SERIE 11: Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. Berechne unter Verwendung der Additionstheoreme die folgenden Werte exakt:

   (a) $\sin 15°$ (b) $\cos 15°$ (c) $\tan(-75°)$

2. Überzeuge dich anhand der folgenden Beispiele mittels der dir bekannten exakten Werte ein paarmal von der Richtigkeit der Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln:

   (a) $\sin 90° \overset{!}{=} \sin(60° + 30°)$ (b) $\cos 45° \overset{!}{=} \cos(90° - 45°)$

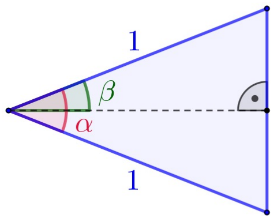
   (c) $\sin 120° \overset{!}{=} \sin(2 \cdot 60°)$ (d) $\cos 270° \overset{!}{=} \cos(2 \cdot 135°)$

3. Vereinfache unter Verwendung der Additionstheoreme die folgenden Ausdrücke:

   (a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ (d) $\sin(\pi - x)$

4. Betrachte das gleichschenklige Dreieck rechts und drücke seine Fläche unter Verwendung der Doppelwinkelformel für den Sinus durch den Winkel α aus.

   Tipp: Betrachte zunächst eines der rechtwinkligen Dreiecke und gib dessen Fläche in Abhängigkeit des Winkels β an. Verwende danach: $\alpha = 2\beta$.



5. (a) Lasse dir in GeoGebra die Graphen von $f(x) = \sin^2 x$ und $g(x) = \cos^2 x$ aufzeichnen!
      i. Was fällt dir an diesen Funktionsgraphen auf? Wonach sehen sie aus? Formuliere eine Vermutung.
      ii. Weshalb muss der Graph von $\sin^2 x$ auf dem Intervall $]0; \frac{\pi}{2}[$ stets unterhalb der normalen Sinuskurve zu $\sin x$ verlaufen?

   (b) Versuche aufgrund deiner Beobachtungen unter (a) die Gleichungen für $f(x)$ und $g(x)$ neu aufzuschreiben, nämlich als modifizierte Sinus- oder noch besser Cosinusfunktionen!

   (c) Deine Vermutungen aus (b) für die Funktionsgleichungen von $f(x) = \sin^2 x$ und $g(x) = \cos^2 x$ lassen sich bestätigen (oder widerlegen)! Nimm dazu die Doppelwinkelformel für $\cos(2x)$ und löse sie einmal nach $\sin^2 x$ und einmal nach $\cos^2 x$ auf, dann müsstest du sehen, ob du bei (b) richtig gelegen hast.

6. Auch für den Tangens lässt sich eine Doppelwinkelformel $\tan(2\alpha) = \ldots$ herleiten. Für $\tan(2\alpha)$ gibt es sogar einen Term, in dem nur noch $\tan\alpha$ auftritt. Finde diese Doppelwinkelformel für den Tangens!

   Tipp: Verwende $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, sowie die Doppelwinkelformeln für Sinus und Cosinus.

7. Benutze die Additionstheoreme und die Doppelwinkelformeln, um *Tripelwinkelformeln* herzuleiten. Gesucht sind also Formeln für $\sin(3\alpha)$ und $\cos(3\alpha)$ die selber nur noch Glieder mit $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ enthalten.

8. Mit den Doppelwinkelformeln können weitere exakte Werte für die Sinus- und die Cosinusfunktion ermittelt werden. Finde diese exakten Ausdrücke für $\sin 22.5°$ und $\cos 22.5°$. Hier das Lösungsrezept:

   i. Wir wissen: $22.5° = \frac{45°}{2}$, sowie $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   ii. Mit den Doppelwinkelformeln schreiben wir nun:

   $$\sin 45° = \sin\left(2 \cdot 22.5°\right) = \ldots \overset{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \cos\left(2 \cdot 22.5°\right) = \ldots \overset{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Die ...-Ausdrücke setzen sich ausschliesslich aus $\sin 22.5°$ und $\cos 22.5°$ zusammen.

   iii. Somit haben wir ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in den beiden Unbekannten $x = \sin 22.5°$ und $y = \cos 22.5°$ (Substitution!). Mit etwas Geschick bist du durchaus in der Lage dieses Gleichungssystem zu lösen (Einsetzungsverfahren und Mitternachtsformel). **Viel Spass!**