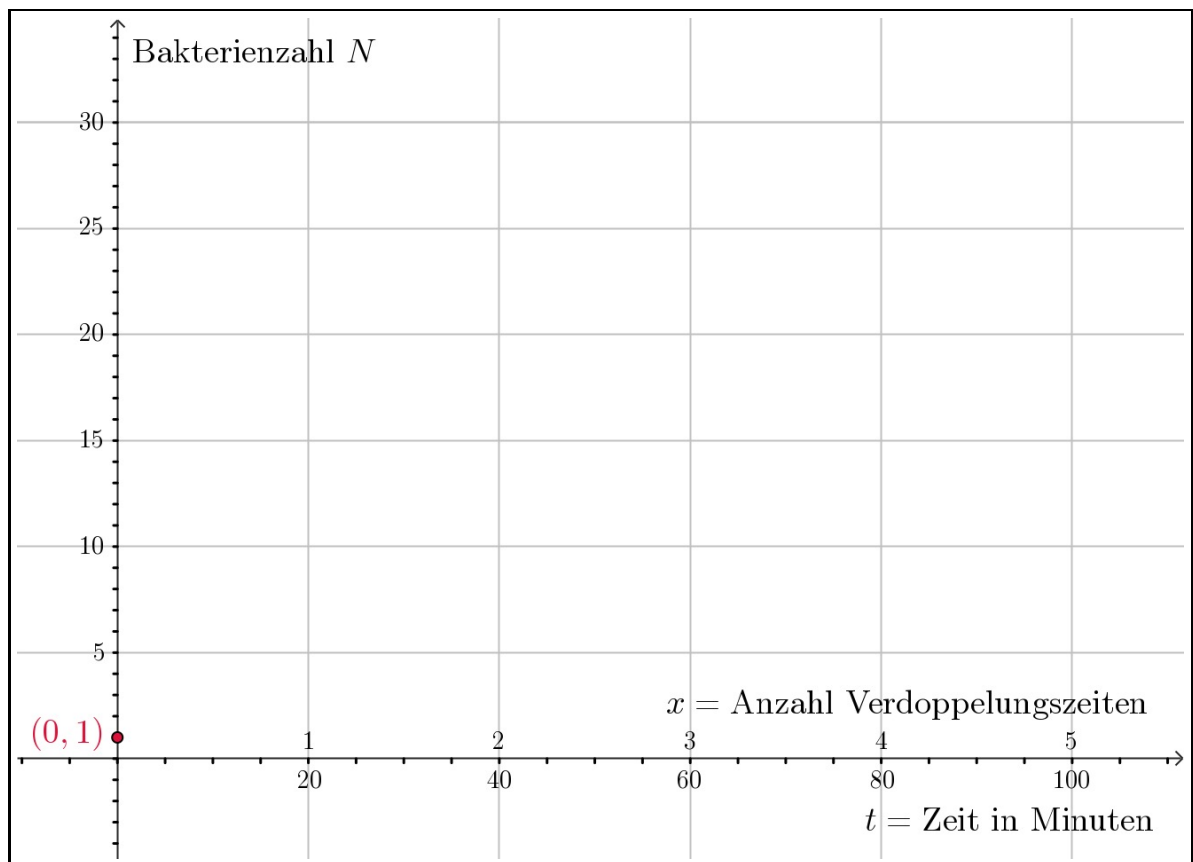


Einführungsbeispiel: In einer *Bakterienkultur* beträgt die **Verdoppelungszeit** 20 Minuten. Zu Beginn sei nur 1 Bakterium vorhanden.

Wie gross ist die Bakterienzahl N ...

1. nach 20 Minuten, 40 Minuten, 1 Stunde?
2. allgemein nach x Verdoppelungszeiten? Funktion $N(x) = \dots$?
3. nach 90 Minuten, nach 157 Minuten?
4. allgemein nach der Zeit t ? Funktion $N(t) = \dots$?
5. Skizziere den Graphen von $N(x)$ resp. von $N(t)$ im folgenden Diagramm.
6. Was würde sich an $N(x)$ resp. $N(t)$ ändern, wenn wir zu Beginn mit $N_0 = 1000$ starten würden?



Rekapitulation

- Der Wert der **Exponentialfunktion**

$$f(x) = f_0 \cdot a^{\frac{x}{X_a}} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \text{und } X_a \in \mathbb{R}^+$$

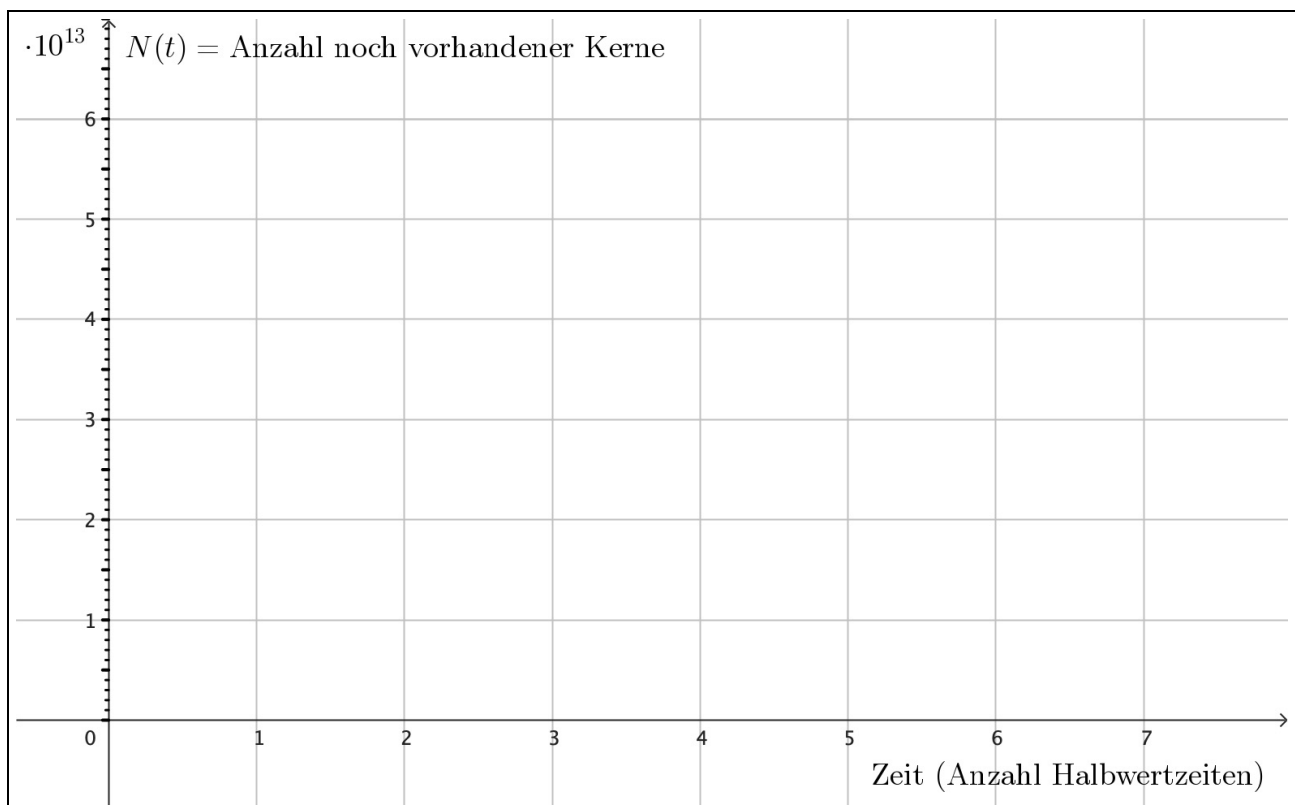
wird pro *Schritt* X_a auf der x -Achse genau einmal mit dem *Faktor* a multipliziert. Dabei ist f_0 der Funktionswert bei $x = 0$, also der *Start-* oder *Anfangswert*.

- In der Mathematik betrachten wir oft den Fall $X_a = 1$, sodass die Exponentialfunktion in der Form

$$f(x) = f_0 \cdot a^x$$

notiert werden kann. Nun ist a der Faktor, mit dem der Funktionswert pro horizontaler Einheit 1 einmal multipliziert wird.

- In nahezu allen “realen” Anwendungen von Exponentialfunktionen empfiehlt es sich hingegen, den Bruch $\frac{x}{X_a}$ im Exponenten stets zu notieren. So weiss man immer, auf welchen Schritt X_a sich der Faktor a eben bezieht.



Beispiel: Zerfallsgesetz bei radioaktiven Zerfällen

Ein *Kohlenstoff*-Atomkern beinhaltet stets 6 *Protonen* – sonst wäre es kein Kohlenstoff. Er kann aber unterschiedlich viele *Neutronen* enthalten. Unter allen Kohlenstoffatomen kommt in der Natur das *Isotop* C–12 am häufigsten vor. Sein Kern besteht aus 6 Protonen und 6 Neutronen und ist *stabil*. Das bedeutet, er bleibt von sich aus auf unendlich lange Zeit so bestehen.

Anders sieht das beim Kern des C–14–Isotops aus, wo der Kern 8 Neutronen enthält. Dieser Kern ist sogenannte *radioaktiv*, also instabil, und wird sich von alleine irgendwann umwandeln. Diese Umwandlung wird als *radioaktiver Zerfall* bezeichnet, denn dabei wird hochenergetische Strahlung freigesetzt (engl. *radiation* = Strahlung). Nach diesem Zerfall ist der C–14-Kern zum stabilen *Stickstoff*-Kern N–14 geworden.

Wir können nicht voraussagen, wann genau sich ein jetzt vorhandener C–14-Kern umwandelt. Vielmehr gibt es dafür lediglich eine Wahrscheinlichkeitsangabe: Pro 5730 Jahre besteht eine Wahrscheinlichkeit von 50 %, dass der Kern radioaktiv zerfällt. Bei einer grösseren Anzahl von C–14-Atomen wird aus dieser Wahrscheinlichkeit für den einzelnen Kern eine statistische Aussage für die Gesamtmenge: Nach 5730 Jahren werden nur noch 50 % aller anfänglichen C–14-Kerne vorhanden sein. Nach weiteren 5730 Jahren sind dann nur noch 25 % der Anfangsmenge übrig, etc.

Diese Statistik wird folglich durch die Exponentialfunktion

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

beschrieben, die unter dem Namen **Zerfallsgesetz** bekannt ist. Ist zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anzahl N_0 radioaktiver Kerne vorhanden, so sind davon zum Zeitpunkt t noch $N(t)$ Kerne übrig. Pro Halbierungs- oder *Halbwertszeit* $T_{1/2}$ wird die Menge der noch vorhandenen Kerne genau einmal halbiert, also mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert.

Fragestellungen

1. Notiere das Zerfallsgesetz für C–14 bei anfänglichen $N_0 = 6.4 \cdot 10^{13}$ radioaktiven Kernen.
2. Wie viele Kerne sind nach genau 100 000 Jahren noch vorhanden?
3. Skizziere den Verlauf der noch vorhandenen Kerne von $t = 0$ bis $t = 5T_{1/2}$.
4. Nach welcher Zeit sind nur noch $2 \cdot 10^{12}$ C–14-Kerne übrig?
5. *Schätze* (!), nach welcher Zeit nur noch 2 % von N_0 vorhanden sind.
6. Berechne das Resultat von (e) mit dem TR.
7. Wie hängt das Resultat von (e) vom Anfangswert N_0 ab?

Bisher: Pro Horizontalschritt X_a verändert wird der Wert der Exponentialfunktion

$$f(x) = f_0 \cdot a^{\frac{x}{X_a}}$$

genau einmal mit dem Faktor a multipliziert.

Fragen: *Woher kommt dieses Veränderungsverhalten im konkreten Anwendungsfall?
Oder anders: Weshalb treten Exponentialfunktionen so häufig in Erscheinung
und sind nichts Ungewöhnliches?*

Beispiel: Anna und Bruno finden auf der Strasse eine 100-Franken-Note. Er zu ihr: "Wenn wir dieses Geld auf ein Jugendsparkonto mit einem Jahreszins von 2 % legen, so haben wir nach einem Jahr 102 Franken." Sie zu ihm: "Ja, und nach zwei Jahren wären es dann 104 Franken und 4 Rappen." Da runzelt Bruno die Stirn: "Wie kommst du denn da drauf?"

Nochmals in Worten: Bei einer *Verzinsungsperiode* von $T_a = T_p = 1$ Jahr bezieht sich der *Zinssatz* p auf den zu Jahresbeginn vorhandenen *Kontostand* K_0 . Der *Zins* $z_1 = p \cdot K_0$ wird Ende des Jahres zum Kontostand addiert:

$$K_1 = K_0 + z_1 = K_0 + p \cdot K_0$$

Das bedeutet aber, dass zu Beginn des zweiten Jahres ein grösserer Kontostand K_1 als zu Beginn des ersten Jahres vorhanden ist. Somit wird im zweiten Jahr auch der Zins z_1 grösser sein als im ersten Jahr, nämlich

$$z_2 = p \cdot K_1 = p \cdot (K_0 + z_1) = p \cdot K_0 + p \cdot z_1 = p \cdot K_0 + p^2 \cdot K_0 \quad .$$

Der Zins des ersten Jahres wirft im zweiten Jahr selber den zusätzlichen Zins $p \cdot z_1 = p^2 \cdot K_0$ ab, sodass wir vom *Zinseszins* sprechen.

Wir halten ganz bewusst fest: Die Veränderung ΔK unseres Funktionswertes K – also der Zins z – ist proportional zum Funktionswert K zu Beginn des betrachteten Schrittes. Kurz und allgemein:

$$\Delta K \sim K \quad \text{resp.} \quad \Delta f \sim f$$

Wir haben gezeigt, dass genau diese Aussage mathematisch auf eine Exponentialfunktion führt! Exponentialfunktionen sind also genau diejenigen Funktion, bei denen die *Veränderung des Funktionswertes pro Schritt proportional zum Funktionswert* selber ist. Ein grosser Funktionswert führt zu einer grossen Veränderung, ein kleiner Funktionswert zu einer kleinen Veränderung. Der Proportionalitätsfaktor – im obigen Beispiel der Prozentsatz p – übernimmt die Rolle der *Proportionalitätskonstanten*:

$$\Delta f = p \cdot f$$

11. Unendliche Verkürzung der Zinsperioden

Überlegung: Anna und Bruno unterhalten sich weiter. Bruno: "Wie wäre es, wenn wir für unsere 100 Franken eine Bank finden, die nicht jährlich, sondern z.B. halbjährlich verzinst, einfach mit dem halben Zinssatz – also anstatt 2 % aufs Jahr nur 1 %, aber dafür pro Halbjahr?" Anna: "Aus dem Bauch heraus würde ich sagen, dass das doch aufs Gleiche rauskommt. . ."

Frage: Annas Bauchgefühl ist leider falsch. Tatsächlich wäre diese halbjährliche Verzinsung vorteilhafter. Weshalb? Hast du eine schlagwortartige Antwort, die du auch rechnerisch begründen kannst?!

Folgerung: Offensichtlich ergibt die Verzinsung mit einer kürzeren Zeitspanne den grösseren Ertrag! Wenn wir auf das Jahr hochrechnen resultiert ein höherer Kontostand, also ein höherer Jahreszins als die ursprünglichen 2 %.

Frage: Wie sieht es aus, wenn wir die Zinsperioden weiter verkürzen? Berechne den neuen Jahreszins bei vierteljährlicher, monatlicher, 1-wöchiger (1 Jahr = 52 Wochen) und 1-tägiger (1 Jahr = 365 Tage) Zinsperiode.

Feststellung: Bei Verkürzung der Zinsperiode wird der neue Jahreszins immer grösser.

Und weiter: Betrachten wir nun zur weiteren Analyse eine formal identische, aber von den Zahlen her etwas fassbarere Vorgabe: Die “Wahnsinns-Bank” gibt ganze 100 % Jahreszins. Ohne Verkürzung der Zinsperiode würde also Ende Jahr der Kontostand verdoppelt.

Jetzt soll das Jahr aber in n gleich lange Zinsperioden aufgeteilt werden, sodass der Zinssatz pro Periode $\frac{100\%}{n}$, also $\frac{1}{n}$ beträgt. Notiere unter diesen Voraussetzungen...

- den Vergrößerungsfaktor a_n pro Zinsperiode: $a_n =$
- den neuen Vergrößerungsfaktor A_n pro Jahr: $A_n =$

Frage: Liesse sich auf diese Weise der Jahreszins ins Unendliche steigern? Anders gefragt: Wächst der jährliche Vergrößerungsfaktor A_n ins Unendliche an, wenn wir das Jahr in immer feinere Zinsperioden unterteilen, also n immer grösser werden lassen?

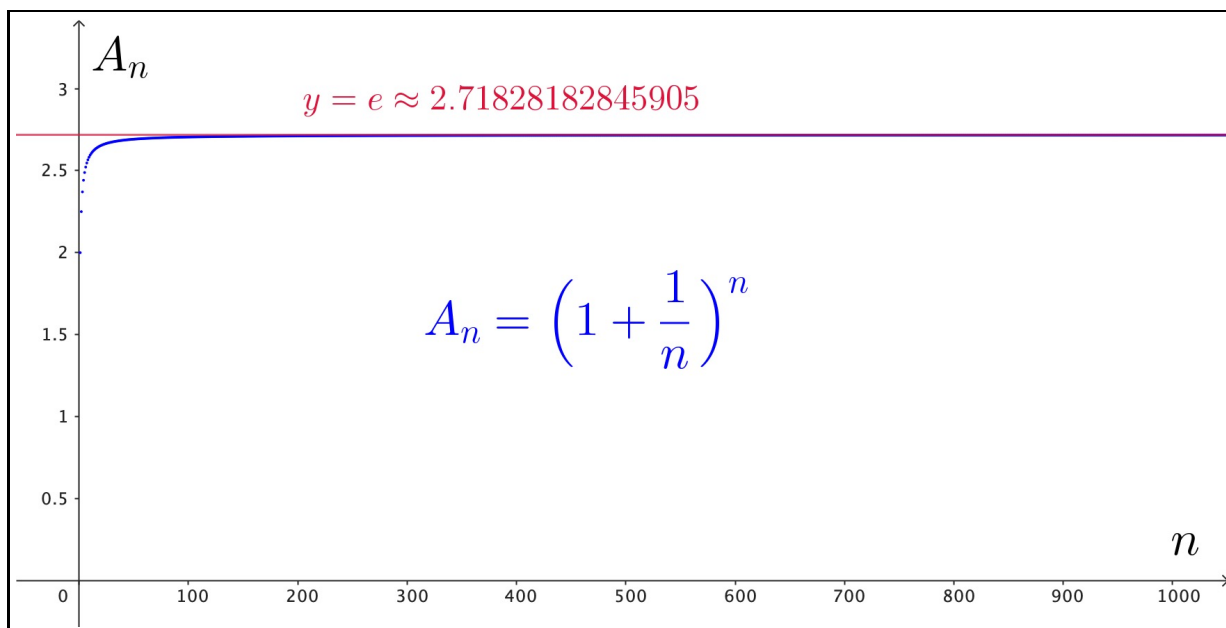
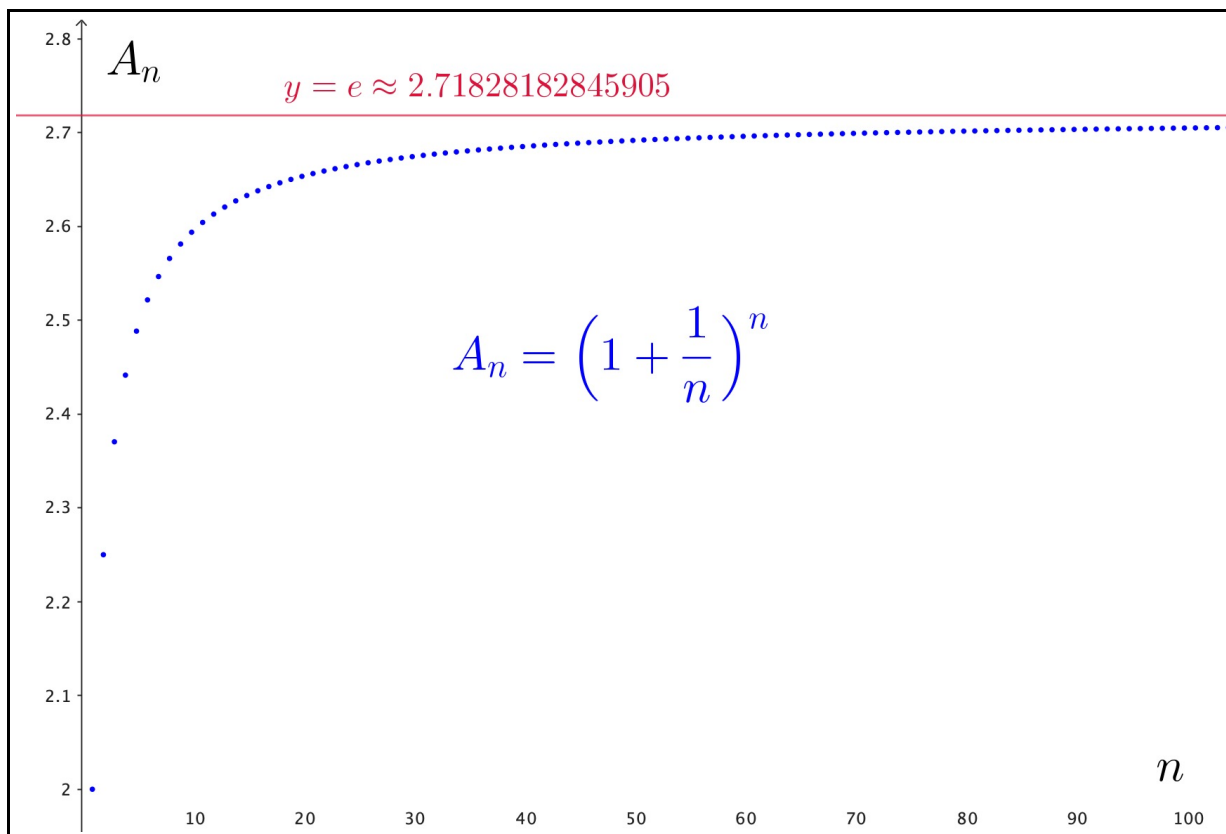
Interessante Gedankenspiele: Das ist eine anspruchsvolle mathematische Fragestellung, wie uns Anna und Bruno anhand ihrer Überlegungen vor Augen führen:

- Bruno: “Ja, A^n wächst ins Unendliche, denn die Basis $(1 + \frac{1}{n})$ ist eine Zahl, die grösser ist als 1, und sie wird mit dem Exponenten n potenziert, der immer grösser wird.”
- Anna: “Nein, A^n wächst nicht ins Unendliche, sondern wird im Gegenteil irgendwann wieder gegen den Wert 1 streben, denn die Basis $(1 + \frac{1}{n})$ geht gegen 1, wenn n immer grösser wird – und 1^n ist gleich 1, egal wie gross der Exponent n wird.”

Irgendwie haben beide recht, aber mit unserer bisherigen Erfahrung lässt sich kaum beurteilen, wer “mehr recht” hat. Wir können aber ausprobieren...

Komplettiere dazu die folgende Tabelle:

Unterteilung n	1	2	5	10	100	1000	10 000	100 000
Faktor $A^n = (1 + \frac{1}{n})^n$								



Auswertung: Für $n = 1000\,000$ finden wir weiter: $A_{1000\,000} \approx 2.718280496$. Das erinnert uns schwer an die *Euler'sche Zahl* e :

$$e \approx 2.718281828459 \dots$$

Tatsächlich haben wir hier eine mögliche *Definition* dieser Euler'schen Zahl vor Augen:

Definition: Die **Euler'sche Zahl** e ist die (irrationale) Zahl, der sich die durch

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gegebene Zahlenfolge $A_1, A_2, A_3, \dots$ für immer grösser werdendes n beliebig genau annähert. Wir sagen: " e ist der *Grenzwert* oder *Limes*, gegen den $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ strebt, wenn der Index n gegen unendlich geht." Kurz:

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ steht für die *Grenzwert-* oder *Limesbildung* des von der Index n abhängigen Ausdrucks A_n . Im gezeigten Fall soll n gegen unendlich gehen.

Wir werden uns später genauer mit derartigen Limesbildungen auseinandersetzen und dann in einigen Fällen auch beantworten können, wann der Grenzwert überhaupt existiert. Momentan mag es verwundern, dass die Euler'sche Zahl e als Grenzwert einer solchen Zahlenfolge definiert werden kann. In der höheren Mathematik ist ein solches Vorgehen aber alltäglich. Trotzdem ist es bemerkenswert, dass die durch $A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gegebene Folge ihrem Grenzwert e beliebig nahe kommt, diesen aber niemals erreicht, und dass dadurch die Zahl e dennoch eindeutig festgelegt wird.

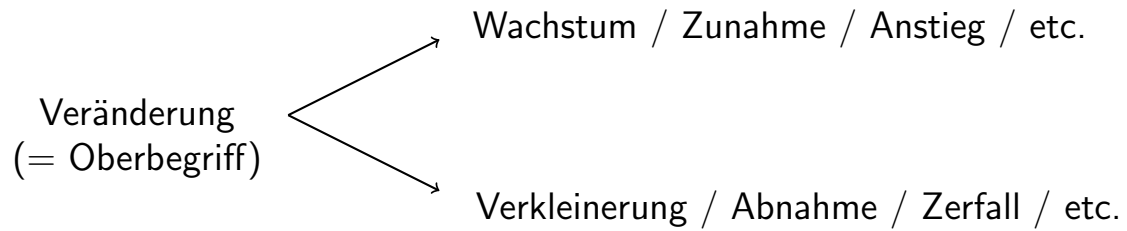
Zurück zur Verzinsung: Nach diesen Überlegungen ist klar: Auch wenn eine Bank die Zinsperiode unendlich klein machen würde, so würde der neue Jahreszins nicht ins Unendliche wachsen.

Bei der "Wahnsinns-Bank" mit ursprünglichem Jahreszinssatz von 100 % entspricht die Zahl e gerade dem maximal möglichen Vergrößerungsfaktor A_∞ pro Jahr. Somit würde der neue Jahreszins p_{neu} mit unendlich feiner Verzinsung einen Wert von

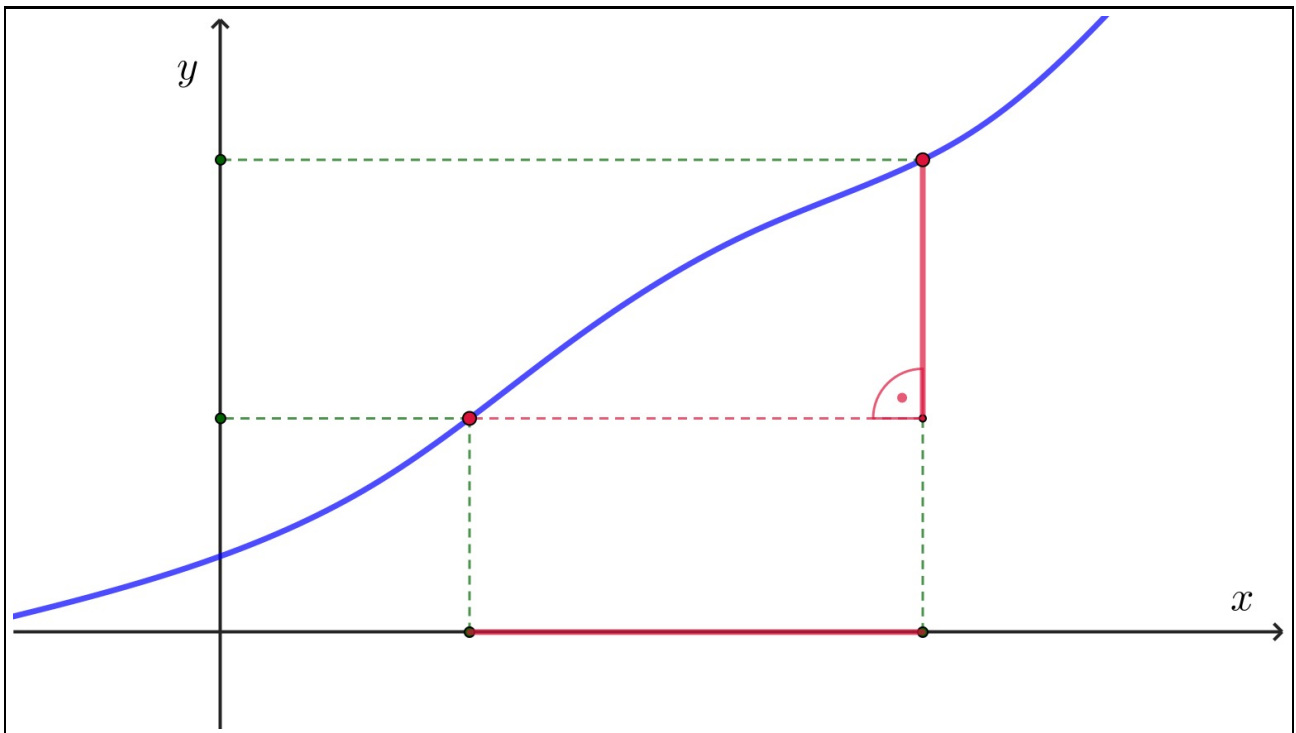
$$A_\infty = e = 1 + p_{\text{neu}} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{neu}} = e - 1 \approx 2.718 - 1 = 1.718 = 171.8\%$$

erreichen. Mehr ist nicht möglich!

12. Absolute und relative Veränderungen



Gegeben sei eine *Funktion* $f(x)$. Wir betrachten eine *Stelle* x_1 und gehen von dort aus um einen bestimmten *Schritt* Δx weiter, wodurch wir zur Stelle $x_2 = x_1 + \Delta x$ gelangen:



Eine Veränderung des Funktionswertes beim Wechsel von x_1 zu x_2 wird typischerweise auf eine der beiden folgenden Arten angegeben:

Δf = **absolute** Veränderung von f (während dem Schritt Δx)

$\frac{\Delta f}{f_1}$ = **relative** Veränderung von f (während dem Schritt Δx)

Beispiel 1: Ein Auto beschleunigt in $\Delta t = 6 \text{ s}$ von $v_1 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $v_2 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Absolute Geschwindigkeitszunahme: $\Delta v =$

Relative Geschwindigkeitszunahme: $\frac{\Delta v}{v_1} =$

Beispiel 2: Der *Swiss Market Index SMI* lag Ende Februar 25 bei $i_1 = 12910$ Punkten. Heute (Ende März 25) liegt der Index bei $i_2 = 12850$ Punkten.



Absoluter Punktverlust im März 25: $\Delta i =$

Relativer Punktverlust im März 25: $\frac{\Delta i}{i_1} =$

Wir halten fest:

- Die absolute Veränderung ist schlicht der Unterschied zwischen altem und neuem Wert. Demzufolge wird er in derselben Einheit wie die sich verändernde Grösse angegeben ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bei der Geschwindigkeitsänderung, Punkte beim Aktienindex).
- Die relative Veränderung beschreibt die Veränderung der Grösse relativ zum Ausgangswert zu Beginn des betrachteten Schritts. Die Einheiten kürzen sich weg, sodass die relative Veränderung einfach eine Zahl ist, die typischerweise in Prozenten angegeben wird.

Rep.: Vier allgemeine Parameter zur Modifikation einer Funktion

Gegeben sei irgendeine Funktion $f(x)$ und ihr Graph G_f . Modifizieren wir diese Funktion gemäss

$$f(x) \longrightarrow f_{\text{neu}}(x) = A \cdot f(B(x - C)) + D \quad ,$$

so verändern die vier Parameter A , B , C und D den Funktionsgraphen wie folgt:

Vertikale Streckung A : Der G_f wird vertikal mit dem Faktor A gestreckt.

Horizontale Stauchung B : Der G_f wird horizontal mit dem Faktor B gestaucht.

Horizontale Verschiebung C : Der G_f wird horizontal um den Wert C nach rechts verschoben.

Vertikale Verschiebung D : Der G_f wird vertikal um den Wert D nach oben verschoben.