LÖSUNGEN SERIE 6: Rund um den harmonischen Oszillator

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. Aus der Schwingungsfrequenz schliessen wir direkt auf die Periode:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{280\,\mathrm{Hz}} = \frac{1}{440\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0.00357\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{3.6\,\mathrm{ms}}}$$

2. Die Anzahl Umdrehungen pro Minute entsprechen eigentlich bereits der Frequenz, nur wollen wir die Angabe noch in Hertz umrechnen:

$$f = 33\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{\mathrm{min}} = \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{60\,\mathrm{s}} = \frac{5}{9}\,\mathrm{Hz} \simeq \underline{\underline{0.56\,\mathrm{Hz}}}$$

Die Periode, also die Dauer einer Umdrehung, erhalten wir ganz analog (natürlich könnte man auch einfach den Kehrwert der Frequenz nehmen):

$$T = \frac{1\,\mathrm{min}}{33\,\frac{1}{3}} = \frac{60\,\mathrm{s}}{\frac{100}{3}} = \frac{60 \cdot 3}{100}\,\mathrm{s} = \frac{9}{5}\,\mathrm{s} = \underline{\underline{1.8\,\mathrm{s}}}$$

Für die Kreisfrequenz ergibt sich beispielsweise aus der Frequenz:

$$\omega = 2\pi\,\mathrm{rad} \cdot f = 2\pi\,\mathrm{rad} \cdot \frac{5}{9}\,\mathrm{Hz} \simeq \underline{\underline{3.5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}}$$

3. (a) Gegeben ist die Kreisfrequenz $\omega = 4.3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Daraus ergibt sich für Periode, Frequenz und Winkelgeschwindigkeit:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} = 1.46\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{1.5\,\mathrm{s}}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4.3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{2\pi} = 0.684\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{0.68\,\mathrm{Hz}}}$$

$$\omega = 4.3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 4.3 \cdot \frac{180^\circ}{\pi\,\mathrm{rad}}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \frac{246^\circ}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{\frac{250^\circ}{\mathrm{s}}}}$$

(b) Für die Bahngeschwindigkeit am Aussenrand des Schaufelrades finden wir:

$$v = \omega \cdot r = \frac{\omega \cdot d}{2} = \frac{4.3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdot 2.8\,\mathrm{m}}{2} = 6.02\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{6.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

4. Wir überlegen uns sehr simpel:

Stundenzeiger: $T = \underline{\underline{12\,\mathrm{h}}}$, $\omega = \frac{360^\circ}{12\,\mathrm{h}} = \underline{\underline{\frac{30^\circ}{\mathrm{h}}}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{h}}}}$.

Minutenzeiger: $T = \underline{\underline{1\,\mathrm{h}}}$, $\omega = \frac{360^\circ}{1\,\mathrm{h}} = \underline{\underline{\frac{360^\circ}{\mathrm{h}}}} = \underline{\underline{2\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{h}}}}$.

Sekundenzeiger: $T = \underline{\underline{1\,\mathrm{min}}}$, $\omega = \frac{360^\circ}{1\,\mathrm{min}} = \underline{\underline{\frac{360^\circ}{\mathrm{min}}}} = \underline{\underline{2\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{min}}}}$; oder: $T = \underline{\underline{60\,\mathrm{s}}}$, $\omega = \frac{360^\circ}{60\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{\frac{6^\circ}{\mathrm{s}}}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{30}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}}$.

5. (a) Im Diagramm lesen wir ab, dass die tiefste erreichte Höhe etwa $h_1 = 0.055\,\mathrm{m}$ beträgt. Für die höchste erreichte Höhe lesen wir ungefähr $h_2 = 0.260\,\mathrm{m}$ ab. Daraus schliessen wir für die Amplitude der Pendelschwingung:

$$2A = \Delta h = h_2 - h_1 = 0.260\,\mathrm{m} - 0.055\,\mathrm{m} = 0.205\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad = A = \frac{\Delta h}{2} = \frac{0.205\,\mathrm{m}}{2} \simeq 0.10\,\mathrm{m}$$

Den ersten Hochpunkt erreicht die Pendelschwingung etwa zum Zeitpunkt $t_1 = 0.65\,\mathrm{s}$. Lasse ich ab da zwei ganze Perioden vergehen, so finde ich den dritten Hochpunkt im Diagramm bei etwa $t_2 = 3.2\,\mathrm{s}$. Somit erhalte ich:

$$2T = \Delta t = t_2 - t_1 = 3.2\,\mathrm{s} - 0.65\,\mathrm{s} = 2.55\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\Delta t}{2}\frac{2.55\,\mathrm{s}}{2} = 1.275\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{1.3\,\mathrm{s}}}$$

Bemerke: Für die Genauigkeit des Resultates ist es besser, beim Ablesen aus dem Diagramm mehrere Perioden zu zählen, denn so wird der Ablesefehler beim Teilen durch die Periodenanzahl verkleinert.

Schliesslich folgt für die Frequenz:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.275\,\mathrm{s}} = 0.784\,\mathrm{Hz} \simeq \underline{\underline{0.78\,\mathrm{Hz}}}$$

(b) Zunächst benötigen im Argument der Sinusfunktion die Kreisfrequenz ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.275\,\mathrm{s}} \simeq 4.9\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Wir könnten als Einheit von ω auch $\frac{1}{\mathrm{s}}$ notieren. Das rad ist einfach eine Zusatzeinheit zur Verdeutlichung, dass hier ein Winkel im Bogenmaß angegeben wir.

Mit A und ω können wir die Pendelschwingung als Sinusfunktion notieren:

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega\, t) = \underline{\underline{0.10\,\mathrm{m} \cdot \sin\left(4.9\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdot t\right)}}$$

6. "Stell dir einen drehenden Plattenspieler vor. Der macht typischerweise gut 30 Umdrehungen pro Minute. D.h., für eine Umdrehung braucht er knapp zwei Sekunden.

Nun entspricht eine einzelne Umdrehung der Platte ja einem Drehwinkel von $360°$ (um sich selbst). D.h., sie macht etwa $360°$ pro $2\,\mathrm{s}$ oder $80°$ pro Sekunde.

Diese letzte Angabe, also "$180°$ pro Sekunde", bezeichnen wir als Winkelgeschwindigkeit. Eine solche Angabe beschreibt, um welchen Winkel pro Zeitspanne gedreht wird.

In der Physik wird diese Winkelgeschwindigkeit auch als **Kreisfrequenz** bezeichnet. Dabei wird aber der Winkel nicht in Grad angegeben, sondern in einer anderen Einheit namens rad. Die Umrechnung ist ganz einfach: $180°$ entsprechen genau $\pi\,\mathrm{rad}$.

Unser Plattenspieler weist also etwa eine Kreisfrequenz von $\pi\,\mathrm{rad}$ pro Sekunde auf – also ca. eine halbe Umdrehung pro Sekunde."

7. Die Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1 = 5.2\,\mathrm{s} - 3.0\,\mathrm{s} = 2.2\,\mathrm{s}$ zwischen den beiden angegebenen Zeitpunkten, von denen der eine zur tiefsten und der andere zur höchsten Lage gehört, entspricht entweder $\frac{1}{2}T$, oder $\frac{3}{2}T$, oder $\frac{5}{2}T$, usw.

   Somit ergeben sich also mögliche Perioden: $T = 2\Delta t$ oder $T = \frac{2}{3}\,\Delta t$ oder $T = \frac{2}{5}\,\Delta t$ usw.

   Die Folge der ungeraden Zahlen lässt sich folgendermassen notieren:

$$n\text{-te ungerade Zahl} = 2n+1 \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   D.h., alle möglichen Perioden T_n lassen sich notieren in der Form:

$$T_n = \frac{2}{2n+1} \cdot \Delta t = \frac{T_0}{2n+1} \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Dabei ist $T_0 = 2\Delta t = 2 \cdot 2.2\,\mathrm{s} = 4.4\,\mathrm{s}$ die längste mögliche Periode.

   Die niedrigste Frequenz ist folglich $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{4.4\,\mathrm{s}} = 0.227\,\mathrm{Hz}$. Alle möglichen Frequenz sind somit gegeben durch:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{2n+1}{T_0} = (2n+1) \cdot f_0 \qquad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   Hier die niedrigsten paar Frequenzen:

$$f_0 = 0.227\,\mathrm{Hz} \qquad f_1 = 0.682\,\mathrm{Hz} \qquad f_2 = 1.14\,\mathrm{Hz} \qquad f_3 = 1.59\,\mathrm{Hz} \qquad f_4 = 2.05\,\mathrm{Hz}$$

8. Mit der Kreisfrequenz erhalten wir für die Zentripetalbeschleunigung:

$$a_\mathrm{Z} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \underline{\underline{\omega^2 \cdot r}}$$