SERIE 14: Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. *Funktionsansätze*

   Im Laufe der Akustik haben wir verschiedene Schwingungen und Wellen betrachtet. Dabei haben wir eine Handvoll Funktionen zur mathematischen Beschreibung dieser Phänomene kennengelernt.

   Notiere zu den im Folgenden beschriebenen Schwingungen und Wellen die zugehörige mathematische Funktion, wobei du jeweils beschreibst, welche Parameter in der Funktion auftreten und welche Bedeutung sie haben. Erläutere ebenfalls, warum die Mathematik zum jeweiligen Phänomen so auszusehen hat!

   Bem.: Verwende unbedingt die Parameter k (Wellenzahl) und ω (Kreisfrequenz), wo dies möglich ist. Erläutere aber auch mindestens einmal, wie diese beiden Parametern mit der Wellenlänge λ resp. mit der Frequenz f und mit der Periode T verknüpft sind.

   (a) (Ungedämpfte) Schwingung eines Federpendels.

   (b) Schwebung zweier Sinustöne mit fast gleichen Frequenzen f_1 und f_2.

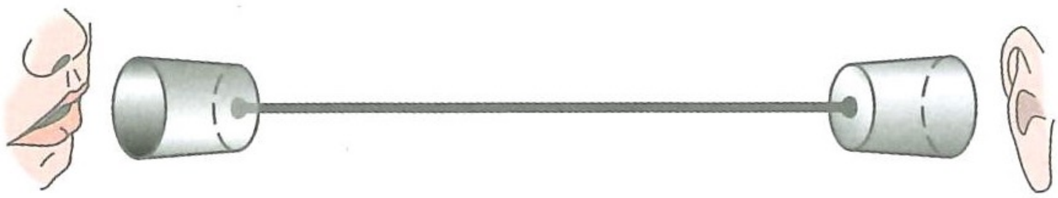
   (c) Auf einem Seil laufende Sinuswelle (nach rechts / nach links).

   (d) Stehende Welle auf einer Instrumentensaite.

2. *Ein paar Verständnisfragen*

   (a) Was spricht dafür, dass sich Schall als Welle ausbreitet? Wir sehen schliesslich mit unseren Augen keine Welle! Und was müssen wir uns unter einer Schallwelle vorstellen?

   (b) Kinder spielen manchmal mit einem selbstgemachten "Telefon", das aus einer Schnur besteht, deren Enden am Boden zweier Pappbecher befestigt sind:

   Wenn das Seil gespannt ist und ein Kind spricht in einen Pappbecher, so kann der Schall im Pappbecher am anderen Ende gehört werden. Erkläre ausführlich, wie der Schall vom Mund des einen Kindes zum Ohr des anderen Kindes gelangt.

   (c) Welche in deinem Alltag erfahrbare Tatsache spricht dafür, dass die Schallgeschwindigkeit in Luft nur unwesentlich von der Frequenz abhängt?

   (d) Die Stimme einer Person, die Helium inhaliert hat, klingt sehr hoch. Warum?

   (e) Ist die Frequenz einer sinusförmigen Schallwelle gleich der Frequenz ihrer Quelle? Begründe deine Antwort! (Normalfall? Ausnahmen?)

   (f) Gasmoleküle wie die der Luft bewegen sich zufallsbestimmt mit ziemlich großer Geschwindigkeit. Der mittlere Abstand von Molekülen voneinander ist wesentlich größer als ihr Durchmesser. Bewegt sich eine Welle durch ein Gas, so wird die Bewegung eines Moleküls nur dann auf ein anderes übertragen, wenn dieser Abstand zurückgelegt wird und zwei Moleküle kollidieren. Erwartest du deshalb, dass die Schallgeschwindigkeit in einem Gas durch die mittlere Molekülgeschwindigkeit begrenzt wird?

   (g) Die Schallgeschwindigkeit ist in den meisten Festkörpern größer als in der Luft. Weshalb ist das so?

   (h) Wenn eine Schallwelle von der Luft in Wasser übertritt, erwartest du dann eine Veränderung der Wellenlänge oder der Frequenz? Und wie verändert sich die entsprechende Grösse dabei?

   (i) Von stehenden Wellen kann man sagen, dass sie das Ergebnis "räumlicher Interferenz" sind, wohingegen Schwebungen als "zeitliche Interferenz" aufgefasst werden können. Erläutere diese Aussagen.

3. *Grundsätzliches zur Schwebung – eine Rekapitulation von Kapitel 12*

   Eine akustische Schwebung entsteht, wenn zwei fast gleich hohe Töne nebeneinander erklingen. Wir nehmen an, diese zwei Töne – wir gehen der Einfachheit halber von sinusartigen Schalldruckschwankungen aus – kommen bei deinem Ohr je mit der gleichen Amplitude an ($A_1 = A_2 = 1$).

   (a) Beschreibe den Höreindruck, der sich ergibt!

   (b) Der eine Ton sei der Stimmgabelton mit $f_1 = 440\,\mathrm{Hz}$. Welche Frequenz hat der zweite Ton, wenn die Schwebungsfrequenz $2.0\,\mathrm{Hz}$ beträgt?

   (c) Die Schwebung ist ein sogenanntes **Interferenzphänomen**. Was ist damit gemeint?
   Erläutere den Ausdruck und weitere relevante Fachausdrücke. In welchen Zusammenhängen begegnen wir Interferenzphänomenen?

   (d) Skizziere das für eine akustische Schwebung charakteristische Schalldruckmuster und markiere darin die Schwebungsperiode, aus der die Schwebungsfrequenz hervorgeht.

   (e) In Aufgabe (b) sei der zweite Ton höher als der erste. Notiere nun die Schalldruckschwankung $p(t)$ beider Töne zusammen als das Produkt zweier Sinusfunktionen inklusive numerischer Angabe aller auftretenden Parameter.

4. *Elementare Berechnungen mit $c = \lambda \cdot f$*

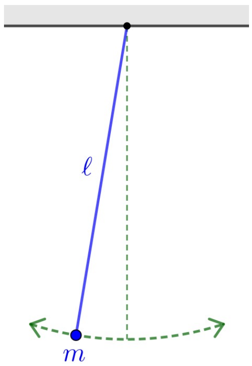
   (a) Eine Klaviersaite sei $162\,\mathrm{cm}$ lang. Beim Stimmen wird sie durch eine Kraft von ca. $1200\,\mathrm{N}$ so stark gespannt, dass die Wellengeschwindigkeit in ihr $1711\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beträgt. Welche Grundtonfrequenz und welche Obertonfrequenzen können auf dieser Saite schwingen, wenn sie angeschlagen wird?

   (b) Delfine verständigen sich unter Wasser mit Ultraschalltönen zwischen $80\,\mathrm{kHz}$ und $200\,\mathrm{kHz}$. Welchem Wellenlängenbereich entspricht dies bei einer Schallgeschwindigkeit von $c = 1.45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ unter Wasser?

   (c) Eine $32\,\mathrm{cm}$ lange Violinsaite wird auf den Ton a' mit $440\,\mathrm{Hz}$ gestimmt.

      i. Wie gross ist die Wellenlänge der Grundschwingung auf dieser Saite?
      ii. Wie gross ist die (Grund-)Wellenlänge der Schallwelle, die diese Saite erzeugt?
      iii. Wieso gibt es zwischen (a) und (b) einen Unterschied?
      iv. Wie gross ist die Grundfrequenz der Schallwelle, die diese Saite erzeugt?

5. *Das Foucault'sche Pendel*

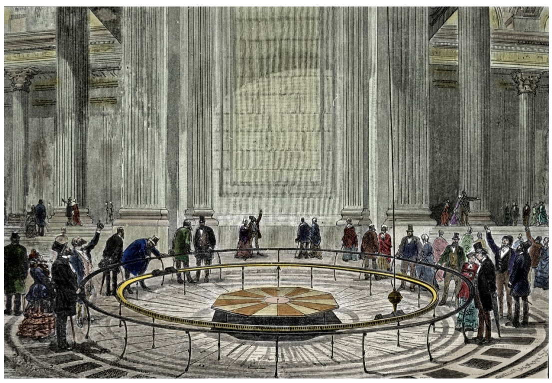
   

   Ein **mathematisches Pendel** besteht aus einer (masselosen) Schnur der Länge ℓ, an der eine (punktförmige) Masse m hängt und hin- und her schwingt. In der klassischen Mechanik kann man zeigen, dass ein solches Pendel in sehr guter Näherung sinusförmig schwingt, solange die Amplitude relativ klein ist. Dann gilt für die Kreisfrequenz:

   $$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \text{mit} \quad g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

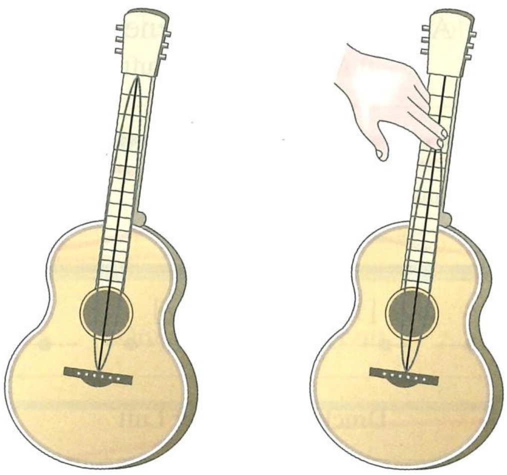
   Offenbar ist die Schwingungsfrequenz unabhängig von der Pendelmasse!

   (a) Im Jahre 1851 konnte **Léon Foucault** (1819–1868) im Pantheon in Paris zum ersten Mal den experimentellen Nachweis für die Erdrotation erbringen. Er benutzte dazu ein Pendel der Länge $67\,\mathrm{m}$ und eine Kugel mit der Masse $28\,\mathrm{kg}$. Wie lange dauerte es, bis die maximal ausgelenkte Kugel aus der einen Extremlage in die gegenüberliegende gelangte?

   (b) Würde man den Foucault'schen Versuch auf dem Mars durchführen, so müsste die Pendellänge eine andere sein, wenn die Pendelfrequenz dieselbe sein soll wie die in Paris. Wie lange müsste denn ℓ sein?
   Hinweis: Der Ortsfaktor auf dem Mars beträgt $3.4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$.

6. *Frequenzverhältnisse, Saitenlängen und Intervalle*



Vorüberlegungen: Schlagen wir die Saite einer Gitarre, eines Klaviers, einer Geige, eines Monochords etc. an, so hören wir einen Ton X mit bestimmter Tonhöhe, die durch die **Grundtonfrequenz** $f_{0,X}$ vorgegeben wird. Hat die "leere" Saite eine Länge ℓ_X, so können wir ihren schwingenden Teil durch abgreifen an einer bestimmten Stelle auf die Länge ℓ_Y verkürzen (vgl. Bild rechts). Dadurch erhöht sich die Tonhöhe, denn wir verkürzen mit dem Abgreifen die Wellenlängen aller stehenden Wellen auf der Saite. Wir hören den neuen, höheren Ton Y mit Grundtonfrequenz $f_{0,Y}$.

Wie hängen nun die neue Saitenlänge ℓ_Y und die neue Grundtonfrequenz $f_{0,Y}$ mit den alten Werten ℓ_X und $f_{0,X}$ zusammen? Was bleibt denn bei dieser Saitenverkürzung gleich?

Antwort: Die in der Saite vorliegende Wellengeschwindigkeit bleibt unverändert! Und daraus folgt:

$$f_0 = \frac{c}{2\ell} \quad \Rightarrow \quad c = 2\ell_X \cdot f_{0,X} \stackrel{!}{=} 2\ell_Y \cdot f_{0,Y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f_{0,X}}{f_{0,Y}} = \frac{\ell_Y}{\ell_X}$$

In Worten: Das Verhältnis der Grundfrequenzen $f_{0,X}$ und $f_{0,Y}$ ist das umgekehrte Verhältnis der Saitenlängen ℓ_X und ℓ_Y.

Frequenzverhältnisse können wir mit Intervallsprüngen in Verbindung bringen! So gilt für die sogenannten **reinen** oder **natürlichen Intervalle**:

Intervall	Frequenzverhältnis	Töne, die das Intervall bilden	
Prim	1 : 1	c — c	zunehmend konsonant
Oktave	2 : 1	c — c^1	
Quinte	3 : 2	c^1 — g^1	
Quarte	4 : 3	g^1 — c^2	
große Sexte	5 : 3	g^1 — e^2	
große Terz	5 : 4	c^2 — e^2	
kleine Terz	6 : 5	e^2 — g^2	
kleine Sexte	8 : 5	e^2 — c^3	
kleine Septime	9 : 5	e^2 — d^3	zunehmend dissonant
große Sekunde	9 : 8	c^3 — d^3	
große Septime	15 : 8	c^3 — h^3	
kleine Sekunde	16 : 15	h^3 — c^4	

Auf diesen reinen Intervallen, die zu einfachen Zahlen- und somit auch Saitenlängenverhältnissen gehören, wurden bereits zur Zeit der alten Griechen harmonische Stimmungen aufgebaut. Einfache Zahlenverhältnisse galten als schön, was sich eben in der Harmonie, also im wohlklingenden Zusammenklang widerspiegelt.

Die leere Saite unseres Schul-Monochords besitzt eine Länge von $120\,\mathrm{cm}$. Durch Verkürzung können wir gezielt ein bestimmtes Intervall nach oben springen, denn mittels obiger Tabelle lässt sich die neue Saitenlänge berechnen. Erklingt auf der leeren Saite beispielsweise die Tonhöhe $X = \mathrm{c}$, so kann ich eine Quinte zum Ton $Y = \mathrm{g}$ hochspringen, indem ich mit einem Steg dafür sorge, dass nur noch $\frac{2}{3}$ der Saite schwingen:

$$\frac{\ell_\mathrm{g}}{\ell_\mathrm{c}} = \frac{f_\mathrm{c}}{f_\mathrm{g}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \ell_\mathrm{g} = \frac{2}{3}\,\ell_\mathrm{c}$$

(a) Auf dem Monochord möchte ich von der leeren Saite aus eine grosse Terz nach oben gehen. Welche neue Saitenlänge muss ich dafür einstellen?

(b) Welchen Intervallsprung werde ich hören, wenn ich die leere Monochordsaite auf neu nur $90\,\mathrm{cm}$ Saitenlänge verkürze?

(c) Welche Grundfrequenz hat ein Ton, der eine reine grosse Sexte oberhalb des Tones A mit einer Grundtonfrequenz von $220\,\mathrm{Hz}$ liegt.

(d) Im Musikunterricht hast du kapiert: Eine Oktave besteht aus einem Quint- und einem Quartsprung. Stimmt dies auch bezüglich der reinen Intervalle? Erhalte ich also effektiv einen Oktavsprung, wenn ich zuerst eine reine Quinte und dann noch eine reine Quarte nach oben springe?

7. *Rund ums Cello*

Die vier leeren Saiten eines Cellos erzeugen die vier Töne

C mit $f_\mathrm{C} = 65.4\,\mathrm{Hz}$, G mit $f_\mathrm{G} = 98.0\,\mathrm{Hz}$,

d mit $f_\mathrm{d} = 147\,\mathrm{Hz}$ und a mit $f_a = 220\,\mathrm{Hz}$.

Alle vier Saiten sind gleich lang, nämlich $690\,\mathrm{mm}$.

Pablo Casals (1876 – 1973)

(a) Welche Intervalle liegen zwischen den vier Tönen?
Hinweis: Diese Frage beantwortest du natürlich bereits aufgrund deiner musiktheoretischen Kenntnisse, weil du zweifelsohne weisst, wie z.B. das Intervall zwischen dem Ton C und dem Ton G heisst. Hier sollst du dich nun aber auch noch "mathematisch" von der Richtigkeit deiner Antwort überzeugen, indem du die Frequenzverhältnisse bildest und mit der Tabelle in Aufgabe 6 dieser Übungsserie vergleichst.

(b) Was passiert beim Stimmen einer Saite? Genauer: Welche Größe verändert man durch das Stimmen und weshalb hat dies einen Einfluss auf die Tonhöhe der Saite? Argumentiere mitunter auch mathematisch!

(c) Zeichne die Graphen der ortsabhängigen Amplitudenfunktionen $A_n(x)$ für die Grund- und die ersten fünf Oberschwingungen in die folgenden Vorlagen ein.

Grundschwingung $n = 0$

3. Oberschwingung $n = 3$

1. Oberschwingung $n = 1$

4. Oberschwingung $n = 4$

2. Oberschwingung $n = 2$

5. Oberschwingung $n = 5$

(d) Bestimme mit Hilfe deiner Graphen aus (d) die Wellenlängen λ_n für $n = 0, \ldots, 5$ der Eigenschwingungen auf den Saiten des Cellos. Gib die Antworten in Millimeter.

(e) Welche Obertonfrequenzen können theoretisch im Ton der leeren d-Saite mitschwingen? Führe mindestens vier Werte an.

(f) Welche Wellengeschwindigkeiten sind auf der C- und auf der a-Saite vorhanden?

(g) Cellistinnen und Cellisten können die Klangfarbe ihres Spiels durch ihre Spieltechnik mit beeinflussen und haben damit mehr Gestaltungsmöglichkeiten.

i. Erläutere allgemein, welche Eigenschaften einer Schallwelle in unserer Wahrnehmung die **Klangfarbe** eines Tones bestimmen.

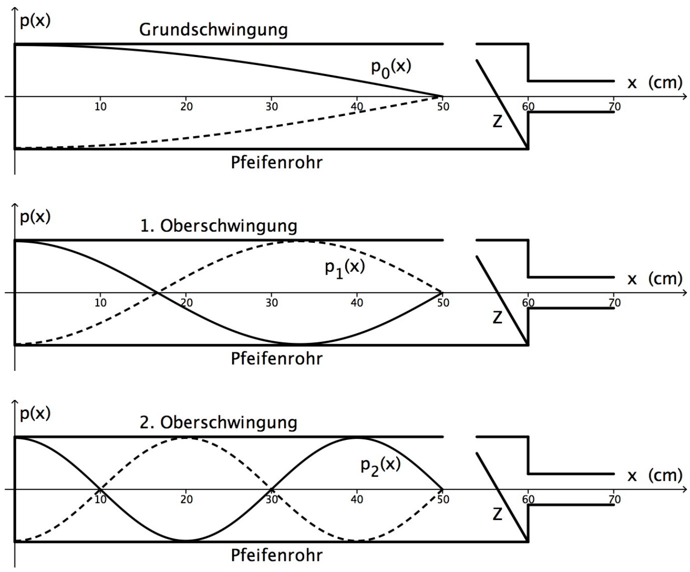
ii. Gib nun mindestens zwei konkrete Möglichkeiten an, wie die Klangfarbe beim Spielen des Cellos verändert werden kann. Was könnte man ausprobieren?

(h) Eine Cellistin möchte auf der d-Saite ein h spielen, also vom Grundton der leeren Saite eine grosse Sexte nach oben springen. Wie weit vom Steg entfernt muss sie die Saite mit ihren Fingern abdrücken?

(i) Ein Cellist spielt die G-Saite zuerst leer. Dann klemmt er die Saite so ab, dass der schwingende Teil nur noch knapp $51.8\,\mathrm{cm}$ lang ist. Welchen Intervallsprung vernehmen wir dabei als Zuhörer*innen?

8. *Eigenschwingungen bei gedackten Orgelpfeifen*

Eine **gedackte** Orgelpfeife ist ein **geschlossenes Rohr** aus Holz oder Metall. Geschlossen bedeutet: die Pfeife ist nur beim Zungenblatt offen, am anderen Ende ist sie zu. In einem solchen Rohr kann die Luft immer noch schwingen, d.h., es können **Luftdruckschwankungen** auftreten, welche sich periodisch wiederholen. Solche Schwingungen werden angeregt, wenn die Luft über eine geeignete Vorrichtung (**Zungenblatt** Z) in die Pfeife geblasen wird.



Die Luftschwingungen in der Pfeife unterliegen **Randbedingungen**: Beim Zungenblatt herrscht stets der äussere Luftdruck. Beim geschlossenen Ende schwankt der Druck maximal! Diese Randbedingungen legen die möglichen **Eigenschwingungen der Luft** im Pfeifenrohr fest. Nur ganz bestimmte **ortsabhängige Druckamplitudenfunktionen** $p_n(x)$ sind möglich (siehe links).

Die Pfeifenlänge betrage $\ell = 50\,\mathrm{cm}$, die Wellengeschwindigkeit in der Luft $c = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Welche **Grundtonfrequenz** hat diese Pfeife demzufolge und welche **Obertonfrequenzen** können allenfalls mitschwingen?

Tipp: Eine Wellenllänge λ umfasst stets einen Wellenberg und ein Wellental.

Gib zudem die Funktionsgleichung für die stehende Welle $p_4(x,t)$ an – inklusive Zahlenwerte für die darin auftretenden Parameter.

9. *Überlagerung zweier phasenverschobener Sinusschwingungen*

Bei einem Mikrophon kommen die sinusförmigen Schallwellen aus zwei Lautsprechern an. Beide Schallwellen haben genau die gleiche Frequenz und kommen mit gleicher Amplitude beim Mikrophon an. Allerdings ist die eine Schallwelle relativ zur anderen um φ phasenverschoben, sodass wir für die beiden Schalldruckschwankungen am Ort des Mikrophons zunächst notieren:

$$p_1(t) = A \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{und} \qquad p_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

(a) Wie du sicher vermutest, interferieren die beiden Schallwellen am Ort des Mikrophons. Für welche Werte von $\varphi \in [0; 2\pi[$ besteht zu 100 % konstruktive resp. destruktive Interferenz und wie lautet in diesen Fällen die gemeinsame Schalldruckfunktion $p_{\text{total}}(t)$, die vom Mikrophon aufgezeichnet wird?

(b) Nun habe die Phasenverschiebung einen beliebigen Wert φ. Wir wollen verstehen, wie in diesem Fall die gemeinsame Schalldruckfunktion $p_{\text{total}}(t)$ aussieht. Um dies mathematisch möglichst einfach herzuleiten, verschieben wir den Nullpunkt der Zeitachse gerade so, dass wir je die Hälfte der Phasenverschiebung φ den beiden Funktionen $p_1(t)$ und $p_2(t)$ zuordnen. Das bedeutet, die beiden Funktionen lauten nun neu:

$$p_1(t) = A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad p_2(t) = A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

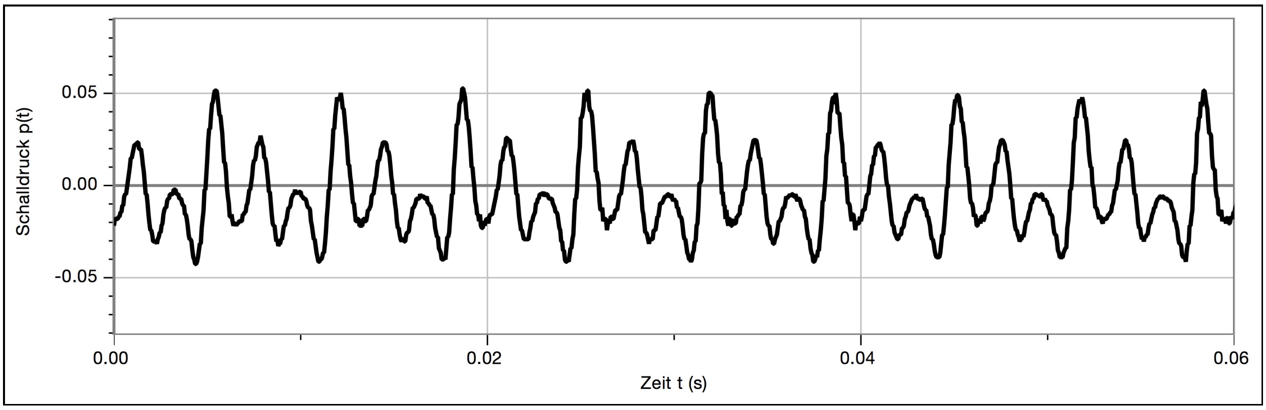
Auf diese Weise sind $p_1(t)$ und $p_2(t)$ netto immer noch im φ phasenverschoben zueinander.

Leite nun unter Verwendung der Additionstheoreme für die Sinusfunktionen einen Ausdruck für die gemeinsame Schalldruckfunktion $p_{\text{total}}(t)$ her und interpretiere das Resultat – welchen Einfluss hat die Phasenverschiebung φ auf den vom Mikrophon registrierten Ton?

(c) Lasse dir $p_1(t)$ und $p_2(t)$, sowie ihre Summe in GeoGebra aufzeichnen – z.B. mit Schiebereglern für A, ω und φ – und gib zudem deinen unter (b) erhaltenen Ausdruck für p_{total} ein, um dein Resultat aus (b) auf diese Weise zu bestätigen. Verändere insbesondere den Schieberegler für φ und beobachte, was dabei $p_{\text{total}}(t)$ macht. (**Achtung!** Die x-Achse in GeoGebra ist hier die Zeitachse t.)

10. *Ein Versuch mit dem Vokal "O"*

Ich habe den Vokal "O" auf einer bestimmten Tonhöhe in ein Mikrophon gesungen. Dabei hat sich das folgende Schalldruckdiagramm ergeben:



In meinem Versuch betrug die Grundtonfrequenz $150\,\mathrm{Hz}$.

(a) **Wie lässt sich die Grundtonfrequenz aus dem Schalldruckdiagramm "ablesen"?** Zeige auf, wie man die $150\,\mathrm{Hz}$ möglichst präzise ermittelt.

(b) Der von mir gesungene Ton ist relativ tief. Mein Stimmumfang erlaubt mir das "O" auch eine Oktave höher zu singen. Um welches Intervall liegt dieser höhere Ton immer noch unter dem Kammerton a der Stimmgabel ($440\,\mathrm{Hz}$)?

Tipp: Zunächst empfiehlt es sich die Grundfrequenz des oktavierten Tones zu bestimmen.

(c) Unten findest du vier **Frequenzspektren** A bis D. Eines davon gehört zum oben gezeigten Schalldruckdiagramm. Welches?

Begründe deine Antwort hinreichend unter Verwendung passender Fachausdrücke. Am besten startest du deine Argumentation, indem du erläuterst, was ein Frequenzspektrum effektiv zeigt.