Lösungen Exp&Log 1: Potenzschreibweise für Wurzeln

Klasse 155c / AGe

1. *Kurzrepetition zu den Potenzgesetzen*

   (a) $2^{-4} \cdot 5^{-4} = 10^{-4} = \underline{\underline{\frac{1}{10\,000}}}$ (b) $3^{-9} \cdot 3^{7} = 3^{-9+7} = 3^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$

   (c) $\left(2^{3}\right)^{-3} = 2^{3\cdot(-3)} = 2^{-9} = \underline{\underline{\frac{1}{512}}}$ (d) $0.25^{5} \cdot 4^{5} = (0.25 \cdot 4)^{5} = 1^{5} = \underline{\underline{1}}$

   (e) $10^{4} : 5^{4} = (10 : 5)^{4} = 2^{4} = \underline{\underline{16}}$ (f) $\left(3^{-2}\right)^{-2} = 3^{(-2)\cdot(-2)} = 3^{4} = \underline{\underline{81}}$

   (g) $(-4)^{-2} : (-4)^{-3} = (-4)^{-2-(-3)} = (-4)^{1} = \underline{\underline{-4}}$

   (h) $6^{4} \cdot 9^{-2} = (2 \cdot 3)^{4} \cdot \left(3^{2}\right)^{-2} = 2^{4} \cdot 3^{4} \cdot 3^{-4} = 2^{4} \cdot 3^{0} = 16 \cdot 1 = \underline{\underline{16}}$ (i) $\frac{a^{3}b^{5}}{ab^{6}} = \underline{\underline{\frac{a^{2}}{b}}}$

   (j) $a \cdot a^{-1} = a^{1+(-1)} = a^{0} = \underline{\underline{1}}$ (k) $\frac{r}{r^{-5}} = r \cdot r^{5} = \underline{\underline{r^{6}}}$ (l) $\frac{5a^{9}b^{-3}}{10a^{-1}b^{5}} = \underline{\underline{\frac{a^{8}}{2b^{8}}}}$

   (m) $\left(2a^{3}b^{-2}\right)^{-3} = 2^{-3}a^{-9}b^{6} = \underline{\underline{\frac{b^{6}}{8a^{9}}}}$ (n) $a^{-2} \cdot a^{x+2} = a^{-2+x+2} = \underline{\underline{a^{x}}}$

   (o) $2^{x+3} \cdot 2^{2x-1} = 2^{x+3+2x-1} = \underline{\underline{2^{3x+2}}}$

   (p) $3^{-2x+1} \cdot 9^{x-1} = 3^{-2x+1} \cdot \left(3^{2}\right)^{x-1} = 3^{-2x+1} \cdot 3^{2x-2} = 3^{-2x+1+2x-2} = 3^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

2. Reminder: Es sollen stets Potenzen *mit möglichst kleiner Basis* sein!

   (a) $\sqrt[4]{13} = \underline{\underline{13^{\frac{1}{4}}}}$

   (b) $\sqrt[3]{8^{2}} = 8^{\frac{2}{3}} = \left(2^{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = \underline{\underline{2^{2}}}$ oder $\sqrt[3]{8^{2}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{2} = \underline{\underline{2^{2}}}$

   (c) $\sqrt[4]{\frac{1}{2^{12}}} = \left(2^{-12}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{-12\cdot\frac{1}{4}} = \underline{\underline{2^{-3}}}$ oder $\sqrt[4]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{12}}} = \frac{1}{2^{3}} = \underline{\underline{2^{-3}}}$

   (d) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{9} = 4^{\frac{9}{3}} = 4^{3} = \left(2^{2}\right)^{3} = \underline{\underline{2^{6}}}$ (e) $\left(\sqrt{81}\right)^{3} = 81^{\frac{3}{2}} = \left(3^{4}\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{4\cdot 3}{2}} = \underline{\underline{3^{6}}}$

3. Für die Ausdrücke erhalten wir:

   (a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$ (b) $625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = \underline{\underline{5}}$ (c) $1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = \underline{\underline{10}}$

   (d) $4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^{3} = 2^{3} = \underline{\underline{8}}$ (e) $36^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{36}^{\,3}} = \frac{1}{6^{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{216}}}$

   (f) $125^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^{2} = 5^{2} = \underline{\underline{25}}$ (g) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{64})^{5}} = \frac{1}{4^{5}} = \underline{\underline{\frac{1}{1024}}}$

   (h) $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{81})^{3}} = \frac{1}{3^{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$

   (i) $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{36}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{36}{25}}\right)^{3} = \left(\frac{6}{5}\right)^{3} = \underline{\underline{\frac{216}{125}}}$

   (j) $\left(\frac{81}{1024}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1024}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{2^{10}}{3^{4}}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{2^{10\cdot\frac{3}{4}}}{3^{4\cdot\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^{3}} = \frac{2^{7+\frac{1}{2}}}{27} = \underline{\underline{\frac{128\sqrt{2}}{27}}}$

4. *Rechenregeln für Wurzeln:*

$$\text{I.}\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \text{II.}\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a} \qquad \text{III.}\quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

(a) Zur Wurzelregel I. der Aufgabenstellung gehört die Potenzregel iv. (Brüche von Potenzen mit gleichem Exponenten):

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\overset{\text{iv.}}{=}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Zur Wurzelregel II. der Aufgabenstellung gehört die Potenzregel v. (Potenzen von Potenzen):

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\overset{\text{v.}}{=}a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

Zur Wurzelregel III. der Aufgabenstellung gehört die Potenzregel iii. (Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten):

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}\overset{\text{iii.}}{=}(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

(b) Es fehlen die Potenzregeln i. und ii. (Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis). Im Prinzip lassen sich damit ebenfalls Rechenregeln für Wurzeln aufstellen. Diese sehen wie folgt aus:

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{m}}\cdot a^{\frac{1}{n}}\overset{\text{i.}}{=}a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=a^{\frac{n+m}{m\cdot n}}=\sqrt[\frac{m\cdot n}{m+n}]{a}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}}=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}}\overset{\text{ii.}}{=}a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=a^{\frac{n-m}{m\cdot n}}=\sqrt[\frac{m\cdot n}{n-m}]{a}$$

Es gibt also diese Wurzelregeln, sie sind aber irgendwie sehr unpraktisch, einfach weil die Addition und die Subtraktion der Brüche in den Exponenten sehr unübersichtliche Resultate liefern.

5. Wir erhalten:

(a) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}=\sqrt[3]{12\cdot 18}=\sqrt[3]{2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 3^2}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=2\cdot 3=\underline{\underline{6}}$

(b) $\sqrt[6]{9}:\sqrt[6]{81}=\sqrt[6]{\frac{9}{81}}=\sqrt[6]{\frac{1}{9}}=\frac{1}{(3^2)^{\frac{1}{6}}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}}$

(c) $\frac{2^{\frac{1}{5}}}{64^{\frac{1}{5}}}=\left(\frac{2}{64}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(d) $25^{\frac{3}{8}}\cdot 25^{\frac{5}{8}}=25^{\frac{3}{8}+\frac{5}{8}}=25^1=\underline{\underline{25}}$

(e) $\frac{8^{-\frac{2}{3}}}{64^{-\frac{1}{2}}}=8^{-\frac{2}{3}}\cdot 64^{\frac{1}{2}}=8^{-\frac{2}{3}}\cdot 8=8^{-\frac{2}{3}+1}=8^{\frac{1}{3}}=\underline{\underline{\sqrt[3]{8}}}$

(f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}=\left(\left(2^6\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}$

6. Es ergeben sich die folgenden Resultate:

(a) $4^{0.5}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=\underline{\underline{2}}$ (b) $32^{0.2}=32^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{32}=\underline{\underline{2}}$ (c) $81^{0.25}=81^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=\underline{\underline{3}}$

(d) $256^{0.125}=256^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{256}=\underline{\underline{2}}$ (e) $1024^{0.7}=1024^{\frac{7}{10}}=\left(\sqrt[10]{1024}\right)^7=2^7=\underline{\underline{128}}$

7. (a) Es gibt kein ganz einfaches Gesetz für die Multiplikation zweier unterschiedlicher Wurzeln derselben Zahl a (vgl. Aufgabe 4). Vielmehr finden wir:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{4+3}{12}} = a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7} \neq \sqrt[12]{a}$$

(b) Hier ging irgendwie die Ausführung der dritten Wurzel verloren. Effektiv ergibt sich:

$$\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^5}{a^2}} = \sqrt[3]{a^3} = a \neq a^3$$

(c) Bei Wurzeln von Summen sind nicht gleich der Summe der Wurzeln der einzelnen Summanden! Das können wir an diesem Beispiel gut nachvollziehen:

$$\sqrt[3]{64+27} = \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt{3} \approx 5.2 \neq 7$$

8. Vereinfache die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der Potenz- oder Wurzelregeln:

(a) $\sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt[10]{x^2} = x^{\frac{4}{5}+\frac{2}{10}} = x^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = x^1 = \underline{\underline{x}}$

(b) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} = a^{\frac{4+1}{6}} = a^{\frac{5}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{a^5}}}$

(c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5-4}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{a}}}$

(d) $\left(\sqrt[5]{b^2}\right)^{10} = b^{2\cdot\frac{1}{5}\cdot 10} = \underline{\underline{b^4}}$

(e) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{x^3}} = x^{3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{8}} = \underline{\underline{\sqrt[8]{x}}}$

(f) $\sqrt[4]{(a^2)^{-1}} = a^{2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt{a}}}}$