

Lösungen Exp&Log 8: Graphen von Exponentialfunktionen

Klasse 155c / AGe

1. Wenn wir den gegebenen Punkt einsetzen, ergibt sich je eine Potenzgleichung, die wir mittels Wurzelziehen oder Hochrechnen lösen:

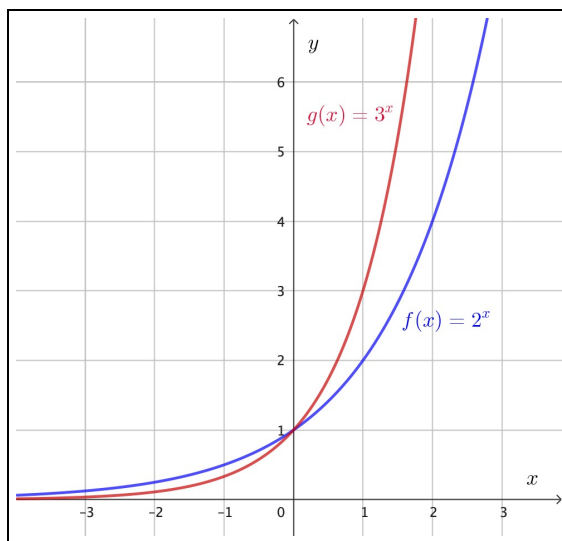
(a) $a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = \underline{4} \Rightarrow f(x) = 4^x$

(b) $a^{\frac{1}{2}} = 16 \Rightarrow a = 16^2 = \underline{256} \Rightarrow f(x) = 256^x$

(c) $a^4 = 9 \Rightarrow a = \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \underline{\sqrt{3}} \Rightarrow f(x) = (\sqrt{3})^x$

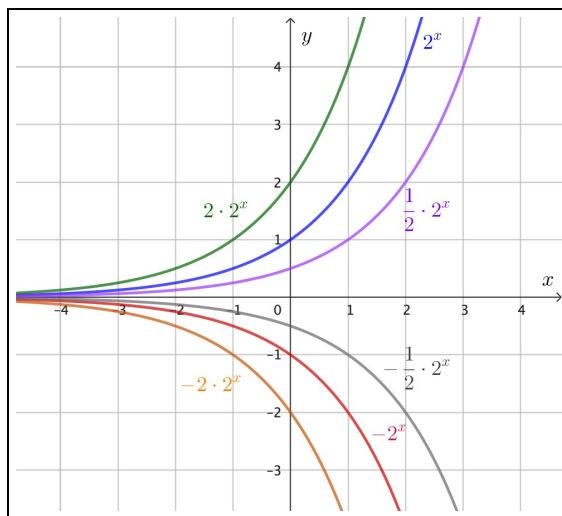
(d) $a^{-6} = \pi^3 \Rightarrow a = (\pi^3)^{-\frac{1}{6}} = \pi^{-\frac{1}{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

2. Es ergeben sich die folgenden Graphen:



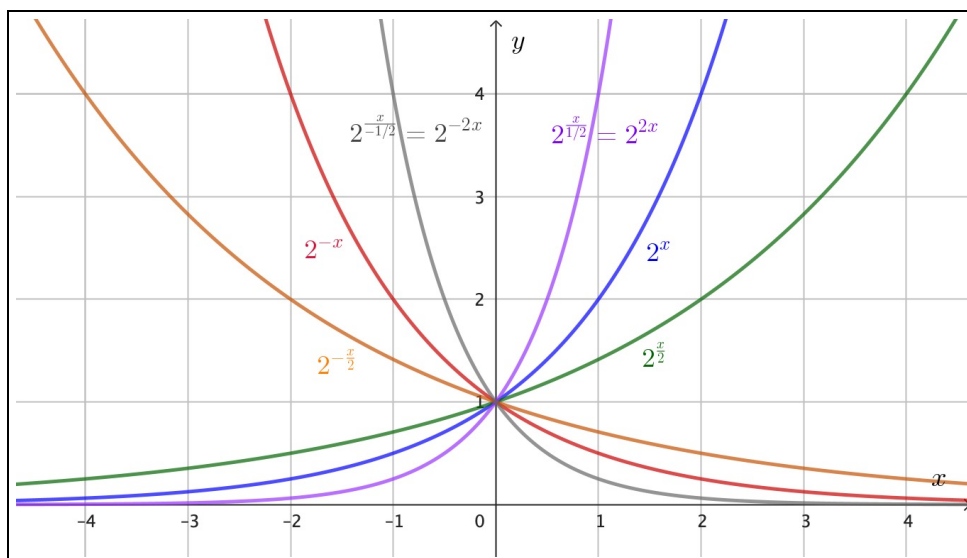
Wir bemerken: Im Bereich der positiven Stellen x verläuft der Graph von $g(x) = 3^x$ über demjenigen von $f(x) = 2^x$, aber im Bereich negativer Stellen ist es gerade umgekehrt. Beide Graphen haben für $x \rightarrow -\infty$ die x -Achse als Asymptote.

3. Hier die zugehörigen Graphen:



Der Parameter c legt die Höhe fest, auf der der Graph von $c \cdot 2^x$ die y -Achse durchquert. Damit wird zudem definiert, ob sich die Exponentialfunktion für $x \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ entwickelt resp. ob die Funktion streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist.

4. Hier erhalten wir die folgenden Graphen:



Der Parameter b legt fest, auf welchen Schritt sich der Basisfaktor 2 bezieht. Bei negativem b ist dies ein Schritt nach links. Daher sind die Exponentialfunktionen mit negativem b gegen links zunehmend resp. gegen rechts abnehmend.

Bei grösseren Schritten erfolgt die Veränderung des Funktionswertes langsam, bezieht sich der Basisfaktor 2 hingegen auf einen kleineren Schritt, so erfolgt eine raschere Veränderung.

5. Die y -Höhe der Asymptote liegt jeweils direkt den Parameter D fest. Danach kann man mit unterschiedlichen Methoden die verbleibenden Parameter f_0 und a bestimmen. Ich zeige hier verschiedene Varianten vor, sodass alles allermindestens einmal vorgezeigt wurde. Alle Lösungen lassen sich bestens durch Eingabe in GeoGebra überprüfen – das würde ich sehr anraten:

- (a) $D = 0$. Nun schneidet der G_f die y -Achse auf der Höhe 1 (über D), wie es bei unmodifizierten Exponentialfunktionen der Fall ist. Folglich ist $f_0 = 1$. Weiter vergrössert sich der Funktionswert (über der Höhe D) über 6 horizontale Einheiten hinweg um den Faktor 9. Es gilt also:

$$f(x) = 1 \cdot 9^{\frac{x}{6}} + 0 = \left(9^{\frac{1}{6}}\right)^x = \left(3^{\frac{2}{6}}\right)^x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^x = \underline{\underline{\left(\sqrt[3]{3}\right)^x}}$$

- (b) Nun ist $D = -2$. Die Angabe von drei weiteren Punkten ist eigentlich zu viel. Es ist nicht selbstverständlich, dass alle drei Punkte auf derselben Exponentialkurve liegen. Wir verwenden nur zwei Punkte und überprüfen dann, ob die erhaltene Funktionsgleichung auch zum dritten Punkt passt.

Der Punkt in der Mitte (über $x = 0$!) liegt 2 Häuschen über der Asymptote. Damit beträgt der Anfangswert $f_0 = 2$. Der Punkt zwei Einheiten weiter rechts liegt nur noch 1 Häuschen der Asymptote. Somit kommt der Faktor $\frac{1}{2}$ pro 2 Horizontalschritten einmal zur Anwendung, woraus wir folgern:

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} - 2 = 2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^x - 2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x - 2$$

Überprüfen wir noch, ob der linke Punkt ebenfalls auf dem Funktionsgraphen liegt:

$$f(-2) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} - 2 = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2 \quad \checkmark$$

- (c) $D = -3$. Über $x = 0$ hat der Graph eine Höhe von 1 über der Asymptote $\Rightarrow f_0 = 1$ und 1 Einheit weiter rechts sind es 3 Einheiten über D . Damit muss $a = 3$ sein:

$$f(x) = 1 \cdot 3^{\frac{x}{1}} - 3 = \underline{\underline{3^x - 3}}$$

- (d) $D = 3$. Bei $x = 0$ liegt der Graph 1 Einheit unterhalb von D und bei $x = 1$ sind es dann schon 5 Einheiten. Somit ist $f_0 = -1$ und $a = 5$:

$$f(x) = -1 \cdot 5^{\frac{x}{1}} + 3 = \underline{\underline{-5^x + 3}}$$

- (e) $D = 0$. Nun können wir F_0 allerdings nicht mehr direkt über der Stelle $x = 0$ ablesen. Wir könnten zwar vermuten, dass $f_0 = \frac{5}{2}$ ist, aber weil dort kein Punkt eingetragen ist, dürfen wir nicht von dieser Voraussetzung ausgehen. Nun gibt es zwei mehrere Wege.

Variante Gleichungssystem: In den Ansatz $f(x) = f_0 \cdot a^x + 0 = f_0 \cdot a^x$ können wir die beiden gegebenen Punkte einsetzen und erhalten so zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Dieses Gleichungssystem lässt sich sehr direkt und einfach lösen:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} f(-2) \stackrel{!}{=} 1 \\ f(1) \stackrel{!}{=} 4 \end{array} \right| &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 \cdot a^{-2} = 1 \\ f_0 \cdot a^1 = 4 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{f_0 \cdot a^{-2}}{f_0 \cdot a} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4} \\ \Rightarrow f_0 \cdot \sqrt[3]{4} = 4 &\Leftrightarrow f_0 = \frac{4}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 2\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{4})^x}} \end{aligned}$$

Damit ist auch klar, dass über $x = 0$ effektiv nicht der Wert $\frac{5}{2}$ vorliegt: $f(0) = 2\sqrt[3]{2} \approx 2.52$.

Wachstumsfaktor ablesen: Alternativ zum Gleichungssystem können wir fast wie bis anhin den Wachstumsfaktor ablesen: Bei der Stelle $x = -2$ liegt der Funktionswert 1 Einheit über der Asymptote. Drei Einheiten weiter rechts, über $x = 1$, ist er auf 4 Einheiten über D angewachsen. Damit folgt für den Wachstumsfaktor:

$$a^3 = \frac{4}{1} = 4 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4}$$

Nun können wir einen der beiden Punkte in den Ansatz $f(x) = f_0 \cdot (\sqrt[3]{4})^x$ einsetzen, um den Parameter f_0 zu bestimmen:

$$f(1) = f_0 \cdot (\sqrt[3]{4})^1 \stackrel{!}{=} 4 \Leftrightarrow f_0 = \frac{4}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 2\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{4})^x}}$$

Mit Verschiebung arbeiten: Im Prinzip sind wir mit etwas Übung und dem Wissen um Funktionsparameter auch jetzt in der Lage die Funktionsgleichung ganz direkt abzulesen. Wir können wie folgt denken: Der gezeigte Funktionsgraph entspricht einem Funktionsgraphen, der mit einem Wachstumsfaktor a über der Stelle $x = 0$ durch die Höhe $y = 1$ ging, aber danach noch um 2 Einheiten nach links verschoben wurde. Nach wie vor wächst die Höhe über der Asymptote, also hier über $y = 0$ in 3 Einheiten um den Faktor 4 an. Nun folgt ganz direkt für die Funktion $f(x)$:

$$f(x) = 1 \cdot 4^{\frac{x+2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{x}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot (\sqrt[3]{4})^x = \underline{\underline{2\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{4})^x}}$$

Natürlich ist die direkte Methode am Ende die anspruchsvollste. Gleichzeitig ist sie so schwierig nun auch nicht. Man muss dafür vor allem genau wissen, welcher Parameter wofür steht und wie Funktionsgraphen durch Parameter verändert werden.

- (f) $D = -2$. Ich gehe genau gleich vor wie unter (e) und zeige die drei Varianten.

Gleichungssystem: Aus dem Einsetzen der beiden Punkte in den Ansatz $f(x) = f_0 \cdot a^x - 2$ folgt:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} f(4) \stackrel{!}{=} -1 \\ f(5) \stackrel{!}{=} 2 \end{array} \right| &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 \cdot a^4 - 2 = -1 \\ f_0 \cdot a^5 - 2 = 2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f_0 \cdot a^4 = 1 \\ f_0 \cdot a^5 = 4 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{a^5}{a^4} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow a = 4 \\ f_0 \cdot 4^4 = 1 &\Leftrightarrow f_0 = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{256} \cdot 4^x - 2}} \end{aligned}$$

Wachstumsfaktor ablesen: Bei $x = 4$ beträgt der Abstand zur Asymptote 1 Einheit, bei $x = 5$, also eine Einheit weiter, sind es dann 4 Einheiten. Somit erhalten wir den Wachstumsfaktor a , können damit den Funktionsansatz weiter vervollständigen und ermitteln den letzten Parameter f_0 via Punkt einsetzen:

$$a^1 = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow f(x) = f_0 \cdot 4^x - 2 \Rightarrow f(4) = f_0 \cdot 4^4 - 2 \stackrel{!}{=} -1 \Leftrightarrow f_0 \cdot 4^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow f_0 = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256} \Leftrightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{256} \cdot 4^x - 2}}$$

Mit Verschiebung arbeiten: Betrachte die Funktionen als eine um 4 Einheiten nach rechts verschobene Exponentialfunktion, deren Graph vor der Verschiebung durch den Punkt $(0, -1)$ verläuft. Wir folgern ganz direkt:

$$f(x) = 1 \cdot 4^{\frac{x-4}{1}} - 2 = 4^{-4} \cdot 4^x - 2 = f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{256} \cdot 4^x - 2}}$$

(g) $D = 3$. Auch hier gibt es die drei Varianten, jetzt allerdings ohne grossen Kommentar:

Gleichungssystem: $f(x) = f_0 \cdot a^x + 3$. Punkte einsetzen!

$$\begin{vmatrix} f(-4) \stackrel{!}{=} -1 \\ f(-2) \stackrel{!}{=} 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} f_0 \cdot a^{-4} + 3 = -1 \\ f_0 \cdot a^{-2} + 3 = 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{f_0}{a^4} = -4 \\ \frac{f_0}{a^2} = -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\frac{f_0}{a^4}}{\frac{f_0}{a^2}} = \frac{-4}{-1}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{f_0}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -1 \Leftrightarrow 4f_0 = -1 \Leftrightarrow f_0 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3}}$$

Wachstumsfaktor ablesen: 4 Einheiten unter D bei $x = -4$, 1 Einheit unter D bei $x = -2 \Rightarrow$ Verkleinerungsfaktor von $\frac{1}{4}$ pro 2 horizontale Einheiten, also:

$$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = f_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3 \Rightarrow f(-2) = f_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 3 \stackrel{!}{=} 2$$

$$\Leftrightarrow f_0 \cdot 2^2 = -1 \Leftrightarrow 4f_0 = -1 \Leftrightarrow f_0 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3}}$$

Mit Verschiebung arbeiten: Verschiebung um 2 Einheiten nach links!

$$f(x) = -1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+2}{2}} + 3 = -\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} - 3 = \underline{\underline{-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3}}$$

6. (a) Für eine horizontale Verschiebung um 2 Einheiten nach links sind alle x durch $x + 2$ zu ersetzen:

$$g(x) = f(x + 2) = 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = \underline{\underline{9 \cdot 3^x}}$$

(b) Um am Ursprung zu spiegeln muss die Funktion erstens an der y -Achse gespiegelt werden ($x \rightarrow -x$) und anschliessend auch noch an der x -Achse (ganze Fkt. mit -1 multiplizieren). Zusammen bedeutet dies:

$$f'(x) = -f(-x) = -3^{-x}$$

Nun soll diese Funktion noch um 3 Einheiten nach rechts verschoben werden ($x \rightarrow x + 3$), also:

$$g(x) = f'(x + 3) = -3^{-(x+3)} = -3^{-x} \cdot 3^{-3} = \underline{\underline{-\frac{1}{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x}}$$

(c) Die Verschiebung nach oben ist simpel:

$$f'(x) = 3^x + 2$$

Die Spiegelung an der x -Achse danach ebenfalls:

$$g(x) = -f'(x) = -(3^x + 2) = \underline{\underline{-3^x - 2}}$$