Lösungen Exp&Log 2: Potenz- & Exponentialgleichungen, Logarithmen

Klasse 155c / AGe

1. Wir erhalten die folgenden Lösungen:

(a) $x^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^1 = \underline{\underline{2}}$

(b) $x^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 8^{\frac{1}{2}} = \pm\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\pm 2^{\frac{3}{2}}}}$

(c) $x^4 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 8^{\frac{1}{4}} = \pm\left(2^3\right)^{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\pm 2^{\frac{3}{4}}}}$

(d) $x^4 = \frac{1}{256} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{4}} = \pm\left(\frac{1}{2^{-8}}\right)^{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2^2} = \underline{\underline{\pm\frac{1}{4}}}$

(e) $3x^2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow$ Quadrat muss postiv sein! $\Rightarrow$ <u>keine Lösung!</u>

(f) $12x^3 = -\frac{4}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = -\frac{1}{27} \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{-1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\left((-1)^3\right)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(-1)^1}{3^1} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}} \quad (*)$

(g) $\frac{1}{2}x^{\frac{2}{5}} + 30 = 80 \quad \Leftrightarrow \quad x^{\frac{2}{5}} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 100^{\frac{5}{2}} = \pm\left(10^2\right)^{\frac{5}{2}} = \pm 10^5 = \underline{\underline{\pm 100\,000}}$

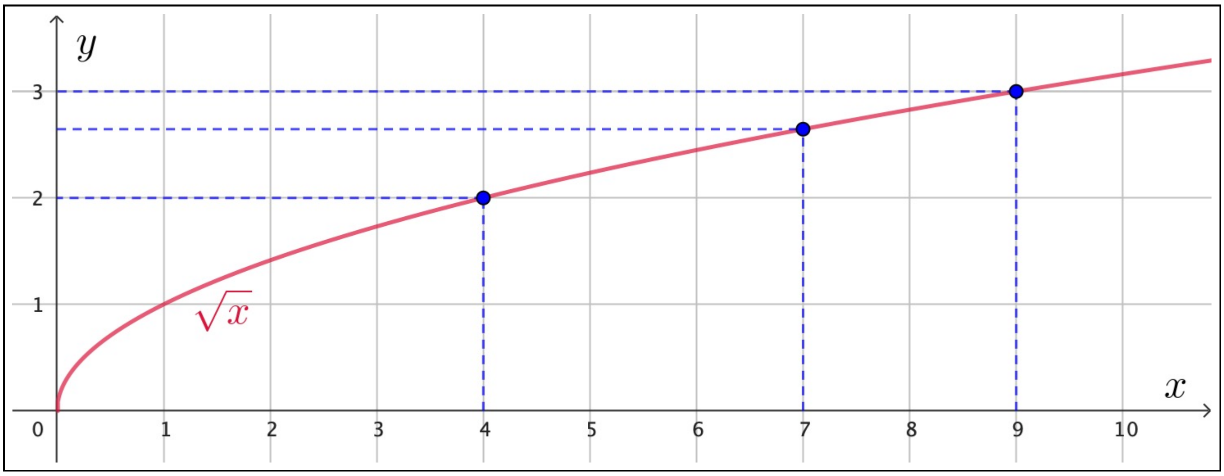
(h) $0.1x^{\frac{3}{4}} - 2.4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^{\frac{3}{4}} = 64 \quad \Leftrightarrow \quad x = 64^{\frac{4}{3}} = \left(4^3\right)^{\frac{4}{3}} = 4^4 = \underline{\underline{256}}$

(i) $-4x^5 + 12 = 6x^5 - 88 \quad \Leftrightarrow \quad x^5 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 10^{\frac{1}{5}}}}$

Anmerkungen

- Bei (f) lässt sich von der negativen Zahl die dritte Wurzel ziehen, weil das Minuszeichen bei einer ungeraden Potenz n gerade als $(-1)^n$ verstanden werden kann.
- Bei (g) gibt es neben der positiven auch eine negative Lösung, weil in $x^{\frac{2}{5}}$ in der ursprünglichen Gleichung die 5-te Wurzel gezogen und dann quadriert wird oder umgekehrt. D.h., egal, ob wir $(-100\,000)^{\frac{5}{2}}$ als $\sqrt[5]{(-100\,000^2)}$ oder als $\left(\sqrt[5]{-100\,000}\right)^2$ auffassen, es ergibt sich dafür der Wert 100, der die ursprüngliche Gleichung löst.
- Genau dies geht bei (h) nicht mehr, denn dort müsste von -256 oder von $(-256)^3$ die 4-te Wurzel gezogen werden.

2. $\sqrt{7}$ liegt zwischen 2 und 3, weil $\sqrt{4} = 2$ und $\sqrt{9} = 3$ ist. Aber liegt die Zahl näher bei 2 oder näher bie 3? Mit dem Graphen der Wurzelfunktion verstehen wir, was stimmt:

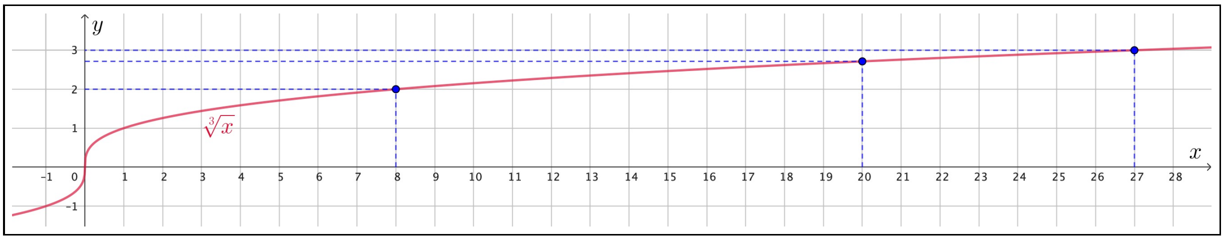


Der Graph der Wurzelfunktion muss ständig abflachen, weil zwischen den Quadratzahlen (auf der x-Achse) immer mehr Platz liegt: Zwischen 1 und 4, deren Wurzeln 1 und 2 den Abstand 1 aufweisen, liegen 3 Einheiten, während zwischen 4 und 9, deren Wurzeln 2 und 3 sich ebenfalls um 1 unterscheiden, bereits der Abstand 5 liegt.

Das bedeutet, der Graph der Wurzelfunktion ist rechtsgekrümmt. Das gilt auch zwischen den Stellen $x = 4$ und $x = 9$, wo man schon fast meinen könnte, dass es sich um eine Gerade handelt. Der Punkt $(7, \sqrt{7})$ liegt wegen dieser Rechtskrümmung sicher oberhalb der direkten Verbindungslinie zwischen $(4, 2)$ und $(9, 3)$ und somit befindet sich $\sqrt{7}$ ganz sicher näher bei 3 als bei 2.

Wir könnten z.B. auf 2.7 tippen. Der TR liefert als Näherungswert: $\sqrt{7} \approx 2.646$.

$20^{\frac{1}{3}}$ steht für die dritte Wurzel von 20. Auch diese Zahl muss zwischen 2 und 3 liegen. Das Aussehen der dritten Wurzelfunktion flacht schneller ab und sieht somit noch rascher wie eine Gerade aus:



Auch hier können wir sagen: $\sqrt[3]{20}$ liegt näher bei 3 als bei 2, weil 20 näher bei 27 liegt als bei 8 und die Rechtskrümmung diese Aussage sogar noch ein wenig verstärkt.

$(\sqrt{5})^3$ ergibt sich aus der Kube von $\sqrt{5}$. Letztere liegt sicher zwischen 2 und 2.5, denn $2^2 = 4$ und $2.5^2 = 6.25$ (vgl. $25^2 = 625$). Mit der vorigen Erfahrung können wir vermuten, dass $\sqrt{5}$ gerade so etwa bei 2.25 liegt. Die Kube davon liegt zwischen 8 und 27, wobei wir innerhalb dieser Spanne weniger als einen Viertel aufwärts gehen sollten. Damit landen wir im Bereich von vielleicht 11 bis 13. Der TR liefert als Näherungswert: $(\sqrt{5})^3 \approx 11.180$. Dass dieser Wert eher tief in unserem erwarteten Bereich liegt, rührt vom etwas tieferen Zwischenresultat $\sqrt{5} \approx 2.236$ her.

$60^{-\frac{2}{3}}$ ist ja fast $64^{-\frac{2}{3}}$. Darin ist $60^{\frac{1}{3}}$ fast so gross wie $64^{\frac{1}{3}} = 4$; also: $60^{-\frac{2}{3}} \approx 4^{-2} = \frac{1}{16} = 0.0625$, wobei der tatsächlich Wert von $60^{-\frac{2}{3}}$ nun etwas grösser sein muss, weil wir ja durch etwas weniger als 4^2 teilen. Man könnte also auf etwa 0.063 tippen. Der TR liefert uns "sogar" $60^{-\frac{2}{3}} \approx 0.0652$. Trotzdem dürfen wir mit unserer Schätzung dürfen sehr zufrieden sein.

$(\frac{1}{30})^{\frac{4}{3}}$ muss zunächst etwas ergeben, was ein wenig kleiner ist als $\frac{1}{30}$, weil $\frac{4}{3} > 1$ ist. $(\frac{1}{30})^{\frac{1}{3}}$ ist ein wenig kleiner als $\frac{1}{3}$, weil $(\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ ist. Nun ist $(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$. Da wir doch hoch 4 rechnen, macht der kleine Unterschied in der Basis vermutlich doch ein bisschen mehr aus, sodass eine vernünftige Schätzung gerade etwa $(\frac{1}{30})^{\frac{4}{3}} \approx \frac{1}{100} = 0.01$ sein könnte. Der TR liefert einen genaueren Wert von 0.0107.

3. Mittels Exponentenvergleich erhalten wir:

(a) $3^x = 81 \quad\Leftrightarrow\quad 3^x = 3^4 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = 4}}$ (b) $4^x = \dfrac{1}{64} \quad\Leftrightarrow\quad 4^x = 4^{-3} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = -3}}$

(c) $8^x = 16 \quad\Leftrightarrow\quad (2^3)^x = 2^4 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{3x} = 2^4 \quad\Leftrightarrow\quad 3x = 4 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = \dfrac{4}{3}}}$

(d) $3^x = -9 \quad\Leftrightarrow\quad 3^x = -3^2 \quad\Rightarrow\quad 3^x$ kann keine negative Zahl sein $\quad\Rightarrow\quad$ $\underline{\underline{\text{keine Lösung!}}}$

(e) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x = \sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad (2^{-2})^x = 2^{\frac{1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad 2^{-2x} = 2^{\frac{1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad -2x = \dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = -\dfrac{1}{4}}}$

(f) $3^{\frac{x}{3}+2} = \sqrt[3]{81} \quad\Leftrightarrow\quad 3^{\frac{x}{3}+2} = (3^4)^{\frac{1}{3}} \quad\Leftrightarrow\quad 3^{\frac{x}{3}+2} = 3^{\frac{4}{3}} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{4}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = -2}}$

(g) $2^{4x-7} = \dfrac{1}{16} \quad\Leftrightarrow\quad 2^{4x-7} = 2^{-4} \quad\Leftrightarrow\quad 4x - 7 = -4 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = \dfrac{3}{4}}}$

(h) $9^{3x+2}=\dfrac{1}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \left(3^2\right)^{3x+2}=3^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad 3^{2(3x+2)}=3^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad 2(3x+2)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\dfrac{5}{6}}}$

(i) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\frac{3}{5}x-2}=\dfrac{1}{\sqrt{125}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(5^{-2}\right)^{\frac{3}{5}x-2}=5^{-\frac{3}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad -2\left(\dfrac{3}{5}x-2\right)=-\dfrac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\dfrac{55}{12}}}$

4. Es ergeben sich die folgenden Logarithmen und Werte:

(a) $3^x=7 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\log_3(7)}}$ (b) $(3c)^x=2d \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\log_{3c}(2d)}}$

(c) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^x=\dfrac{7}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\log_{2/7}\left(\dfrac{7}{3}\right)}}$ (d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=\sqrt{6} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\log_{1/5}\left(\sqrt{6}\right)}}$

(e) $6^{2x}=20 \quad\Leftrightarrow\quad \left(6^2\right)^x=20 \quad\Leftrightarrow\quad 36^x=20 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\log_{36}(20)}}$

5. Notiere die zum Logarithmus gehörende Exponentialgleichung und gib wenn möglich seinen Wert an:

(a) $x=\log_3(27) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{3^x=27}} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=3}}$

(b) $x=\log_4(8) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{4^x=8}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(2^2\right)^x=2^3 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{2x}=2^3 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\dfrac{3}{2}}}$

(c) $x=\log_2\left(\dfrac{1}{64}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{2^x=\dfrac{1}{64}}} \quad\Leftrightarrow\quad 2^x=2^{-6} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-6}}$

(d) $x=\log_4(13) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{4^x=13}} \quad\Rightarrow$ Kein anderer exakter Wert angebbar

(e) $x=\log_{125}(25) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{125^x=25}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(5^3\right)^x=5^2 \quad\Leftrightarrow\quad 5^{3x}=5^2 \quad\Leftrightarrow\quad 3x=2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\dfrac{2}{3}}}$

(f) $x=\log_{128}(32) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{128^x=32}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(2^7\right)^x=2^5 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{7x}=2^5 \quad\Leftrightarrow\quad 7x=5 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\dfrac{5}{7}}}$

(g) $x=\log_\pi(2) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\pi^x=2}} \quad\Rightarrow$ Kein anderer exakter Wert angebbar

(h) $x=\log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{81}{16}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{81}{16}}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-4}}$

(i) $x=\log_{25}\left(125^{38}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{25^x=125^{38}}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(5^2\right)^x=\left(5^3\right)^{38} \quad\Leftrightarrow\quad 5^{2x}=5^{114} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=57}}$

(j) $x=\log_{\frac{25}{9}}\left(\dfrac{125}{27}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\dfrac{25}{9}^x=\dfrac{125}{27}}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\dfrac{5}{3}\right)^{2x}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\dfrac{3}{2}}}$

(k) $x=\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1000}}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{10^x=\dfrac{1}{\sqrt{1000}}}} \quad\Leftrightarrow\quad 10^x=10^{-\frac{3}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\dfrac{3}{2}}}$

(l) $x=\log_{\frac{81}{16}}\left(\dfrac{8}{27}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\left(\dfrac{81}{16}\right)^x=\dfrac{8}{27}}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^{4x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\dfrac{3}{4}}}$

6. (a) a und b müssen in aller Regel positive reelle Zahlen sein (mit $a\neq 1$) damit $\log_a(b)$ sinnvoll definiert ist. Nur für solche Zahlen hat die zugehörige Exponentialgleichung $a^x=b$ eine Lösung, die dann aber eindeutig ist, eben $\log_a(b)$.

(b) Es muss $b=1$ sein. Der Wert von a spielt keine Rolle. Das verstehen wir sofort aus der zugehörigen Exponentialgleichung: $a^x=1$. Egal, welchen Wert die Basis a aufweist, a^x ist genau dann gleich 1, wenn $x=0$ ist.

(c) Tatsächlich kann $\log_2(b)$ jede beliebige reelle Zahl als Wert annehmen, denn in 2^x ergeben alle Exponenten $x\in\mathbb{R}$ eine sinnvolle Angabe zwischen 0 und $+\infty$.
Bsp.: $2^{-1000}=\frac{1}{2^{1000}}\approx 0$, $2^{-1}=\frac{1}{2}$, $2^0=1$, $2^1=2$, $2^{10}=1024$, etc.
Effektiv gilt diese Aussage für alle positiven reellen Basen ausser $a=1$.