LÖSUNGEN SERIE 5: Die allgemeine Sinusfunktion und ihre Parameter

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. In der Funktion $f(x)$ ist:
   - $A = 4$ die **Amplitude** = maximaler Ausschlag der Sinuskurve aus der mittleren Lage,
   - $B = 5$ der **horizontale Streckungsparameter** ($> 1 \to$ Stauchung),
   - $C = 6$ die **horizontale Verschiebung** (um 6 nach rechts), und
   - $D = 7$ die **mittlere Höhe** resp. **mittlere Lage** resp. **vertikale Verschiebung** der Sinuskurve.

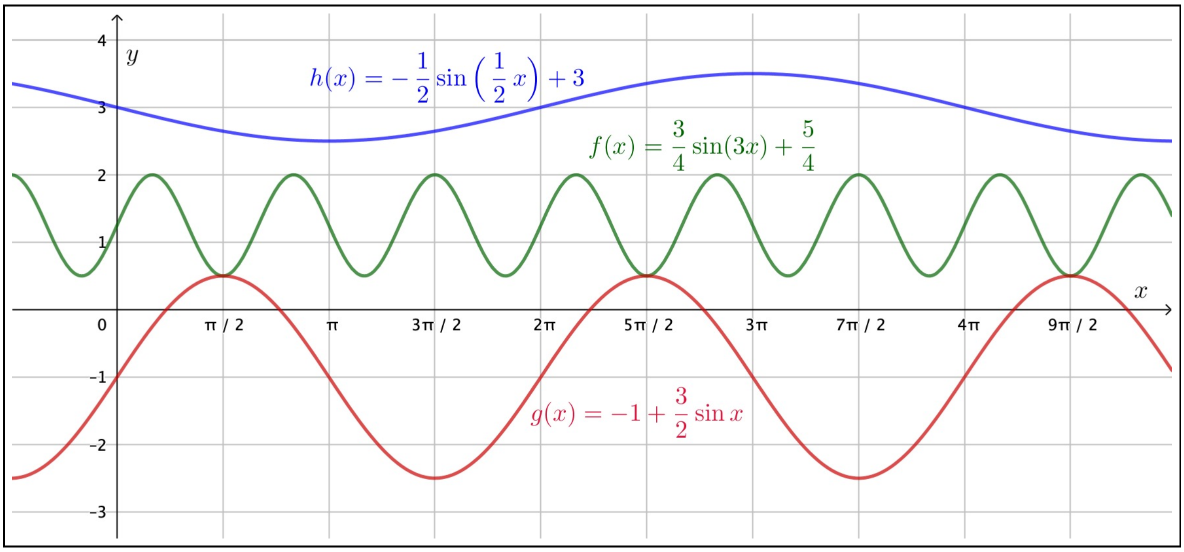
   In der Funktion $g(x)$ ist:
   - $D = 4$ die **mittlere Höhe** resp. **mittlere Lage** resp. **vertikale Verschiebung** der Sinuskurve,
   - $A = 5$ die **Amplitude** = maximaler Ausschlag der Sinuskurve aus der mittleren Lage,
   - $P = 7$ die **Periode**, also die Länge einer einzelnen Wiederholung des Auf-/Ab-Musters, und
   - $\varphi = 6$ die **Phase**, also die Verschiebung bezogen auf die reine Sinusfunktion. In diesem Fall handelt es sich um eine Rechtsverschiebung um fast eine ganze Periode. Die ganze Periode wäre ja $2\pi \approx 6.28$.

2. Mit $B = \frac{2\pi}{P}$ resp. $P = \frac{2\pi}{B}$ und $\varphi = B \cdot C$ ergeben sich die folgenden Werte:

Funktion	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Horizontaler Streckungsparameter B	3	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{6}{5}$
Horizontale Verschiebung C	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5\pi}{16}$
Periode P	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	3	4	$\frac{5\pi}{3}$
Phase φ	$\frac{3\pi}{2}$	π	$-\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{8}$

3. Für die unmodifizierte Sinusfunktion können wir schreiben:
$$\sin x = 1 \cdot \sin\big(1 \cdot (x - 0)\big) + 0 = 1 \cdot \sin(1 \cdot x - 0) + 0$$
   Somit sind $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 0$ und $\varphi = 0$. Für die Periode ergibt sich: $P = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

4. Es ergeben sich die folgenden Sinuskurven:



5. Für die drei Sinusfunktionen lesen wir aus den Graphen ab:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(x-2\pi)\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x - \pi\right) - \frac{1}{2} \qquad P_f = 4\pi$$

$$g(x) = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 3 = 2\sin(2x-\pi) + 3 \qquad P_g = \pi$$

$$h(x) = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \qquad P_h = \frac{4\pi}{3}$$

6. Es ergeben sich die folgenden Lösungsmengen:

(a) $9\tan^4\alpha = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \tan^4\alpha = \frac{1}{9} \quad\Leftrightarrow\quad \tan^2\alpha = \pm\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \tan\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\alpha = \pm 30^\circ + k\cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}}}$

(b) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\alpha = 45^\circ + k\cdot 90^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}}}$

(c) $\sin^2 x + 2\sin x = -1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\sin x + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow\quad \sin x + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x = -1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{x = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}}}$

(d) $\sqrt{3}\cos\alpha = \sin\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\alpha = 60^\circ + k\cdot 180^\circ \mid k\in\mathbb{Z}\}}}$

(e) $\cos x = \frac{1}{\tan x} = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad\Rightarrow\quad \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x\left(1 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow\quad \cos x = 0 \text{ oder } \sin x = 1 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \text{ mit } k\in\mathbb{Z}$

Aber: Diese x-Werte entsprechen genau den undefinierten Polstellen von $\tan x$ $\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}}$

(f) $\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x\cdot(\sqrt{2}\sin x + 1) = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin x = 0 \text{ oder } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{x = k\cdot\pi \text{ oder } x = -\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \text{ oder } x = \frac{5\pi}{4} + k\cdot 2\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}}}$

7. Die Perioden der beiden Sinusfunktionen betragen $P_f = 3\pi$ und $P_g = \frac{\pi}{2}$. Hier die zugehörigen Kurven: