Lösungen Exp&Log 3: Logarithmengesetze

Klasse 155c / AGe

1. Für die Zehnerlogarithmen ergibt sich:

   (a) $\lg(1000) = \underline{\underline{3}}$ (b) $\log\big(10^{27}\big) = \underline{\underline{27}}$ (c) $\log\big(100^{7}\big) = \log\big(10^{14}\big) = \underline{\underline{14}}$

   (d) $\lg\left(\dfrac{1}{100\,000}\right) = \underline{\underline{-5}}$ (e) $\lg\left(\dfrac{1}{1000^7}\right) = \lg\left(\dfrac{1}{10^{21}}\right) = \underline{\underline{-21}}$

2. Diese natürlichen Logarithmen ergeben:

   (a) $\ln\big(e^2\big) = \underline{\underline{2}}$ (b) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \underline{\underline{-1}}$ (c) $\ln\big(\sqrt{e}\,\big) = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

   (d) $\ln\left(\dfrac{e}{\sqrt[4]{e}}\right) = \ln\left(\dfrac{e}{e^{\frac{1}{4}}}\right) = \ln\left(e^{\frac{3}{4}}\right) = \underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$ (e) $\ln\big(\ln(e)\big) = \ln(1) = \underline{\underline{0}}$

3. Erste Aufgaben zum *ersten Logarithmengesetz* $\log_a(b\cdot c) = \log_a(b)+\log_a(c)$. Fasse jeweils zuerst zusammen und berechne dann nur ein einziges Mal den Logarithmus:

   (a) $\log_2(16) + \log_2(64) = \log_2(16\cdot 64) = \log_2\big(2^4\cdot 2^6\big) = \log_2\big(2^{10}\big) = \underline{\underline{10}}$

   (b) $\log(100\,000) + \log\left(\dfrac{1}{1000}\right) = \log\left(100\,000\cdot\dfrac{1}{1000}\right) = \log(100) = \underline{\underline{2}}$

   (c) $\log_6(12) + \log_6(18) = \log_6(12\cdot 18) = \log_6(216) = \underline{\underline{3}}$

   (d) $\log_{\frac{1}{4}}(2) + \log_{\frac{1}{4}}(32) = \log_{\frac{1}{4}}(64) = \log_{\frac{1}{4}}\big(4^3\big) = \underline{\underline{-3}}$

   (e) $\log_3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \log_3\big(9\sqrt{3}\,\big) = \log_3\left(\dfrac{\sqrt{3}\cdot 9\sqrt{3}}{3}\right) = \log_3(9) = \underline{\underline{2}}$

   (f) $\ln\left(\dfrac{1}{\pi}\right) + \ln(\pi) = \ln\left(\dfrac{1}{\pi}\cdot\pi\right) = \ln(1) = \underline{\underline{0}}$

4. Erste Aufgaben zum *zweiten Logarithmengesetz* $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c)$:

   (a) $\log_2(128) - \log_2(32) = \log_2\left(\dfrac{128}{32}\right) = \log_2(4) = \underline{\underline{2}}$

   (b) $\log_5(250) - \log_5(10) = \log_5\left(\dfrac{250}{10}\right) = \log_5(25) = \underline{\underline{2}}$

   (c) $\log_{\frac{1}{8}}(144) - \log_{\frac{1}{8}}(18) = \log_{\frac{1}{8}}\left(\dfrac{144}{18}\right) = \log_{\frac{1}{8}}(8) = \underline{\underline{-1}}$

   (d) $\log(1000) - \log\left(\dfrac{1}{1000}\right) = \log\left(\dfrac{1000}{\frac{1}{1000}}\right) = \log(1\,000\,000) = \underline{\underline{6}}$

   (e) $\log_{\frac{1}{3}}(54) - \log_{\frac{1}{3}}(6) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{54}{6}\right) = \log_{\frac{1}{3}}(9) = \underline{\underline{-2}}$

   (f) $\ln\big(5e^3\big) - \ln\left(\dfrac{5}{\sqrt{e}}\right) = \ln\left(\dfrac{5e^3\cdot\sqrt{e}}{5}\right) = \ln\big(e^3\cdot e^{\frac{1}{2}}\big) = \ln\big(e^{\frac{7}{2}}\big) = \underline{\underline{\dfrac{7}{2}}}$

5. Wir sehen insbesondere die Praktikabilität des 3. Logarithmengesetzes $\log_a\big(b^c\big) = c\log_a(b)$:

   (a) $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \underline{\underline{\log(x) - \log(y)}}$

   (b) $\ln\left(\dfrac{1}{xy}\right) = -\ln(xy) = -\big(\ln(x) + \ln(y)\big) = \underline{\underline{-\ln(x) - \ln(y)}}$

   (c) $\log_2\big(m^7\big) = \underline{\underline{7\log_2(m)}}$

   (d) $\log_3\big(\sqrt[3]{a}\,\big) = \log_3\big(a^{\frac{1}{3}}\big) = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}\log_3(a)}}$

   (e) $\log\big(r^2s^3\big) = \log\big(r^2\big) + \log\big(s^3\big) = \underline{\underline{2\log(r) + 3\log(s)}}$

   (f) $$\begin{aligned}\log_7\left(\frac{12ac^3}{7t^b}\right) &= \log_7(12) + \log_7(a) + \log_7\big(c^3\big) - \log_7(7) - \log_7\big(t^b\big)\\ &= \underline{\underline{\log_7(12) + \log_7(a) + 3\log_7(c) - 1 - b\log_7(t)}}\end{aligned}$$

   (g) $\log_5\left(\sqrt{\dfrac{f}{g}}\right) = \log_5\left(\dfrac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}\right) = \log_5\big(\sqrt{f}\,\big) - \log_5\big(\sqrt{g}\,\big) = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}\log_5(f) - \dfrac{1}{2}\log_5(g)}}$

   (h) $\log_3\left(\dfrac{8\sqrt{2a}}{a^2\sqrt{36}}\right) = \log_3\left(\dfrac{2^3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{2\cdot 3\cdot a^2}\right) = \log_3\left(\dfrac{2^{\frac{5}{2}}}{3a^{\frac{3}{2}}}\right) = \underline{\underline{\dfrac{5}{2}\log_3(2) - 1 - \dfrac{3}{2}\log_3(a)}}$

6. Insbesondere die Basiswechselformel leistet hier sehr gute Dienste:

   (a) $\log_3(4)\cdot\log_4(5)\cdot\log_5(9) = \dfrac{\ln(4)}{\ln(3)}\cdot\dfrac{\ln(5)}{\ln(4)}\cdot\dfrac{\ln(9)}{\ln(5)} = \dfrac{\ln(9)}{\ln(3)} = \log_3(9) = \underline{\underline{2}}$

   (b) $\dfrac{\log_3(13)\cdot\log_5(17)}{\log_3(289)\cdot\log_5(169)} = \dfrac{\log_3(13)\cdot\log_5(17)}{2\log_3(17)\cdot 2\log_5(13)} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\frac{\ln(13)}{\ln(3)}\cdot\frac{\ln(17)}{\ln(5)}}{\frac{\ln(17)}{\ln(3)}\cdot\frac{\ln(13)}{\ln(5)}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$

   (c) $\dfrac{\log_3(125)\cdot\log_2\big(\sqrt[3]{3}\,\big)}{\log_8(5)} = \dfrac{\frac{\ln(125)}{\ln(3)}\cdot\frac{\ln\left(\sqrt[3]{3}\right)}{\ln(2)}}{\frac{\ln(5)}{\ln(8)}} = \dfrac{\frac{3\ln(5)}{\ln(3)}\cdot\frac{\frac{1}{3}\ln(3)}{\ln(2)}}{\frac{\ln(5)}{3\ln(2)}} = \dfrac{\ln(5)}{\ln(3)}\cdot\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}\cdot\dfrac{3\ln(2)}{\ln(5)} = \underline{\underline{3}}$

   (d) $\big(\log_{\sqrt{3}}(5)\big)^2\cdot\log_5(9)\cdot\log_{\sqrt{5}}(3) = \left(\dfrac{\ln(5)}{\ln\big(\sqrt{3}\big)}\right)^2\cdot\dfrac{\ln(9)}{\ln(5)}\cdot\dfrac{\ln(3)}{\ln\big(\sqrt{5}\,\big)} = \dfrac{\big(\ln(5)\big)^2}{\big(\frac{1}{2}\ln(3)\big)^2}\cdot\dfrac{2\ln(3)}{\ln(5)}\cdot\dfrac{\ln(3)}{\frac{1}{2}\ln(5)} = \underline{\underline{16}}$

7. Für die zusammengefassten Ausdrücke ergibt sich:

   (a) $3\log_2(b) + 2\log_2(c) - 4\log_2(d) = \log_2\big(b^3\big) + \log_2\big(c^2\big) - \log_2\big(d^4\big) = \underline{\underline{\log_2\left(\dfrac{b^3c^2}{d^4}\right)}}$

   (b) $\dfrac{1}{4}\log\big(x^3\big) - \dfrac{1}{2}\log(y) + 3\log(z) = \log\big(\sqrt[4]{x^3}\big) - \log\big(\sqrt{y}\,\big) + \log\big(z^3\big) = \underline{\underline{\log\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot z^3}{\sqrt{y}}\right)}}$

   (c) $\ln\big(a^{\frac{1}{4}}\big) + \ln\big(a^{\frac{3}{2}}\big) - \ln\big(\sqrt{a}\,\big) = \ln\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right) = \ln\big(a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\big) = \ln\big(a^{\frac{5}{4}}\big) = \underline{\underline{\ln\big(a\sqrt[4]{a}\big)}}$

   (d) $\dfrac{1}{2}\log_b\big(a^{2n}\big) - (n+2)\log_b(a) = \log_b\big(a^n\big) - \log_b\big(a^{n+2}\big) = \log_b\left(\dfrac{a^n}{a^{n+2}}\right) = \underline{\underline{\log_b\left(\dfrac{1}{a^2}\right)}}$

(e) $\quad -\log_y(x) - \log_y(y) - \log_y(z) = \underline{\underline{\log_y\left(\frac{1}{xyz}\right)}}$

8. (a) Wir stellen fest:

$$\log_2(x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^3 = 8 \qquad \text{und} \qquad \log_2(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^4 = 16$$

Somit werden alle Zahlen im Intervall $\underline{\underline{]8;16[}}$ getroffen (ohne die Ränder).

(b) Wiederum überlegen wir:

$$\log_3(x) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^{-4} = \frac{1}{81} \qquad \text{und} \qquad \log_3(x) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

Folglich handelt es sich um das Intervall $\underline{\underline{]\frac{1}{27};\frac{1}{81}[}}$.

(c) Überlegen wir wieder gleich:

$$\log(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^2 = 100 \qquad \text{und} \qquad \log(x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^3 = 1000$$

Nun geht es allerdings nur um natürliche Zahlen, nicht um reelle. Der Grenzfall $\log(n) = 2$ soll dazugehören, $\log(n) = 3$ hingegen nicht. Somit handelt es sich um die Zahlen von 100 bis 999.
In anderen Worten: $\mathbb{A} := \{n \in \mathbb{N} \,|\, 2 \leq \log(n) < 3\}$ beschreibt die Menge aller dreistelligen (natürlichen) Zahlen

(d) Dem entsprechend muss es sich bei $\mathbb{B} := \{n \in \mathbb{N} \,|\, 5 \leq \log(n) < 6\}$ um die Menge aller sechsstelligen Zahlen.

(e) **Halten wir fest:** Liegt der Zehnerlogarithmus einer natürlichen Zahl zwischen $m-1$ und m, so handelt es sich im Dezimalsystem um eine m-stellige Zahl:

$$\mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, m-1 \leq \log(n) < m\}$$

Dies hilft uns, die Grösse von Zahlen zu verstehen, die wir unmöglich ausschreiben können!
Hier ein Beispiel anhand der vorgegebenen Zahl 5^{5^5}:

$$\log\left(5^{5^5}\right) = \log\left(5^{3125}\right) = 3125 \cdot \log(5) \overset{\text{TR}}{\approx} 2184.28$$

Somit muss 5^{5^5} eine 2185-stellige Zahl sein.