

Lösungen Exp&Log 7: Mehr Aufgaben mit Exponentialfunktionen

Klasse 155c / AGe

1. Zunächst geht es darum eine Exponentialfunktion für den Waldbestand aufzustellen. Mit dem heutigen Wert als Startwert und mit 1 Jahr als Zeiteinheit resp. Zeitschritt setzen wir an:

$$B(t) = B_0 \cdot a^{\frac{t}{1 \text{ Jahr}}} = 72\,342 \text{ m}^3 \cdot a^{\frac{t}{1 \text{ Jahr}}} \quad \text{resp.} \quad B(t) = B_0 \cdot a^t = 72\,342 \text{ m}^3 \cdot a^t$$

Die vereinfachte Notation rechts geht in Ordnung, solange wir wissen, dass die Zeit t in Jahren einzusetzen ist, was hier aber stets der Fall sein wird.

Wir setzen den Bestand vor 12 Jahren ein ($t = -12$) und erhalten so den jährlichen Wachstumsfaktor a :

$$\begin{aligned} B(-12) &= 72\,342 \text{ m}^3 \cdot a^{-12} \stackrel{!}{=} 48\,128 \text{ m}^3 \quad \Leftrightarrow \quad a^{-12} = \frac{48\,128}{72\,342} \quad \Leftrightarrow \quad a^{12} = \frac{72\,342}{48\,128} \\ \Leftrightarrow \quad a &= \sqrt[12]{\frac{72\,342}{48\,128}} \approx 1.03455 \end{aligned}$$

Nun können wir die beiden Fragen direkt beantworten:

(a) $B(-5) \approx 72\,342 \text{ m}^3 \cdot 1.03455^{-5} \approx \underline{\underline{61\,043 \text{ m}^3}}$

(b) $B(7) \approx 72\,342 \text{ m}^3 \cdot 1.03455^7 \approx \underline{\underline{91\,759 \text{ m}^3}}$

Selbstverständlich hätte man den Startzeitpunkt auch auf heute vor 12 Jahren legen können. Dann wäre der Startwert $48\,128 \text{ m}^3$ gewesen und wir hätten für die beiden gesuchten Waldbestände $t = 7$ ($= 12 - 5$) und $t = 19$ ($= 12 + 7$) eingesetzt. Es ist aber auch ganz praktisch zu sehen, dass alles genauso gut funktioniert, wenn wir negative Zeitwerte einsetzen.

2. (a) Ohne zu rechnen können wir direkt die gesuchte Funktion notieren:

$$N(t) = N_0 \cdot a^{\frac{t}{T_a}} = \underline{\underline{5000 \cdot 3^{\frac{t}{20 \text{ Jahre}}}}}$$

Es wird nicht verlangt, dass wir in irgendeiner Weise den jährlichen Wachstumsfaktor angeben sollen, also ist obige Funktion so direkt das Resultat.

- (b) Nun wird es etwas umständlicher. Wir kennen den Wert nach 10 Jahren. Daraus müssen wir erst noch auf den Startwert N_0 zurückschließen. Dazu setzen wir zunächst an:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{100 \text{ Jahre}}}$$

Nun setzen wir $t = 10$ Jahre ein und erhalten aus der Vorgabe des Funktionswertes für diese Zeit:

$$N(10 \text{ Jahre}) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{10 \text{ Jahre}}{100 \text{ Jahre}}} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{10}} \stackrel{!}{=} 1000 \quad \Leftrightarrow \quad N_0 = 3^{\frac{1}{10}} \cdot 1000 \approx 1116.12$$

Damit finden wir für die gesuchte Funktion:

$$\underline{\underline{N(t) \approx 1116 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{100 \text{ Jahre}}}}}$$

Alternative für die ganz Schnellen: Man hätte $N(t)$ auch provisorisch mit dem Startwert 1000 ansetzen können. Das geht so schnell, wie wir es unter (a) gesehen hatten. Danach kann man die ganze Funktion um 10 Einheiten, also um 10 Jahre, nach rechts verschieben – und fertig:

$$\begin{aligned} N_{\text{prov}}(t) &= 1000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{100 \text{ Jahre}}} \Rightarrow N(t) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t-10 \text{ Jahre}}{100 \text{ Jahre}}} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{100 \text{ Jahre}}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{10}} \\ &= 1000 \cdot 3^{\frac{1}{10}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{100 \text{ Jahre}}} \approx \underline{\underline{1116 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{100 \text{ Jahre}}}}} \end{aligned}$$

3. Es muss jeweils zuerst der jährliche Veränderungsfaktor bestimmt werden, darin ist dann die jährliche prozentuale Veränderung enthalten:

(a) Vergrößerungsfaktor in einem Jahr: $a_1 = 2^{\frac{1 \text{ Jahr}}{20 \text{ Jahre}}} = 2^{\frac{1}{20}} \approx 1.0353$.

Damit beträgt das prozentuale jährliche Wachstum: $p_1 = a_1 - 1 \approx 0.0353 = \underline{\underline{3.53\%}}$.

(b) Verkleinerungsfaktor in einem Jahr: $a_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1 \text{ Jahr}}{30 \text{ Jahre}}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{30}} \approx 0.9905$.

Damit beträgt die prozentuale jährliche Abnahme: $p_1 = a_1 - 1 \approx -0.0095 = \underline{\underline{-0.95\%}}$.

4. Wir gehen prinzipiell gleich vor wie bei Aufgabe 3.(b):

(a) Verkleinerungsfaktor in einem Jahr: $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1 \text{ Jahr}}{2 \text{ Jahre}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$.

Damit beträgt die prozentuale jährliche Abnahme: $p_1 = a_1 - 1 \approx -0.2929 = \underline{\underline{-29.29\%}}$.

- (b) Zu einer Abnahme um 85 % gehört ein (siebenjähriger) Verkleinerungsfaktor von 15 % = 0.15. Daraus folgt:

Verkleinerungsfaktor in einem Jahr: $a_1 = 0.15^{\frac{1 \text{ Jahr}}{7 \text{ Jahre}}} = 0.15^{\frac{1}{7}} \approx 0.7626$.

Damit beträgt die prozentuale jährliche Abnahme: $p_1 = a_1 - 1 \approx -0.2374 = \underline{\underline{-23.74\%}}$.

- (c) Zu einer Abnahme um $\frac{3}{4}$ des Ausgangswertes gehört ein (vierjähriger) Verkleinerungsfaktor von $\frac{1}{4}$. Daraus folgt:

Verkleinerungsfaktor in einem Jahr: $a_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1 \text{ Jahr}}{4 \text{ Jahre}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$.

Damit haben wir dieselbe jährliche prozentuale Abnahme wie bei (a): $p_1 = a_1 - 1 \approx -29.29\%$.

Das ist nicht sonderlich überraschend: Wenn der Wert des Autos in 2 Jahren um die Hälfte sinkt, dann sind wir nach 4 Jahren eben bei 25 % des Ausgangswertes.

5. Die *Aktivität* eines radioaktiven Präparats nimmt exponentiell ab. Zu Beginn des Experiments betrug sie $A_0 = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq}$ (Bq = Becquerel = SI-Einheit der Aktivität = Anzahl Zerfälle pro Sekunde, $\text{Bq} = \frac{1}{\text{s}}$), nach genau 5 Stunden waren es noch $5.12 \cdot 10^8 \text{ Bq}$.

Zunächst generieren wir aus den Angaben das Zerfallsgesetz. Für fünf Stunden beträgt der Verkleinerungsfaktor:

$$a = \frac{5.12 \cdot 10^8 \text{ Bq}}{1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq}} = \frac{5.12}{1.55 \cdot 10^4} \approx 0.0003303$$

Damit können wir schreiben:

$$A(t) = A_0 \cdot a^{\frac{t}{T_a}} \approx 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot 0.0003303^{\frac{t}{5 \text{ h}}}$$

- (a) Nach genau einer Halbwertszeit $T_{1/2}$ muss der Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ betragen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 0.0003303^{\frac{T_{1/2}}{5 \text{ h}}} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_{1/2}}{5 \text{ h}} = \log_{0.0003303} \left(\frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \quad T_{1/2} &= 5 \text{ h} \cdot \log_{0.0003303} \left(\frac{1}{2} \right) \approx 0.4324 \text{ h} \approx \underline{\underline{25.94 \text{ min}}} \end{aligned}$$

Damit notieren wir das Zerfallsgesetz für die Aktivität neu:

$$\underline{\underline{A(t) = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{0.4324 \text{ h}}} = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{25.94 \text{ min}}}}}$$

Wir rechnen nun lieber mit diesem Zerfallsgesetz weiter, denn die Basis $\frac{1}{2}$ ist einfach übersichtlicher als 0.0003303.

(b) Für die drei gesuchten Aktivitäten erhalten wir:

$$A(2\text{ h}) = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\text{ h}}{0.4324\text{ h}}} \approx \underline{\underline{6.28 \cdot 10^{10} \text{ Bq}}}$$

$$A(8\text{ h}) = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8\text{ h}}{0.4324\text{ h}}} \approx \underline{\underline{4.18 \cdot 10^6 \text{ Bq}}}$$

$$A(-3\text{ h}) = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3\text{ h}}{0.4324\text{ h}}} = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot 2^{\frac{3\text{ h}}{0.4324\text{ h}}} \approx \underline{\underline{1.90 \cdot 10^{14} \text{ Bq}}}$$

(c) Der Verkleinerungsfaktor muss $1\% = 0.01$ betragen. Daraus folgt:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{0.4324\text{ h}}} \stackrel{!}{=} 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0.4324\text{ h} \cdot \log_{1/2}(0.01) \approx \underline{\underline{2.38\text{ h}}}$$

(d) Wir müssen zuerst herausfinden, welche Zeitspanne $T_{1/5}$ zum Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{5}$ gehört:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T_{1/5}}{0.4324\text{ h}}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad T_{1/5} = 0.4324\text{ h} \cdot \log_{1/2}\left(\frac{1}{5}\right) \approx 1.004\text{ h}$$

Damit können wir das Zerfallsgesetz neu notieren:

$$\underline{\underline{A(t) = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{1.004\text{ h}}}}}$$

In jeder Stunde wird die Aktivität also ungefähr gefünftelt.

(e) Wir bestimmen zunächst die Zehntelungszeit:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T_{1/10}}{0.4324\text{ h}}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad T_{1/10} = 0.4324\text{ h} \cdot \log_{1/2}\left(\frac{1}{10}\right) \approx 1.436\text{ h}$$

Mit $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-x}$ können wir das Zerfallsgesetz neu notieren:

$$A(t) = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t}{1.436\text{ h}}} = \underline{\underline{1.55 \cdot 10^{12} \text{ Bq} \cdot 10^{-\frac{t}{1.436\text{ h}}}}}$$

(f) Wir leiten allgemein den Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante λ und Halbwertszeit $T_{1/2}$ her. Das geht z.B. so: Setzen wir die Halbwertszeit in die Exponentialfunktion mit der Basis e ein, so muss sich ein Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ geben, weil der ja zur Halbwertszeit gehört:

$$e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda \cdot T_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}}}$$

In unserem Fall erhalten wir somit für die Zerfallskonstante:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} = \frac{\ln(2)}{0.4324\text{ h}} = \underline{\underline{1.603 \frac{1}{\text{h}}}} = \underline{\underline{0.000445 \frac{1}{\text{s}}}}$$

Die SI-Einheit ist also $\frac{1}{\text{s}}$ (= "eins pro Sekunde"). Der Wert von λ ist effektiv als Zerfallswahrscheinlichkeit zu verstehen. Jeder radioaktive Kern unseres Präparates hat *pro Sekunde* eine Zerfallswahrscheinlichkeit von $0.000445 = 0.0445\%$.