}{20\,569} \Leftrightarrow a = \sqrt[6.5]{\frac{4000}{20\,569}} \approx 0.7773$$

Damit beträgt die prozentuale Abnahme pro Jahr:

$$a = 1 + p \Leftrightarrow p = a - 1 \approx 0.7773 - 1 = -0.2227 = \underline{\underline{-22.27\%}}$$

(b) Wir können nun leicht die Wertabnahmefunktion mit der Zeit t in Jahren aufschreiben:

$$w(t) = w_0 \cdot a^{\frac{t}{T_a}} = 2\,056\,900 \text{ sFr.} \cdot 0.7773^{\frac{t}{1 \text{ a}}}$$

Damit folgt für den Wert nach 10 a:

$$w(10 \text{ a}) = 2\,056\,900 \text{ sFr.} \cdot 0.7773^{\frac{10 \text{ a}}{1 \text{ a}}} \approx \underline{\underline{165\,616 \text{ sFr.}}}$$

(c) Nach einer Halbwertszeit muss der Verkleinerungsfaktor per Definition genau $\frac{1}{2}$ betragen. Daraus folgt:

$$0.7773^{\frac{T_{1/2}}{1 \text{ a}}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{T_{1/2}}{1 \text{ a}} = \log_{0.7773}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow T_{1/2} = 1 \text{ a} \cdot \log_{0.7773}\left(\frac{1}{2}\right) \approx \underline{\underline{2.75 \text{ a}}}$$

(d) Wir betrachten den Verkleinerungsfaktor nach 7 Jahren, der auch die prozentuale Abnahme während dieser Zeitspanne enthält:

$$a = 0.7773^{\frac{7 \text{ a}}{1 \text{ a}}} = 0.7773^7 \approx 0.171 \Rightarrow p = a - 1 = 0.171 - 1 = -0.829 = \underline{\underline{-82.9\%}}$$

(e) Wir lösen die entsprechende Exponentialgleichung:

$$\begin{aligned} w(t) &\stackrel{!}{=} 1000 \text{ sFr.} && | \text{ Fkt.gleichung einsetzen} \\ \Rightarrow 2056900 \text{ sFr.} \cdot 0.7773^{\frac{t}{1 \text{ a}}} &= 1000 \text{ sFr.} && | : 2056900 \text{ sFr.} \\ \Leftrightarrow 0.7773^{\frac{t}{1 \text{ a}}} &= \frac{1000}{2056900} && | \log_{0.7773}(\dots) \\ \Leftrightarrow \frac{t}{1 \text{ a}} &= \log_{0.7773}\left(\frac{1000}{2056900}\right) && | \cdot 1 \text{ a} \\ \Leftrightarrow t &= 1 \text{ a} \cdot \log_{0.7773}\left(\frac{1000}{2056900}\right) \approx \underline{\underline{30.3 \text{ a}}} \end{aligned}$$

5. (a) Wir berechnen mit dem TR nicht die Zahlen selber, sondern beispielsweise ihren 2er-Logarithmus. Da dies eine monoton steigende Funktion ist, kommt der Wert für die grössere Zahl auch grösser heraus. Das ist genau, was wir brauchen. Dank dem 3. Logarithmengesetz kann der TR diese Werte gut berechnen:

$$\log_2(2^{2000}) = 2000 \quad \text{und} \quad \log_2(3^{630}) = 630 \cdot \log_2(3) \approx 998.5$$

Damit ist 2^{2000} klar die grössere Zahl.

- (b) Ganz Analog gehen wir bei den nächsten beiden Zahlen vor. Es ist aber sinnvollerweise ein Logarithmus mit Basis grösser als 1 zu verwenden, damit es eben eine monoton steigende Funktion ist, z.B. der Logarithmus naturalis:

$$\ln(0.9^{3000}) = 3000 \cdot \ln(0.9) \approx -316.1 \quad \text{und} \quad \ln(0.8^{1500}) = 1500 \cdot \ln(0.8) \approx -334.7$$

Somit ist 0.9^{3000} grösser als 0.8^{1500} .

Das könnte man sich übrigens auch noch anders überlegen: Zunächst ist $0.9^2 = 0.81 > 0.8$.

Damit folgt direkt: $0.9^{3000} = (0.9^2)^{1500} = 0.81^{1500} > 0.8^{1500}$.

- (c) Wir erinnern uns: $\log(100) = 2$ und $\log(1000) = 3$. Demnach gilt:

$$n \in \mathbb{N} \text{ ist eine 3-stellige Zahl} \Leftrightarrow 2 \leq \log(n) < 3$$

Allgemein können wir schreiben:

$$n \in \mathbb{N} \text{ ist eine } m\text{-stellige Zahl } (m \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (m-1) \leq \log(n) < m$$

So hat beispielsweise die 9-stellige Zahl 155 155 155 den Zehnerlogarithmus $\log(155\,155\,155) \approx 8.2$, der eben zwischen $9-1$ und 9 liegen muss.

Mit dem 3. Logarithmengesetz ermitteln wir die Anzahl Ziffern der gegebenen natürlichen Zahlen:

$$\log(2^{2000}) = 2000 \cdot \log(2) \approx 602.1 \Rightarrow 2^{2000} \text{ hätte im Dezimalsystem 603 Ziffern}$$

$$\log(1992^{1993}) = 1993 \cdot \log(1992) \approx 6575.5 \Rightarrow 1992^{1993} \text{ hätte im Dezimalsystem 6576 Ziffern}$$

$$\log((9^9)^9) = \log(9^{81}) = 81 \cdot \log(9) \approx 77.3 \Rightarrow (9^9)^9 \text{ hätte im Dezimalsystem 78 Ziffern}$$

$$\log(7^{(7^7)}) = 7^7 \cdot \log(7) \approx 695\,974.6 \Rightarrow 7^{(7^7)} \text{ hätte im Dezimalsystem 695\,975 Ziffern}$$

(d) Wir lösen die beiden Ungleichungen separat und schneiden hinterher die Lösungsmengen:

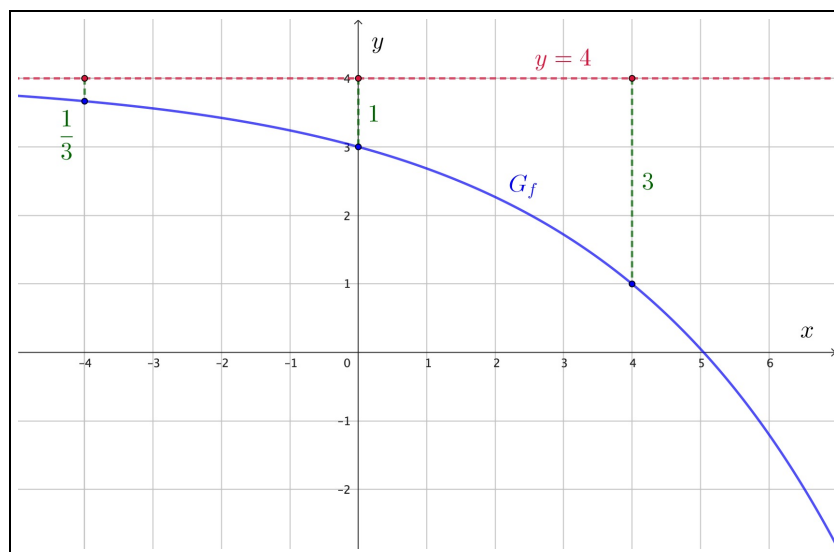
$$10^n < e^{4000} \Leftrightarrow n < \log(e^{4000}) = 4000 \cdot \log(e) \approx 1737.2 \Rightarrow n \leq 1737$$

$$10.5^n > e^{4000} \Leftrightarrow n > \log_{10.5}(e^{4000}) = 4000 \cdot \log_{10.5}(e) \approx 1701.1 \Rightarrow n \geq 1702$$

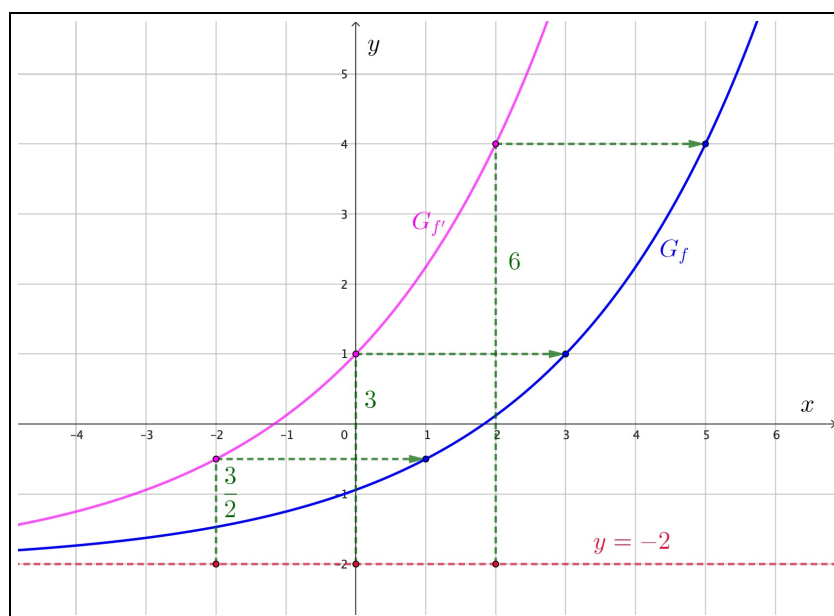
Somit ist die ganze Ungleichung korrekt für alle natürlichen Zahlen n mit $1702 \leq n \leq 1737$.

6. Wir halten je kurz die grafischen Eigenschaften fest, die direkt aus den Funktionsgleichungen folgen:

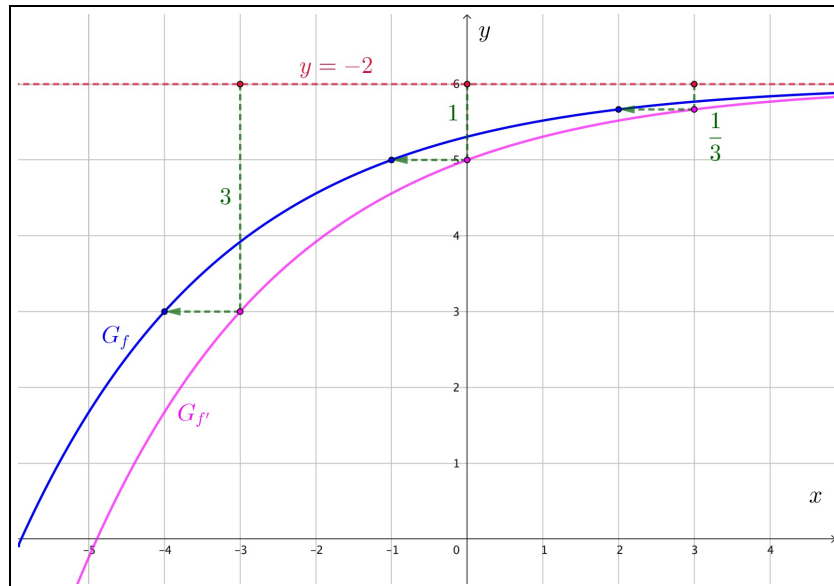
- (a) $f(x) = 4 - 3^{\frac{x}{4}}$ hat die Asymptote auf der Höhe $y = 4$, an die sie sich der G_f für $x \rightarrow -\infty$ anschmiegt. Gehen wir gegen rechts so vergrößert sich der Abstand zur Asymptote jeweils pro 4 Einheiten um den Faktor 3. Über $x = 0$ beträgt dieser Abstand genau 1, weil $3^0 = 1$ ist. Dem entsprechend hat der Funktionsgraph bei $x = 4$ einen Abstand von 3 zur Asymptote und bei $x = -4$ beträgt dieser Abstand nur $\frac{1}{3}$. Mit diesen Überlegungen sollte sich der Funktionsgraph sehr direkt zeichnen lassen:



- (b) Bei $f(x) = 3 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}} - 2$ betrachten wir gedanklich zuerst die vereinfachte Funktion $f'(x) = 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 2$. Dabei liegt die Asymptote auf der Höhe $y = -2$. Pro zwei horizontale Einheiten kommt einmal der Faktor 2 zur Anwendung, wobei wir über der Stelle $x = 0$ mit einem vertikalen Abstand von 3 zur Asymptote starten. Dann beträgt dieser Abstand zur Asymptote bei $x = 2$ bereits 6 und bei $x = -2$ erst $\frac{3}{2}$. Zum Schluss müssen wir unsere Vereinfachung rückgängig machen und x wieder durch $x - 3$ ersetzen. Das bedeutet, der ganze Funktionsgraph zu f' muss nun noch um 3 Einheiten nach rechts verschoben werden. Hier die beiden Funktionsgraphen:



- (c) Bei $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{3}} + 6$ betrachten wir wiederum zuerst eine vereinfachte Version ohne horizontale Verschiebung, also $f'(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{3}} + 6$. Dabei liegt die Asymptote auf der Höhe $y = 6$. Der Funktionsgraph schmiegt sich wegen dem Minuszeichen vor Exponentialterm und dem darin enthaltenen Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{3}$ von unten her an die Asymptote an, wenn wir nach rechts gehen. Über $x = 0$ beträgt der Abstand zur Asymptote -1 . Er verändert sich pro 3 horizontalen Einheiten mit dem Faktor $\frac{1}{3}$. Bei $x = -3$ beträgt er 3, bei $x = 3$ nur noch $\frac{1}{3}$. Damit lässt sich der Graph von f' bereits gut skizzieren. Er muss nun noch horizontal um 1 Einheit nach links verschoben werden ($x \rightarrow x + 1$), sodass wir den Graphen von f erhalten:



7. (a) Mit der Asymptote ergibt sich zunächst der Ansatz $f(x) = f_0 \cdot a^x + \frac{17}{3}$. Bei $x = 0$ ist der Abstand zur Asymptote gerade der Startfaktor f_0 , hier also $\frac{17}{3} - 3 = \frac{8}{3}$. Allerdings ist dieser Wert einzusetzen, denn der Graph nähert sich der Asymptote von unten. Somit lautet unser verbesserter Ansatz $f(x) = -\frac{8}{3} \cdot a^x + \frac{17}{3}$. Schliesslich können wir beispielsweise noch den anderen Punkt einsetzen und daraus a bestimmen:

$$f(2) = -\frac{8}{3} \cdot a^2 + \frac{17}{3} \stackrel{!}{=} 5 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \cdot a^2 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{17}{3}}}$$

- (b) Hier liegt die Asymptote auf der Höhe -3 . Es gibt aber keinen Punkt mehr auf der y -Achse. Wir sehen aber, dass sich der Abstand zur Asymptote vom linken eingezeichneten Punkt zum rechten verdoppelt. Dazu werden 2 horizontale Einheiten benötigt. Damit können wir für die Funktion ansetzen: $f(x) = f_0 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 3$. Jetzt gilt es nur noch einen Punkt einzusetzen:

$$f(-1) = f_0 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} - 3 \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \Leftrightarrow f_0 = 4\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 4\sqrt{2} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} - 3}}$$

- (c) Dies ist eine neue Situation, da wir keine Asymptote gegeben haben. Das macht die Sache empfindlich schwieriger. Ich zeige hier deshalb zunächst, dass wir mit einem Gleichungssystem – 3 Gleichungen + 3 Unbekannte – durchaus zum Ziel kommen. Unser Funktionsansatz lautet $f(x) = f_0 \cdot a^x + D$:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} f(0) = -3 \\ f(2) = 0 \\ f(4) = \frac{3}{2} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 \cdot a^0 + D = -3 \\ f_0 \cdot a^2 + D = 0 \\ f_0 \cdot a^4 + D = \frac{3}{2} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 = -3 - D \\ f_0 \cdot a^2 = -D \\ f_0 \cdot a^4 = \frac{3}{2} - D \end{array} \right| \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}: a^2 = \frac{-D}{-3-D} = \frac{D}{D+3} \\ \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{2}}: a^2 = \frac{\frac{3}{2}-D}{-D} = \frac{D-\frac{3}{2}}{D} \end{array} \Rightarrow \frac{D}{D+3} = \frac{D-\frac{3}{2}}{D} \\ \Leftrightarrow D^2 = D^2 - \frac{3}{2}D + 3D - \frac{9}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}D - \frac{9}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{D = 3}} \end{array}$$

Nun können wir wie gewohnt zurückeinsetzen, zunächst in ①:

$$\text{in ①: } f_0 = -3 - D = \underline{\underline{-6}} \quad \text{und in ②: } -6 \cdot a^2 = -3 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

Somit erhalten wir:

$$\underline{\underline{f(x) = -6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + 3}}$$

Effektiv könnten wir diese Aufgabe auch ohne ein derart mühsames Gleichungssystem lösen. Dazu müssen wir die drei gegebenen Punkte etwas näher betrachten: Zunächst stellen wir fest, dass der mittlere Punkt horizontal wirklich genau zwischen den beiden anderen Punkten liegt (x -Koordinaten 0, 2 und 4). Das bedeutet, dass beim Übergang vom Punkt ganz links zum mittleren Punkt genau der gleiche Verkleinerungsfaktor zur Anwendung kommt, wie wenn wir vom mittleren Punkt zum rechten Punkt gehen. Diese Verkleinerung bezieht sich allerdings nicht auf den Funktionswert insgesamt, sondern nur auf den Abstand zur Asymptote. Diese Verkleinerung passiert jeweils über 2 horizontalen Einheiten hinweg, sodass wir von Anfang an an $a^{\frac{x}{2}}$ denken können. Nun beträgt der vertikale Abstand zwischen dem linken und dem mittleren Punkt 3 und derjenige zwischen dem mittleren und dem rechten Punkt $\frac{3}{2}$. Der Abstand wird also halbiert, was bei Exponentialfunktionen eben auch bedeutet, dass hier jeweils der Abstand zur Asymptote halbiert wird. Daher folgern wir für den Exponentialterm: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$. Jetzt brauchen wir nur noch zwei Punkte in den Ansatz $f(x) = f_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + D$ einzusetzen:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} f(0) = -3 \\ f(2) = 0 \end{array} \right| &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + D = -3 \\ f_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + D = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 + D = -3 \\ \frac{f_0}{2} + D = 0 \end{array} \right| \Rightarrow f_0 - \frac{f_0}{2} = 3 \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{f_0 = -6}} \Rightarrow -6 + D = -3 \Leftrightarrow \underline{\underline{D = 3}} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + 3}} \end{aligned}$$

Man muss selber entscheiden, ob man das nun besser findet als das Einsetzen von drei Punkten.

- (d) Gleich nochmals ein Beispiel ohne Asymptote, aber mit drei Punkten. Ich zeige hier nochmals das Verfahren mit dem Gleichungssystem vor (Ansatz: $f(x) = f_0 \cdot a^x + D$):

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} f(-1) = 2 \\ f(2) = -2 \\ f(5) = -\frac{10}{3} \end{array} \right| &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 \cdot a^{-1} + D = 2 \\ f_0 \cdot a^2 + D = -2 \\ f_0 \cdot a^5 + D = -\frac{10}{3} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 \cdot a^{-1} = -D + 2 \\ f_0 \cdot a^2 = -D - 2 \\ f_0 \cdot a^5 = -D - \frac{10}{3} \end{array} \right| \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \\ &\Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}: \\ \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{2}}: \end{array} \left| \begin{array}{l} a^3 = \frac{-D-2}{-D+2} = \frac{D+2}{D-2} \\ a^3 = \frac{-D-\frac{10}{3}}{-D-2} = \frac{D+\frac{10}{3}}{D+2} \end{array} \right| \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \Rightarrow \frac{D+2}{D-2} = \frac{D+\frac{10}{3}}{D+2} \\ &\Leftrightarrow (D+2)^2 = (D-2) \left(D + \frac{10}{3}\right) \Leftrightarrow D^2 + 4D + 4 = D^2 + \frac{10}{3}D - 2D - \frac{20}{3} \\ &\Leftrightarrow 4D + 4 = \frac{4}{3}D - \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{3}D = -\frac{32}{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{D = -4}} \\ &\text{in ④: } a^3 = \frac{-4+2}{-4-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}} \\ &\text{und in ①: } f_0 \cdot \sqrt[3]{3} = 4 + 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{f_0 = \frac{6}{\sqrt[3]{3}}}} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x - 4}} \end{aligned}$$

8. (a) In 12 Halbtonschritten verdoppelt sich die Frequenz. Wenn wir mit a den Vergrößerungsfaktor der Frequenz pro Halbtonschritt ($\Delta n = 1$) bezeichnen, so folgt daraus:

$$a^{12} \stackrel{!}{=} 2 \Leftrightarrow a = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463 \Rightarrow p = a - 1 \approx 1.059463 - 1 = 0.059463 = \underline{\underline{5.9463\%}}$$

- (b) Ausgehend vom Ton a' mit $n = 0$ und $f(0) = 440$ Hz können wir für die Frequenz f in Abhängigkeit von der Tonnummer n schreiben:

$$\underline{\underline{f(n) = f_0 \cdot a^n \approx 440 \text{ Hz} \cdot 1.059463^n}}$$

Um in die Gegenrichtung aus der Frequenz f die Tonnummer n zu bestimmen, müssen wir lediglich die Funktionsgleichung für $f(n)$ nach n auflösen. Das machen wir am besten zuerst rein formal:

$$f = f_0 \cdot a^n \Leftrightarrow \frac{f}{f_0} = a^n \Leftrightarrow n(f) = \log_a\left(\frac{f}{f_0}\right) \approx \log_{1.059463}\left(\frac{f}{440 \text{ Hz}}\right)$$

Es ist passend, dass sich im Argument der Logarithmusfunktion die Frequenzeinheiten offensichtlich wegekürzen werden ($\frac{f}{f_0}$), denn in eine Logarithmusfunktion können ausschliesslich "nackte" Zahlen ohne Einheiten eingesetzt werden, weil ein Logarithmus von der Idee her stets einen Exponenten als Resultat liefert – und Exponenten müssen zwangsläufig reine Zahlen ohne Einheiten sein. (Zur Erinnerung: $\log_a(b)$ ist die Antwort auf die Frage: "a hoch wie viel ergibt b?" Die Antwort ist also ein Exponent!)

- (c) Wir brauchen lediglich die Zahl $n = 7$ in die Funktion $f(n)$ einzusetzen:

$$f(e'') = f(7) \approx 440 \text{ Hz} \cdot 1.059463^7 \approx \underline{\underline{659.25 \text{ Hz}}}$$

- (d) Und hier verwenden wir die unter (b) bestimmte Funktion $n(f)$:

$$n(587.3 \text{ Hz}) \approx \log_{1.059463}\left(\frac{587.3 \text{ Hz}}{440 \text{ Hz}}\right) \approx 4.999 \approx 5 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Ton } d''}}$$

9. (a) Die Asymptote der Temperaturfunktion für $t \rightarrow \infty$ ist bei der Zimmertemperatur von 20°C . Der Abstand zu dieser Zimmertemperatur nimmt exponentiell ab, denn je grösser dieser Unterschied noch ist, umso mehr Wärme nimmt das Joghurt pro Sekunde aus der Umgebung auf. Zu Beginn beträgt der Unterschied zur Zimmertemperatur $\vartheta_0 = -15^\circ\text{C}$ ($= 5^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}$). Nach 10 min ist dieser Unterschied auf -9°C ($= 11^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}$) zurückgegangen. Der Verkleinerungsfaktor auf die 10 min beträgt also $a = \frac{-9^\circ\text{C}}{-15^\circ\text{C}} = \frac{3}{5}$. Somit können wir für die Temperaturfunktion insgesamt schreiben:

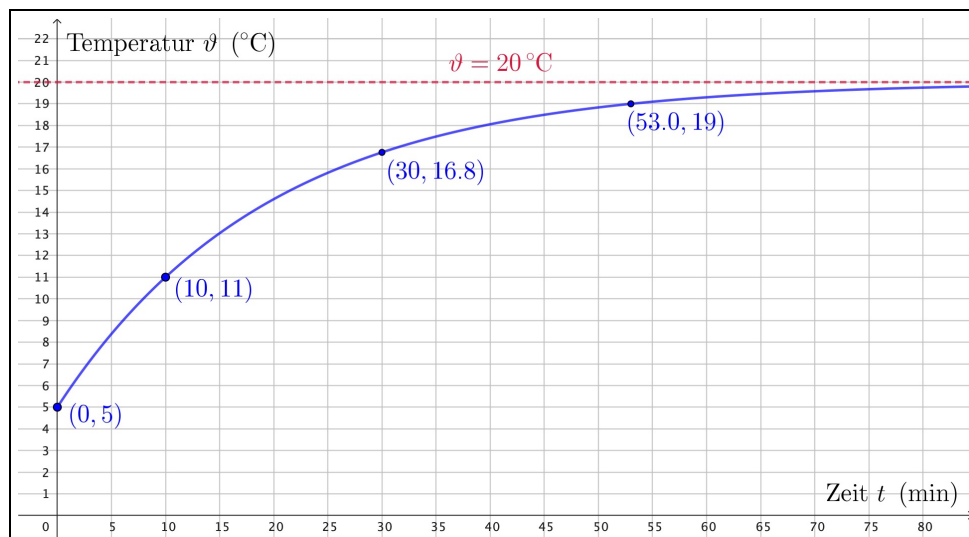
$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot a^{\frac{t}{a}} + D = -15^\circ\text{C} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{10 \text{ min}}} + 20^\circ\text{C} = -15^\circ\text{C} \cdot 0.6^{\frac{t}{10 \text{ min}}} + 20^\circ\text{C}$$

Setzen wir andere Zeiten in den exponentiellen Verkleinerungsfaktor ein, so erhalten wir direkt die Basen für die Notation der Temperaturfunktion mit anderen Zeitschritten:

$$0.6^{\frac{1 \text{ min}}{10 \text{ min}}} \approx 0.9502 \Rightarrow \underline{\underline{\vartheta(t) = -15^\circ\text{C} \cdot 0.9502^{\frac{t}{1 \text{ min}}} + 20^\circ\text{C}}}$$

$$0.6^{\frac{60 \text{ min}}{10 \text{ min}}} \approx 0.04666 \Rightarrow \underline{\underline{\vartheta(t) = -15^\circ\text{C} \cdot 0.04666^{\frac{t}{1 \text{ h}}} + 20^\circ\text{C}}}$$

Der Vollständigkeit halber sei hier noch rasch der Graph der Temperaturfunktion gezeigt:



(b) Wir setzen $t = 30 \text{ min}$ in eine der drei Funktionen ein und erhalten:

$$\vartheta(30 \text{ min}) = -15^\circ\text{C} \cdot 0.6^{\frac{30 \text{ min}}{10 \text{ min}}} + 20^\circ\text{C} = -15^\circ\text{C} \cdot 0.6^3 + 20^\circ\text{C} \approx \underline{\underline{16.8^\circ\text{C}}}$$

(c) Wir lösen die sich ergebende Exponentialgleichung nach der gesuchten Zeit auf:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &\stackrel{!}{=} 19^\circ\text{C} && | \text{ Fkt.gleichung einsetzen} \\ \Rightarrow -15^\circ\text{C} \cdot 0.6^{\frac{t}{10 \text{ min}}} + 20^\circ\text{C} &= 19^\circ\text{C} && | - 20^\circ\text{C} \\ \Rightarrow -15^\circ\text{C} \cdot 0.6^{\frac{t}{10 \text{ min}}} &= -1^\circ\text{C} && | : (-15^\circ\text{C}) \\ \Leftrightarrow 0.6^{\frac{t}{10 \text{ min}}} &= \frac{1}{15} && | \log_{0.6}(\dots) \\ \Leftrightarrow \frac{t}{10 \text{ min}} &= \log_{0.6}\left(\frac{1}{15}\right) && | \cdot 10 \text{ min} \\ \Leftrightarrow t &= 10 \text{ min} \cdot \log_{0.6}\left(\frac{1}{15}\right) \approx \underline{\underline{53.0 \text{ min}}} \end{aligned}$$

10. Das Moore'sche Gesetz

(a) Wir können die Speicherkapazität S gemäss dem Moore'schen Gesetz als Exponentialfunktion in Abhängigkeit von der Zeit t notieren:

$$S(t) = S_0 \cdot a^{\frac{t}{T_2}} = 2000 \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{\frac{t}{2 \text{ a}}} = 2000 \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{t}{1 \text{ a}}} = 2000 \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{t}{1 \text{ a}}}$$

Dabei steht $t = 0$ für das Jahr 1971.

Der Vergrösserungsfaktor pro Jahr ist folglich $a = \sqrt{2} \approx 1.414$, sodass das jährliche prozentuale Wachstum der Speicherkapazität $p = a - 1 \approx 0.414 = \underline{\underline{41.4\%}}$ beträgt.

In fünf Jahren ergibt sich: $a = (\sqrt{2})^5 \approx 5.657$, also $p = a - 1 \approx 4.657 = \underline{\underline{465.7\%}}$.

(b) Nach einer Verzehntausendfachungszeit $T_{10\,000}$ muss der Vergrösserungsfaktor genau 10 000 betragen. Daraus folgt für $T_{10\,000}$:

$$(\sqrt{2})^{\frac{T_{10\,000}}{1 \text{ a}}} \stackrel{!}{=} 10\,000 \quad \Leftrightarrow \quad T_{10\,000} = 1 \text{ a} \cdot \log_{\sqrt{2}}(10\,000) \approx \underline{\underline{26.6 \text{ a}}}$$

(c) Wir setzen das Jahr 2019, also $t = 48 \text{ a}$ in die unter (a) notierte Exponentialfunktion ein und erhalten:

$$S(48 \text{ a}) = 2000 \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{\frac{48 \text{ a}}{2 \text{ a}}} = 2000 \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{24} \approx 3.36 \cdot 10^{10} \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2} \approx 2.50 \cdot 10^{10} \frac{\text{Trans.}}{\text{cm}^2}$$

Das letzte " $\approx$ " mag zunächst etwas verwirren, denn 3.36 scheint ja nicht besonders nahe an 2.5 zu liegen. Bedenken wir allerdings, dass zwischen diesen Zahlen ein Faktor von nur $\frac{3.36}{2.5} \approx 1.34$ liegt, so stellen wir fest, dass das Moore'sche Gesetz immer noch erstaunlich gut zutrifft. Schliesslich ist $1.34 < \sqrt{2}$, d.h., die Abweichung vom Moore'schen Gesetz ist zeitlich gesprochen weniger als ein Jahr!

11. (a) Gegeben sind drei Punkte in einem t - ϑ -Diagramm, durch die eine Exponentialfunktion gelegt werden soll (mit t in Minuten und ϑ in $^{\circ}\text{C}$): $A(4, 57)$, $B(8, 45.5)$ und $C(12, 36.2)$.

Wie schon bei den Aufgaben 7.(c) und 7.(d) können wir diese Punkte in den Exponentialfunktionsansatz $\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot a^t + D$ einsetzen und dann das zugehörige Gleichungssystem lösen:

$$\begin{cases} \vartheta(4) = 57 \\ \vartheta(8) = 45.5 \\ \vartheta(12) = 36.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_0 \cdot a^4 + D = 57 \\ \vartheta_0 \cdot a^8 + D = 45.5 \\ \vartheta_0 \cdot a^{12} + D = 36.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vartheta_0 \cdot a^4 = 57 - D & \textcircled{1} \\ \vartheta_0 \cdot a^8 = 45.5 - D & \textcircled{2} \\ \vartheta_0 \cdot a^{12} = 36.2 - D & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} : a^4 = \frac{45.5 - D}{57 - D} \quad \textcircled{4} \\ \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{2}} : a^4 = \frac{36.2 - D}{45.5 - D} \quad \textcircled{5} \end{array} \Rightarrow \frac{45.5 - D}{57 - D} = \frac{36.2 - D}{45.5 - D}$$

$$\Leftrightarrow (45.5 - D)^2 = (36.2 - D)(57 - D) \Leftrightarrow 45.5^2 - 91D + D^2 = 36.2 \cdot 57 - 93.2D + D^2$$

$$\Leftrightarrow 2.2D = 36.2 \cdot 57 - 45.5^2 = -6.85 \Leftrightarrow D = -\frac{6.85}{2.2} \approx \underline{\underline{-3.114}}$$

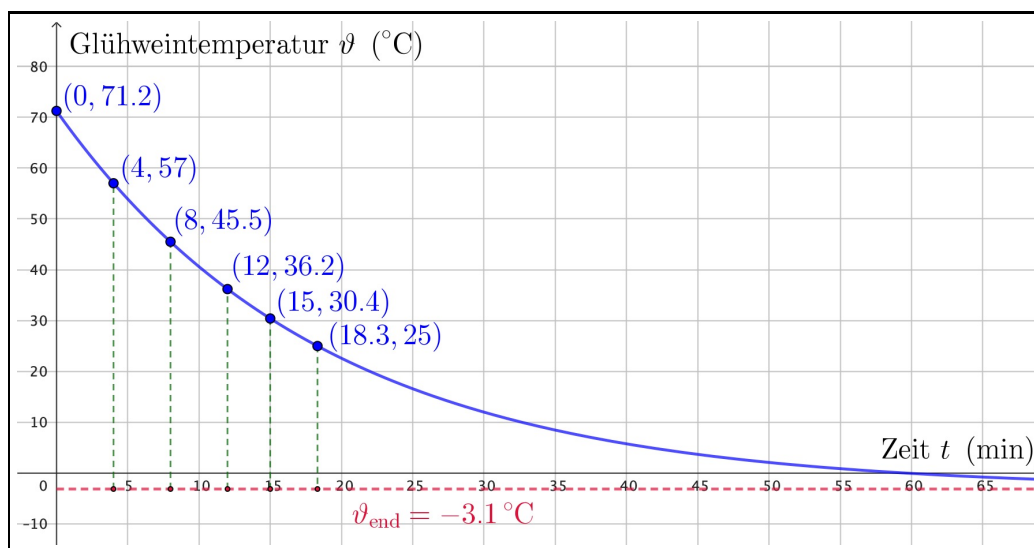
$$\text{in } \textcircled{4}: a^4 \approx \frac{45.5 + 3.114}{57 + 3.114} \approx 0.8087 \Leftrightarrow a \approx \sqrt[4]{0.8087} \approx \underline{\underline{0.9483}}$$

$$\text{und in } \textcircled{1}: \vartheta_0 \cdot 0.8087 = 57 + 3.114 \Leftrightarrow \vartheta_0 \approx \frac{60.114}{0.8087} \approx \underline{\underline{74.33}}$$

$$\Rightarrow \vartheta(t) = 74.33^{\circ}\text{C} \cdot 0.9483^t - 3.114^{\circ}\text{C} \quad \text{mit } t \text{ in Minuten!}$$

Damit beträgt die Anfangstemperatur des Glühweins $\vartheta(0) \approx 74.33^{\circ}\text{C} - 3.114^{\circ}\text{C} \approx \underline{\underline{71.2^{\circ}\text{C}}}$ und die Umgebungstemperatur liegt auf $\vartheta_{\text{end}} = D \approx \underline{\underline{-3.1^{\circ}\text{C}}}$.

Zur besseren Veranschaulichung zeichnen wir dazu sofort ein Diagramm:



- (b) Bei der Halbwertszeit muss es um die Halbierung des Unterschieds zwischen Glühwein- und Umgebungstemperatur gehen. (Zu Beginn beträgt dieser Unterschied wie unter (a) berechnet $\vartheta_0 \approx 74.3^{\circ}\text{C}$.) Für die Halbwertszeit finden wir durch einsetzen in den Exponentialfaktor:

$$0.9483^{T_{1/2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow T_{1/2} = \log_{0.9483} \left(\frac{1}{2} \right) \approx \underline{\underline{13.1 \text{ min}}}$$

- (c) Wir setzen $t = 15 \text{ min}$ in die Temperaturfunktion aus (a) ein:

$$\vartheta(15 \text{ min}) = 74.33^{\circ}\text{C} \cdot 0.9483^{15} - 3.114^{\circ}\text{C} \approx \underline{\underline{30.4^{\circ}\text{C}}}$$

- (d) Die Temperaturfunktion muss mit 25.0°C gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= 74.33^{\circ}\text{C} \cdot 0.9483^t - 3.114^{\circ}\text{C} \stackrel{!}{=} 25.0^{\circ}\text{C} \Leftrightarrow 0.9483^t = \frac{25.0^{\circ}\text{C} + 3.114^{\circ}\text{C}}{74.33^{\circ}\text{C}} \\ \Leftrightarrow t &= \log_{0.9483} \left(\frac{28.114^{\circ}\text{C}}{74.33^{\circ}\text{C}} \right) \approx \underline{\underline{18.3 \text{ min}}} \end{aligned}$$