Lösungen Exp&Log 6: Erste Aufgaben mit Exponentialfunktionen

Klasse 155c / AGe

1. Für die gesuchten Zeiten erhalten wir:

   (a) Funktion der bedeckten Fläche: $A(t) = \frac{1}{512} \cdot 2^{\frac{t}{3\,\mathrm{d}}}$. (N.B.: $\mathrm{d} = \text{Tag}$.)
   Suche t mit $A(t) = 1$ (ganzer See!), also:

   $$A(t) = \frac{1}{512} \cdot 2^{\frac{t}{3\,\mathrm{d}}} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{t}{3\,\mathrm{d}}} = 512 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{3\,\mathrm{d}} = \log_2(512) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = 27\,\mathrm{d}}}$$

   (b) Wenn 99.999 % des Sees zu Beginn algenfrei sind, so sind $0.001\,\% = 0.000\,01 = \frac{1}{100\,000}$ davon bedeckt. Für die Funktion der bedeckten Fläche und die gesuchte Zeit folgt somit:

   $$A(t) = \frac{1}{100\,000} \cdot 10^{\frac{t}{10\,\mathrm{d}}} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{10\,\mathrm{d}} = \log(100\,000) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = 50\,\mathrm{d}}}$$

   (c) **[TR]** Hier ergibt sich gleichermassen ($1 - 83.5\,\% = 16.5\,\% = \frac{16.5}{100} = \frac{33}{200}$, $\frac{t}{12.5\,\mathrm{d}} = \frac{2t}{25\,\mathrm{d}}$):

   $$A(t) = \frac{33}{200} \cdot 7^{\frac{2t}{25\,\mathrm{d}}} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2t}{25\,\mathrm{d}} = \log_7\!\left(\frac{200}{33}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = \frac{25}{2} \cdot \log_7\left(\frac{200}{33}\right) \approx 11.6\,\mathrm{d}}}$$

2. Für die beiden Zeiten erhalten wir:Bei einer exponentiellen zeitlichen Entwicklung gehört zur Zeitspanne $t = 5\,\mathrm{h}\ldots$

   (a) Aus dem Verkleinerungsfaktor $0.125 = \frac{1}{8}$ in $5\,\mathrm{h}$ folgt:

   $$f(t) = f_0 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{t}{5\,\mathrm{h}}} \stackrel{!}{=} f_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5\,\mathrm{h}}}\right)^t = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T_{1/2}}}\right)^t \quad \Leftrightarrow \quad 8^{\frac{1}{5\,\mathrm{h}}} = 2^{\frac{1}{T_{1/2}}}$$

   $$\Leftrightarrow \quad \log_2\!\left(8^{\frac{1}{5\,\mathrm{h}}}\right) = \frac{1}{T_{1/2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{T_{1/2}} = \frac{1}{5\,\mathrm{h}} \cdot \log_2(8) = \frac{3}{5\,\mathrm{h}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T_{1/2} = \frac{5}{3}\,\mathrm{h} = 100\,\mathrm{min}}}$$

   Anmerkung: Das war nun fast ein bisschen zu viel des Guten resp. Formalen. Wir können auch ganz kurz überlegen: Eine Achtelung sind drei aufeinander folgende Halbierungen, daher enthält die Achtelungszeit ($= 5\,\mathrm{h}$) drei Halbwertzeiten, die dann eben $\frac{5}{3}\,\mathrm{h}$ lang sind.

   (b) Aufgrund der einfachen Zahlen können wir ganz direkt überlegen: Eine Vervierundsechzigfachung besteht aus sechs Verdoppelungen ($64 = 2^6$) und somit muss die Verdoppelungszeit $\frac{1}{6}$ der Vervierundsechzigfachungszeit betragen: $\underline{\underline{T_2 = \frac{T_{64}}{6} = \frac{5}{6}\,\mathrm{h} = 20\,\mathrm{min}}}$. Natürlich geht's auch ganz formal:

   $$f(t) = f_0 \cdot 64^{\frac{t}{5\,\mathrm{h}}} \stackrel{!}{=} f_0 \cdot 2^{\frac{t}{T_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(64^{\frac{1}{5\,\mathrm{h}}}\right)^t = \left(2^{\frac{1}{T_2}}\right)^t \quad \Leftrightarrow \quad 64^{\frac{1}{5\,\mathrm{h}}} = 2^{\frac{1}{T_2}}$$

   $$\Leftrightarrow \quad \log_2\!\left(64^{\frac{1}{5\,\mathrm{h}}}\right) = \frac{1}{T_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{5\,\mathrm{h}} \cdot \log_2(64) = \frac{6}{5\,\mathrm{h}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T_{1/2} = \frac{5}{6}\,\mathrm{h} = 50\,\mathrm{min}}}$$

3. (a) Der Vergrösserungs- oder Verkleinerungsfaktor nach der Zeit t ist in der Funktionsgleichung jeweils der Ausdruck $a^{\frac{t}{T_a}}$, denn mit diesem Faktor wird der Startwert multipliziert. Da setzen wir $10\,\mathrm{min}$ ein:

$$\text{Verkleinerungsfaktor} = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{10\,\mathrm{min}}{3\,\mathrm{min}}} \approx 0.2588}}$$

(b) In gleicher Weise erhalten wir für die Viertelstunde:

$$\text{Verkleinerungsfaktor} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{15\,\mathrm{min}}{3\,\mathrm{min}}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \approx 0.1317 = 13.17\,\%$$

Diese Anteil ist nach einer Viertelstunde noch vorhanden. Das bedeutet, die Anfangsmenge hat sich in dieser Zeit um $1 - 13.17\,\% = \underline{\underline{86.83\,\%}}$ verkleinert.

(c) Wir setzen die Funktion gleich dem vorgegebenen Endwert und erhalten für die Zeit:

$$f(t) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{3\,\mathrm{min}}} \stackrel{!}{=} 0.34 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{3\,\mathrm{min}}} = 0.17 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{3\,\mathrm{min}} = \log_{2/3}(0.17)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = 3\,\mathrm{min} \cdot \log_{2/3}(0.17) \approx 13.11\,\mathrm{min}}}$$

(d) Wenn wir die Halbwertszeit $T_{1/2}$ in die Funktion einsetzen, so muss sich per Definition die Hälfte des Startwerts ergben. So erhalten wir:

$$f(T_{1/2}) \stackrel{!}{=} \frac{f_0}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{T_{1/2}}{3\,\mathrm{min}}} = \frac{2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{T_{1/2}}{3\,\mathrm{min}}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_{1/2}}{3\,\mathrm{min}} = \log_{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T_{1/2} = 3\,\mathrm{min} \cdot \log_{2/3}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5.13\,\mathrm{min}}}$$

(e) Reduziert sich der Funktionswert $99\,\%$, so ist danach noch $1\,\%$ übrig. Daraus folgt:

$$f(t) \stackrel{!}{=} \frac{f_0}{100} \quad \Rightarrow \quad f_0 \cdot a^{\frac{t}{T_a}} = \frac{f_0}{100} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{3\,\mathrm{min}}} = \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{3\,\mathrm{min}} = \log_{2/3}\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = 3\,\mathrm{min} \cdot \log_{2/3}\left(\frac{1}{100}\right) \approx 34.07\,\mathrm{min}}}$$

4. Zunächst ist $N_0 = 2400$. Weiter ergibt sich für $4\,\mathrm{h}$ ein Vergrösserungsfaktor von $a = \frac{36\,800}{2400} = \frac{46}{3}$. Somit schreiben wir für die Wachstumsfunktion:

$$N(t) = 2400 \cdot \left(\frac{46}{3}\right)^{\frac{t}{4\,\mathrm{h}}}$$

Daraus folgen die Bakterienzahlen für die gefragten Zeitpunkte:

(a) 9 Uhr $\Rightarrow$ $N(1\,\mathrm{h}) = 2400 \cdot \left(\frac{46}{3}\right)^{\frac{1\,\mathrm{h}}{4\,\mathrm{h}}} \approx \underline{\underline{4749}}$

(b) 10 Uhr $\Rightarrow$ $N(2\,\mathrm{h}) = 2400 \cdot \left(\frac{46}{3}\right)^{\frac{2\,\mathrm{h}}{4\,\mathrm{h}}} \approx \underline{\underline{9398}}$

(c) 11 Uhr $\Rightarrow$ $N(3\,\mathrm{h}) = 2400 \cdot \left(\frac{46}{3}\right)^{\frac{3\,\mathrm{h}}{4\,\mathrm{h}}} \approx \underline{\underline{18\,597}}$

(d) 13.30 Uhr $\Rightarrow$ $N(5.5\,\mathrm{h}) = 2400 \cdot \left(\frac{46}{3}\right)^{\frac{5.5\,\mathrm{h}}{4\,\mathrm{h}}} \approx \underline{\underline{102\,438}}$

5. (a) Bei Brasilien beträgt der jährliche Vergrösserungsfaktor $a = 1 + 1.4\,\% = 1.014$. Damit notieren wir für die Wachstumsfunktion:

$$\text{Brasilien:} \qquad \underline{\underline{N_{\text{Br}}(t) = 184.2\,\text{Mio.} \cdot 1.014^{\frac{t}{1\,\text{Jahr}}}}}$$

Hier haben wir ein Beispiel, bei dem es allenfalls ein wenig einfacher resp. übersichtlicher wird, wenn wir im Exponenten nicht jedesmal "pro 1 Jahr" notieren. Wenn wir wissen, dass die Zeit t in Jahren (ab 2006) angegeben wird, können wir auch einfach schreiben:

$$\underline{\underline{N_{\text{Br}}(t) = 184.2\,\text{Mio.} \cdot 1.014^t}}$$

Bei Bangladesh müssen wir zuerst den jährlichen Wachstumsfaktor bestimmen. Dabei wissen wir, dass die Bevölkerung in 26 Jahren von 90.1 Mio. auf 144.2 Mio. anstieg, woraus folgt:

$$a^{26} = \frac{144.2\,\text{Mio.}}{90.1\,\text{Mio.}} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \left(\frac{144.2}{90.1}\right)^{\frac{1}{26}} \approx 1.018252$$

Somit schreiben wir für die Wachstumsfunktions von Bangladesh:

$$\underline{\underline{N_{\text{Ba}}(t) \approx 144.2\,\text{Mio.} \cdot 1.018252^t}}$$

(b) Wir benötigen die Verzehnfachungszeit T_{10}. Dafür ergibt sich:

$$N_{\text{Br}}(T_{10}) \stackrel{!}{=} 10N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 \cdot 1.014^{T_{10}} = 10N_0 \quad \Leftrightarrow \quad 1.014^{T_{10}} = 10$$
$$\Leftrightarrow \quad T_{10} = \log_{1.014}(10) \approx 165.62\,\text{Jahre}$$

Damit notieren wir die Wachstumsfunktion wie folgt:

$$\underline{\underline{N_{\text{Br}}(t) \approx 184.2\,\text{Mio.} \cdot 10^{\frac{t}{165.62\,\text{Jahre}}}}}$$

(c) Für diese Verdoppelungszeit ergibt sich:

$$N_{\text{Ba}}(T_2) \stackrel{!}{=} 2N_0 \quad \Rightarrow \quad 1.018252^{T_2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T_2 \approx \log_{1.018252}(2) \approx 38.32\,\text{Jahre}}}$$

(d) Der jährliche Wachstumsfaktor beträgt gemäss Aufgabe (b) $a \approx 1.018252$. Somit beträgt das jährliche Bevölkerungswachstum in Prozenten:

$$a = 1 + p \quad \Leftrightarrow \quad p = a - 1 \approx 1.018252 - 1 = 0.018252 = \underline{\underline{1.8252\,\%}}$$

(e) Wir setzen die beiden Wachstumsfunktionen einander gleich und erhalten für die Zeit:

$$\begin{array}{rcl} & N_{\text{Ba}}(t) = N_{\text{Br}}(t) & \mid \text{Funktionen einsetzen} \\ \Rightarrow & 144.2\,\text{Mio.} \cdot 1.018252^t = 184.2\,\text{Mio.} \cdot 1.014^t & \mid\ :144.2\,\text{Mio.}, : 1.014^t \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1.018252^t}{1.014^t} = \dfrac{184.2}{144.2} & \mid \text{4. Potenzgesetz} \\ \Leftrightarrow & \left(\dfrac{1.018252}{1.014}\right)^t = \dfrac{184.2}{144.2} & \mid \text{Brüche approximiert berechnen} \\ \Leftrightarrow & 1.004193^t = 1.277393 & \mid \log_{1.004193} \\ \Leftrightarrow & t = \log_{1.004193}(1.277393) \approx 58.5\,\text{J} & \end{array}$$

Gemäss dieser Berechnung wird die Bevölkerung von Bangladesh diejenige von Brasilien im Laufe des $\underline{\underline{\text{Jahres 2064}}}$ $(= 2006 + 58)$ überschreiten.

6. (a) Wir repetieren das Verfahren zur Bestimmung einer linearen Funktion, deren zugehörige Gerade durch zwei vorgegebene Punkte verläuft:

   i. Bestimmung der Geradensteigung:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{9}{2} - 2}{3 - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

   ii. Bestimmung des y-Achsenabschnitts durch Einsetzen eines Punktes, z.B. $A(1,2)$:

$$g(x) = mx + q = \frac{5}{4}x + q \quad \Rightarrow \quad g(1) = \frac{5}{4} + q \stackrel{!}{=} 2 \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}}}$$

(b) Für die quadratische Funktion kennen wir drei verschiedene Ansätze:

Normalform:	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Scheitelpunktform:	$f(x) = a(x-u)^2 + v$
Nullstellenform:	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Dabei ist a die Parabelöffnung, b die Steigung der Parabel beim Durchgang durch die y-Achse, c die Höhe, auf der die Parabel die y-Achse durchquert, u die x- und v die y-Koordinate des Scheitelpunktes, sowie $x_{1/2}$ allfällige Nullstellen der quadratischen Funktion.

Liegt der Scheitelpunkt der Parabel auf der y-Achse, so ist $u = 0$ und $b = 0$, sodass sich die Normalform oder die Scheitelpunktform gleichermassen als sinnvolle Ansätze empfehlen. Effektiv sehen beide Ansätze nun gleich aus:

$$f(x) = ax^2 + c$$

Dabei ist $c = v$, denn wenn der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt, dann ist die Durchstichhöhe auch gerade y-Koordinate des Scheitelpunktes.

Setzen wir die beiden Punkte in diesen Ansatz ein, so erhalten wir ein Gleichungssystem für a und c:

$$\left| \begin{array}{c} f(1) = 2 \\ f(3) = \frac{9}{2} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a + c = 2 \\ 9a + c = \frac{9}{2} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 8a = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow \quad c = 2 - a = 2 - \frac{5}{16} = \frac{27}{16} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{5}{16}x^2 + \frac{27}{16}}}$$

(c) Der Ansatz ist klar: $f(x) = f_0 \cdot a^{\frac{x}{X_a}}$. Dabei ist entweder der Basisfaktor a oder der zugehörige Horizontalschritt X_a frei wählbar, denn wenn ich mir beispielsweise einen Schritt X_a vorgebe, dann gehört dazu halt irgendein Faktor a.

Der Einfachheit halber wähle ich z.B. $X_a = 1$. Dann lautet der Ansatz $f(x) = f_0 \cdot a^x$. Auch hier setzen wir die beiden Punkte ein und erhalten ein Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{c} f(1) = 2 \\ f(3) = \frac{9}{2} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} f_0 \cdot a^1 = 2 \\ f_0 \cdot a^3 = \frac{9}{2} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{f_0 \cdot a^3}{f_0 \cdot a} = \frac{\frac{9}{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{3}{2} \qquad \text{nur die positive Lösung kommt in Frage!}$$

Daraus ergibt sich für den Anfangswert f_0 und somit für die gesuchte Exponentialfunktion:

$$f_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad f_0 = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x}}$$