LÖSUNGEN SERIE 3: Anwendungen von Sinus- und Cosinussatz

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. *Berechnungen mit Sinus- und Cosinussatz in beliebigen Dreiecken*

   (a) Hier zunächst die Resultate. Unten stehen ein paar allgemeine und wichtige Bemerkung zum Lösungsvorgehen bei derartigen Aufgaben.

Dreieck	a	b	c	α	β	γ
1	$\underline{7.07}$	6.0	8.0	$\underline{58.58^\circ}$	$\underline{46.42^\circ}$	75.0°
2	4.3	8.0	$\underline{8.04}$	$\underline{31.09^\circ}$	$\underline{73.91^\circ}$	75.0°
3	$\underline{9.40}$	$\underline{10.65}$	8.0	58.5°	75.0°	$\underline{46.50^\circ}$
4	10.4	6.0	8.0	$\underline{94.88^\circ}$	$\underline{35.09^\circ}$	$\underline{50.04^\circ}$
5	9.3	$\underline{6.17}$	4.2	$\underline{126.44^\circ}$	32.3°	$\underline{21.26^\circ}$

- Wenn das Resultat auf der letzten Ziffer nicht stimmt, kann das auch gut an Rundungsfehlern liegen, weil wir immer nur zwei Nachkommastellen mitnehmen.
- Sind zwei Winkel gegeben, so ist der dritte Winkel aufgrund der Winkelsumme im Dreieck von 180° ebenfalls bekannt!
- Bei allen Aufgaben lohnt es sich zuerst die Grössen zu berechnen, bei denen das einfach geht. Ein gutes Beispiel hierfür ist Dreieck 1. Dort könnte man auf die Idee kommen die Seite a direkt mittels Cosinussatz zu berechnen, denn es sind zwei Seiten und ein Winkel gegeben, sodass sich die dritte Seite eigentlich aus dem Cosinussatz berechnen lassen müsste. Das ist tatsächlich so, aber diese Berechnung ist mühsam, wie ich hier rasch zeige:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot a^2 - 2b\cos\gamma \cdot a + b^2 - c^2 = 0 \qquad \text{QG für } a!$$

Dies ist offensichtlich eine quadratische Gleichung für a. Sie kann bis zu zwei Lösungen haben. Sollte eine Lösung negativ herauskommen, so kann sie nicht richtig sein, denn Längen müssen stets positiv sein. Schauen wir uns an, was hier mit der Mitternachtsformel herauskommt:

$$\begin{aligned} Aa^2 + Ba + C = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1/2} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{2b\cos\gamma \pm \sqrt{4b^2\cos^2\gamma - 4(b^2 - c^2)}}{2} \\ &= b\cos\gamma \pm \sqrt{b^2\cos^2\gamma - (b^2 - c^2)} \\ &= 6.0\cos 75.0^\circ \pm \sqrt{36\cos^2 75.0^\circ - (36 - 64)} \\ &\approx \underline{7.07 \quad \text{oder} \quad -3.96} \end{aligned}$$

Nur die positive Lösung kommt in Frage, also $\underline{a = 7.07}$. Das war nun aber relativ mühsam und so merken wir uns, dass wir es vermeiden wollen, den Cosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ nach den Seiten a oder b aufzulösen. Die Seite gegenüber dem im Cosinussatz enthaltenen Winkel lässt sich hingegen gut berechnen, bei $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ wäre das c gegenüber von γ.

Viel besser ist es zuerst den Winkel β zu bestimmen. Das geht direkt mit dem Sinussatz:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c} \quad \Rightarrow \quad \beta &= \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin\gamma}{c}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{6.0\sin 75.0^\circ}{8.0}\right) \approx \underline{46.42^\circ} \end{aligned}$$

Achtung! Zu jedem positiven Sinuswert gibt es zwei mögliche Dreieckswinkel, also Winkel im Bereich $0^\circ < \beta < 180^\circ$. Kennen wir den einen Winkel, z.B. β, so beträgt der andere aufgrund der Symmetrie der Sinusfunktion $180^\circ - \beta$.
In unserer Rechnung könnte theoretisch also auch der Winkel $\beta = 180^\circ - 46.42^\circ = 133.58^\circ$ herauskommen. Dieser stumpfe Winkel kommt hier aber nicht als zweite Lösung in Frage, denn zusammen mit $\gamma = 75.0^\circ$ würde die Winkelsumme von 180° übertroffen.

Nun, da wir den Winkel β kennen, ist auch der Winkel α bekannt:

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 46.42^\circ - 75.0^\circ = \underline{58.58^\circ}$$

Mit diesem Winkel α lässt sich nun auch die Seite a leicht bestimmen, z.B. mit dem Cosinussatz:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ \Rightarrow \quad a &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \sqrt{6.0^2 + 8.0^2 - 2 \cdot 6.0 \cdot 8.0 \cos 58.58^\circ} \approx \underline{7.07} \end{aligned}$$

- Hier nochmals eine vorgelöste Aufgabe, nämlich zu Dreieck 2.
  Wir kennen die Seiten a und b sowie den Winkel γ. Diesmal müssen wir mit dem Cosinussatz starten, denn zu keiner Seite ist der gegenüberliegende Winkel bekannt. Vielmehr kennen wir den Winkel zwischend en beiden gegebenen Seiten – das "schreit" nach dem Cosinussatz. Wir bestimmen also zuerst die Seite c:

  $$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{4.3^2 + 8.0^2 - 2 \cdot 4.3 \cdot 8.0 \cos 75.0^\circ} \approx \underline{8.04}$$

  Zur Bestimmung eines weiteren Winkel können wir nun wählen, ob wir mit dem Cosinussatz oder dem Sinussatz arbeiten möchten. Hier die Variante mit dem Sinussatz:

  $$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c} = \frac{4.3 \sin 75.0^\circ}{8.04} \approx \underline{31.10^\circ}$$

  Nun käme theoretisch auch wieder der Winkel $180^\circ - 31.10^\circ = 148.90^\circ$ in Frage. Der würde aber mit $\gamma = 75.0^\circ$ wieder die Winkelsumme von 180° übersteigen und kann somit kein gültiges Resultat sein.
  Schliesslich erhalten wir für den letzten Winkel:

  $$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 31.10^\circ - 75.0^\circ = \underline{73.90^\circ}$$

(b) Der Auslöser für eine direkte Anwendung des Cosinussatzes sind die Situationen SSS und SWS, wobei S für eine vorgegebene Seite und W für einen vorgegebenen Winkel steht.
Dem entsprechend können wir ergänzen, dass die Situationen WSW uns SSW eine Anwendung des Sinussatzes nahelegen. Im zweiten Fall SSW – und nur dann – können allenfalls mehrer Lösungen entstehen, wenn die Seite beim Winkel grösser ist als die dem Winkel gegenüberliegende Seite.

(c) Zunächst die weiteren Resultate. Nur bei Dreieck 6 gibt es mehrere Möglichkeiten. Die Werte links gehören zusammen und die Werte rechts ebenso.

Dreieck	a	b	c	α	β	γ
6	6.0	4.5	$\underline{1.76\ /\ 8.93}$	$\underline{37.25^\circ\ /\ 142.75^\circ}$	27.0°	$\underline{10.25^\circ\ /\ 115.75^\circ}$
7	6.0	4.5	$\underline{9.65}$	27.0°	$\underline{19.91^\circ}$	$\underline{133.09^\circ}$
8	6.0	2.5	6.5	$\underline{67.38^\circ}$	$\underline{22.62^\circ}$	$\underline{90.00^\circ}$
9	$\underline{6.57}$	7.5	8.0	50.0°	$\underline{61.04^\circ}$	$\underline{68.96^\circ}$

Hier noch etwas ausführlichere Bearbeitungen der vier Dreiecke:

6: **Nicht eindeutig:** Situation SSW mit längerer Seite am gegebenen Winkel anliegend!
$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{a\sin\beta}{b}\right) = \arcsin\left(\frac{6.0\sin 27^\circ}{4.5}\right) \approx 37.25^\circ =: \alpha_1$
Ebenfalls möglicher stumpfer Winkel: $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 180^\circ - 37.25^\circ = 142.75^\circ$.
Lösung 1 (α spitz): $c_1 = 8.93$, $\alpha_1 = 37.25^\circ$, $\gamma_1 = 115.75^\circ$
Lösung 2 (α stumpf): $c_2 = 1.76$, $\alpha_2 = 142.75^\circ$, $\gamma_2 = 10.25^\circ$.

7: **Eindeutig:** Situation SSW mit kürzerer Seite am gegebenen Winkel anliegend.
$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin\alpha}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{4.5\sin 27^\circ}{6.0}\right) \approx 19.91^\circ$ (nicht anders möglich!)
Lösung: $c = 9.65$, $\beta = 19.91^\circ$, $\gamma = 133.09^\circ$.

8: **Eindeutig:** Situation SSS $\rightarrow$ Cosinussatz
Lösung: $\alpha = 67.38°$, $\beta = 22.62°$, $\gamma = 90.00°$.
Tatsächlich ist das Dreieck 8 exakt rechtwinklig, denn $12-5-13$ ist ein pythagoräisches Zahlentripel und $6-2.5-6.5$ sind dieselben Zahlen, einfach halbiert.

9: **Eindeutig:** Situation SWS $\Rightarrow$ Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$\Rightarrow \quad a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha} = \sqrt{7.5^2+8.0^2-2\cdot 7.5\cdot 8.0\cos 50.0°} \approx 6.57$
Lösung: $a = 6.57$, $\beta = 61.04°$, $\gamma = 68.96°$

2. *Flächenberechnungen*

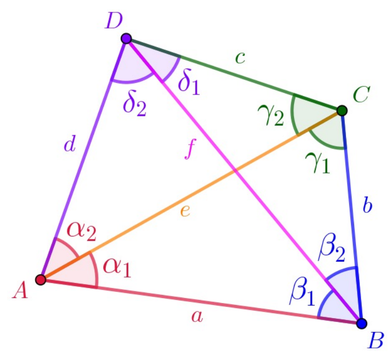
$$\text{Dreiecksfläche:} \quad A = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}$$

Es müssen also stets eine Seite und die zugehörige Höhe bestimmt werden. Praktisch: Beim Eintragen von Höhen entstehen rechtwinklige Dreiecke, in denen die Höhenberechnung einfach wird.

(a) $h_c = b\sin\alpha = 4.3\,\text{cm}\sin 54.2° = 3.49\,\text{cm}$
Sinussatz: $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{b\sin\alpha}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{4.3\,\text{cm}\cdot\sin 54.2°}{6.5\,\text{cm}}\right) = 32.45°$
$\Rightarrow \quad \gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 54.2° - 32.45° = 93.35°$
Cosinussatz: $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \sqrt{6.5^2+4.3^2-2\cdot 6.5\cdot 4.3\cdot\cos 93.35°} = 8.00\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad A = \frac{c\cdot h_c}{2} = \frac{8.00\cdot 3.49}{2} = \underline{\underline{13.95\,\text{cm}^2}}$
(Wenn man mit ungerundeten Werten weiterrechnet, erhält man $13.96\,\text{cm}^2$.)

(b) Cosinussatz: $\alpha = \arccos\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}\right) = \arccos\left(\frac{7.0^2-5.3^2-9.1^2}{-2\cdot 5.3\cdot 9.1}\right) = 50.08°$
$\Rightarrow \quad h_c = b\sin\alpha = 5.3\,\text{cm}\sin 50.08° = 4.06\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad A = \frac{c\cdot h_c}{2} = \frac{9.1\cdot 4.06}{2} = \underline{\underline{18.47\,\text{cm}^2}}$
(Wenn man mit ungerundeten Werten weiterrechnet, erhält man $18.49\,\text{cm}^2$.)

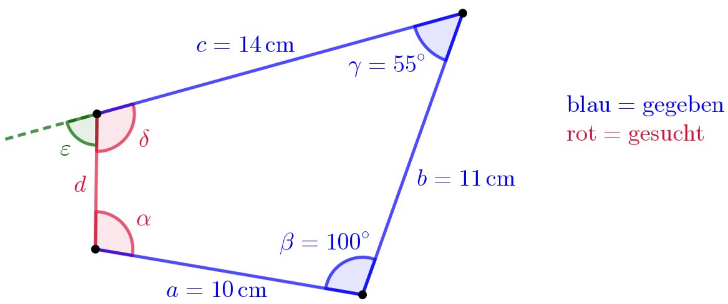
3. *Rechnen in beliebigen Vierecken*



Es ist sinnvoll, bei jedem der vier Eckwinkel Namen für die beiden durch die Diagonale entstehenden Teilwinkel einzuführen. Es gilt:

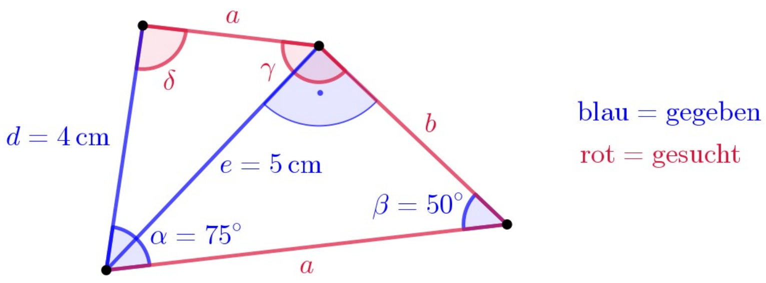
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \beta = \beta_1 + \beta_2 \qquad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \qquad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

(a) Es lohnt sich in einer Skizze der Situation zu verstehen, welche Winkel und Längen gegeben und welche gesucht sind:



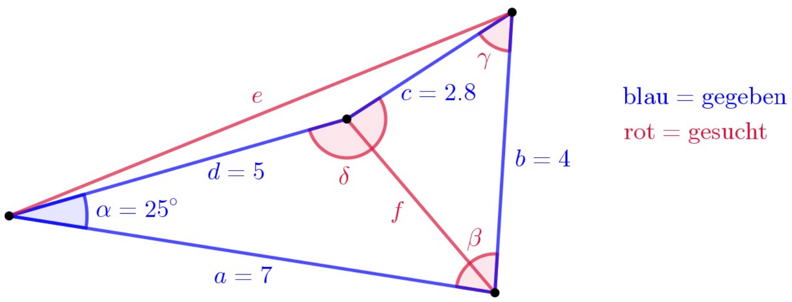
$e = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\beta} = \sqrt{10^2+11^2-2\cdot 10\cdot 11\cos 100°} \approx 16.10\,\text{cm}$
$\frac{\sin\gamma_1}{a} = \frac{\sin\beta}{e} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \arcsin\left(\frac{a\cdot\sin\beta}{e}\right) = \arcsin\left(\frac{10\sin 100°}{16.10}\right) \approx 37.71°$
$\Rightarrow \quad \gamma_2 = \gamma - \gamma_1 = 55° - 37.71° = 17.29°$
$\Rightarrow \quad d = \sqrt{c^2+e^2-2ce\cos\gamma_2} = \sqrt{14^2+16.10^2-2\cdot 14\cdot 16.10\cos 17.29°} \approx \underline{\underline{4.98\,\text{cm}}}$
$\Rightarrow \quad \delta = \arccos\left(\frac{e^2-c^2-d^2}{-2cd}\right) = \arccos\left(\frac{16.10^2-14^2-4.98^2}{-2\cdot 14\cdot 4.98}\right) = 105.99° = \underline{\underline{106.01°}}$
Achtung! Bei der Berechnung von δ mit dem Sinussatz erhält man $\varepsilon = 73.99°$. Dies ist der Aussenwinkel von $\delta = 106.01°$ und besitzt denselben Sinuswert wie dieser. Der Winkel δ muss aber stumpf herauskommen, wie eine genaue Skizze resp. eine Konstruktion des Vierecks (z.B. in GeoGebra) zeigt (vgl. oben) $\Rightarrow$ der Cosinussatz ist hier sicherer!
Winkelsumme im Viereck: $\alpha = 360° - \beta - \gamma - \delta = 360° - 100° - 55° - 106.01° = \underline{\underline{98.99°}}$

(b) Wir skizzieren zuerst die Situation:



Nun können wir zielgerichtet die verschiedenen Berechnungen vornehmen:
Im rechtwinkligen Dreieck ABC ($\gamma_1 = 90°$) kann ohne Sinus- und Cosinussatz gearbeitet werden:
$\sin\beta = \frac{e}{a} \;\Leftrightarrow\; a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{5.0}{\sin 50°} \approx \underline{\underline{6.53\,\text{cm}}}$ und $\tan\beta = \frac{e}{b} \;\Leftrightarrow\; b = \frac{e}{\tan\beta} = \frac{5.0}{\tan 50°} \approx \underline{\underline{4.20\,\text{cm}}}$
Ausserdem: $\alpha_2 = 180° - \beta - \gamma_1 = 180° - 50° - 90° = 40° \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 = \alpha - \alpha_2 = 75° - 40° = 35°$
Cosinussatz: $c = \sqrt{d^2 + e^2 - 2de\cos\alpha_1} = \sqrt{4.0^2 + 5.0^2 - 2\cdot 4.0\cdot 5.0\cos 35°} \approx \underline{\underline{2.87\,\text{cm}}}$
$\Rightarrow \quad \delta = \arccos\left(\frac{e^2-c^2-d^2}{-2cd}\right) = \arccos\left(\frac{5.0^2-2.87^2-4.0^2}{-2\cdot 2.87\cdot 4.0}\right) \approx \underline{\underline{91.90°}}$ (ohne Zwischenrundung: $91.91°$)
$\Rightarrow \quad \gamma = 360° - \alpha - \beta - \delta = 360° - 75° - 50° - 91.9° = \underline{\underline{143.1°}}$ (ohne Zwischenrundung: $143.09°$)

(c) Auch hier erstellen wir zuerst eine Skizze. Sie stellt sich als sehr wichtig heraus, denn das Viereck hat eine etwas spezielle Form – insbesondere liegt die Diagonale e ausserhalb!



Cosinussatz: $f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cos 25°} \approx \underline{\underline{3.25}}$
Cosinussatz: $\gamma = \arccos\left(\frac{f^2-b^2-c^2}{-2bc}\right) = \arccos\left(\frac{3.25^2-4^2-2.8^2}{-2\cdot 4\cdot 2.8}\right) \approx \underline{\underline{53.65°}}$ (genauer: 53.64)
Cosinussatz: $\beta_1 = \arccos\left(\frac{d^2-a^2-f^2}{-2af}\right) = \arccos\left(\frac{5^2-7^2-3.25^2}{-2\cdot 7\cdot 3.25}\right) \approx 40.57°$ (genauer: $40.56°$)
Cosinussatz: $\beta_2 = \arccos\left(\frac{c^2-b^2-f^2}{-2bf}\right) = \arccos\left(\frac{2.8^2-4^2-3.25^2}{-2\cdot 4\cdot 3.25}\right) \approx 43.94°$
$\Rightarrow \quad \beta \approx 40.57° + 43.94° = \beta_1 + \beta_2 = \underline{\underline{84.51°}}$ (genauer: $84.50°$)
Winkelsumme im Viereck: $\delta = 360° - \alpha - \beta - \gamma \approx \underline{\underline{196.84°}}$ (genauer: $196.86°$) überstumpf!
Cosinussatz: $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta} \approx \sqrt{7^2 + 4^2 - 2\cdot 7\cdot 4\cos 84.51°} \approx \underline{\underline{7.72}}$

4. *Dreidimensionales*

(a) Höhe einer Seitenfläche: $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,s$
Es folgt für den Winkel zwischen den gleichen Schenkeln im roten Dreieck mit Seiten h_s, h_s und s:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{s^2 - h_s^2 - h_s^2}{-2\cdot h_s\cdot h_s}\right) = \arccos\left(\frac{s^2 - 2\cdot\frac{3}{4}\,s^2}{-2\cdot\frac{3}{4}\,s^2}\right) = \arccos\left(\frac{1-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}\right) \approx \underline{\underline{70.53°}}$$

Daraus folgt für die anderen beiden Winkel:

$$\beta = \gamma = \frac{180° - \alpha}{2} \approx \frac{180° - 70.53°}{2} \approx \underline{\underline{54.74°}}$$

(b) Wir berechnen zuerst den Winkel γ zwischen a und b:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 43^\circ - 39^\circ = 98^\circ$$

Nun können wir mittels Sinussatz auf die Seiten a und b schliessen:

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{5.0\,\mathrm{m}\cdot\sin 43^\circ}{\sin 98^\circ} \approx 3.44\,\mathrm{m}$$

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{5.0\,\mathrm{m}\cdot\sin 39^\circ}{\sin 98^\circ} \approx 3.18\,\mathrm{m}$$

Mit dem Winkel δ folgt aus der Seite a für die Höhe des Mastes (rechtwinkliges Dreieck!):

$$h = a\tan\delta \approx 3.44\,\mathrm{m}\cdot\tan 42^\circ \approx \underline{\underline{3.10\,\mathrm{m}}}$$

Weiter erhalten wir im selben rechtwinkligen Dreiecken:

$$e = \frac{a}{\cos\delta} \approx \frac{3.44\,\mathrm{m}}{\cos 42^\circ} \approx 4.63\,\mathrm{m}$$

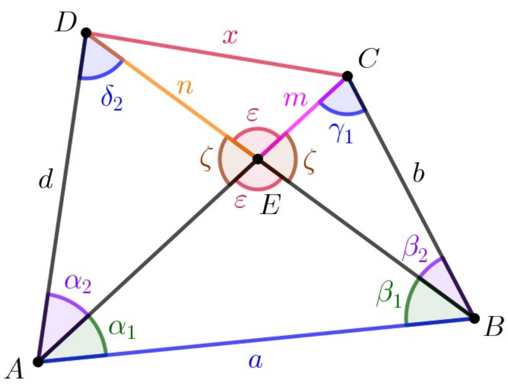
Im anderen rechtwinkligen Dreieck folgt mit dem Satz des Pythagoras:

$$d = \sqrt{b^2+h^2} \approx \sqrt{3.18^2+3.10^2} \approx 4.44\,\mathrm{m}$$

Und somit lässt sich mittels Cosinussatz der Winkel ε bestimmen:

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{c^2-d^2-e^2}{-2de}\right) \approx \arccos\left(\frac{5.0^2-4.44^2-4.63^2}{-2\cdot 4.44\cdot 4.63}\right) \approx \underline{\underline{66.87^\circ}} \quad \text{(genauer: } 66.88^\circ\text{)}$$

5. *Vorwärtskreuzen*



Es gibt durchaus mehrere Varianten, wie man sich von unten nach oben, also von der Seite a zur gesuchten Seite x durch die Figur hindurch arbeiten kann. Ich zeige hier diejenige vor, bei der am Ende der Cosinussatz im Dreieck CDE angewendet wird. Damit das geht, müssen vorher der Winkel ε und die beiden Diagonalen-Teilstrecken m und n bestimmt werden.

Alle im weiteren Verlauf benötigten Winkel lassen sich durch einfache Subtraktionen mittels Winkelsummen bestimmen:

$$\varepsilon = 180^\circ - \alpha_1 - \beta_1 = 101^\circ \qquad \zeta = 180^\circ - \varepsilon = 79^\circ$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 = 75^\circ \qquad \delta_2 = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 = 62^\circ$$

Nun berechne ich zuerst die Seite b mit dem Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin\gamma_1}{a} = \frac{\sin\alpha_1}{b} \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{a\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = \frac{71.0\cdot\sin 37^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 44.236$$

Daraus kann nun wieder mit dem Sinussatz auf die Seite m im Dreieck BCE geschlossen werden: Nun berechne ich zuerst die Seite b mit dem Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin\zeta}{b} = \frac{\sin\beta_2}{m} \quad\Leftrightarrow\quad m = \frac{b\sin\beta_2}{\sin\zeta} = \frac{44.236\cdot\sin 26^\circ}{\sin 79^\circ} \approx 19.755$$

Dieselben beiden Schritte machen wir auf der linken Seite der Figur zur Bestimmung von n:

$$\frac{\sin\delta_2}{a} = \frac{\sin\beta_1}{d} \quad\Leftrightarrow\quad d = \frac{a\sin\beta_1}{\sin\delta_2} = \frac{71.0\cdot\sin 42^\circ}{\sin 62^\circ} \approx 53.806$$

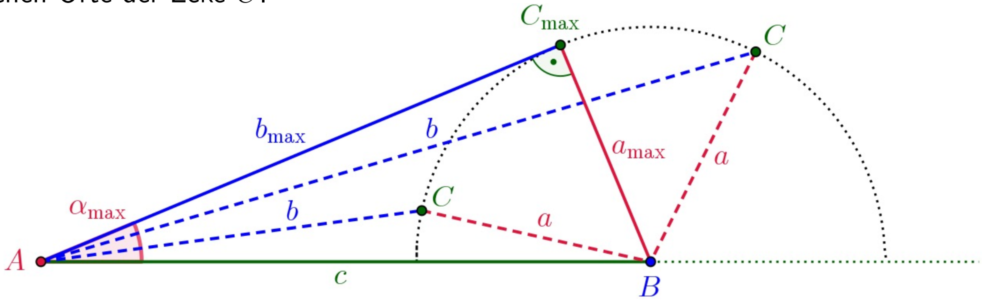
$$\frac{\sin\zeta}{d} = \frac{\sin\alpha_2}{n} \quad\Leftrightarrow\quad n = \frac{d\sin\alpha_2}{\sin\zeta} = \frac{53.806\cdot\sin 39^\circ}{\sin 79^\circ} \approx 34.495$$

Mit den Strecken m und n lässt sich nun via Cosinussatz die gesuchte Strecke x bestimmen:

$$x = \sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\varepsilon} = \sqrt{19.755^2+34.495^2-2\cdot 19.755\cdot 34.495\cdot\cos 101^\circ} \approx 42.898 \approx \underline{\underline{42.90\,\mathrm{m}}}$$

6. *Weitere Fragen zu Dreiecken*

(a) In der folgenden Skizze ist die Seite $c = 6.5$ fix vorgegeben. Der Halbkreis mit Radius $a = 2.5$ zeigt die möglichen Orte der Ecke C.



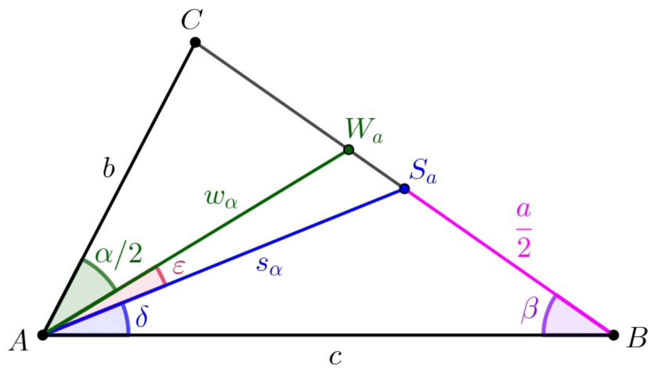
Der Winkel α kann offensichtlichnicht beliebig gross werden. Er wird maximal, wenn bei C ein 90°-Winkel vorliegt. Dann haben wir die Situation eines rechtwinkligen Dreiecks und zur Berechnung von b brauchen wir gar keine Trigonometrie, sondern können direkt den Satz des Pythagoras anwenden:

$$b_{\max} = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{6.5^2 - 2.5^2} = \underline{\underline{6}} \quad \text{exakt!}$$

Für den maximalen Winkel α ergibt sich:

$$\alpha_{\max} = \arcsin\left(\frac{2.5}{6.5}\right) = \underline{\underline{22.6°}}$$

(b) Gesucht ist der Winkel ε zwischen w_α und s_a:



Dabei gilt für die drei eingezeichneten Winkel bei der Ecke A:

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \varepsilon + \delta \qquad \text{resp.} \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{2} - \delta$$

Wir sollten also die beiden Winkel α und δ bestimmen, um schliesslich ε zu erhalten. Aus dem Cosinussatz folgt sofort aus den drei gegebenen Seiten a, b und c:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) = 62.502° \qquad \text{und} \qquad \beta = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right) \approx 35.027°$$

Mit dem Winkel β schliessen wir mittels Cosinussatz auf die Länge der Schwerlinie s_a:

$$s_a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c \cdot \cos\beta} \approx 6.495$$

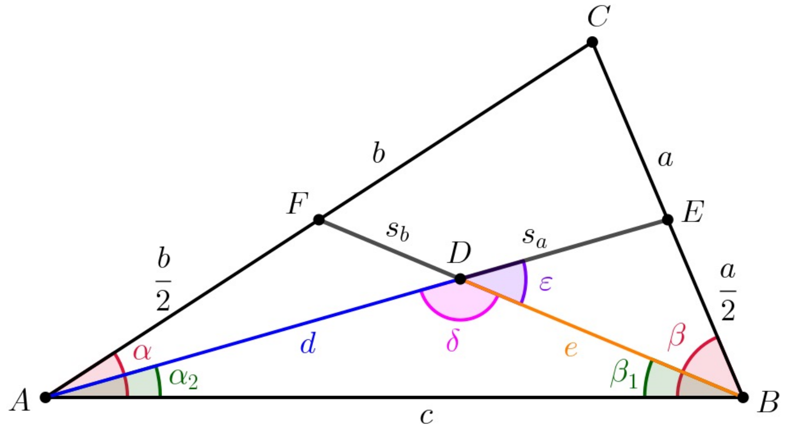
Damit ergibt sich – nochmals mit dem Cosinussatz – für den Winkel δ:

$$\delta = \arccos\left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - s_a^2 - c^2}{-2 \cdot s_a \cdot c}\right) = 22.058°$$

Und somit können wir nun den Zwischenwinkel ε berechnen:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2} - \delta \approx 9.193° = \underline{\underline{9.19°}}$$

(c) Die Situation sieht folgendermassen aus:



Aus den bekannten Eckwinkeln α und β möchten wir ε bestimmen. Natürlich ist mit α und β quasi auch γ gegeben:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 33^\circ - 67^\circ = 80^\circ$$

Da nur Winkel vorgegeben sind, haben wir die Wahlfreiheit bezüglich der absoluten Grösse der Figur. D.h., wir dürfen selber eine der Seiten festlegen, z.B. $c = 100$, und damit dann alle anderen Seiten und Winkel berechnen.

Zu Beginn können wir aus $c = 100$ die anderen beiden Dreiecksseiten berechnen::

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{100\,\sin 33^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 55.3041$$

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{100\,\sin 67^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 93.4705$$

Als Nächstes berechnen wir mittels Cosinussatz in den Dreiecken ABE und ABF die beiden Schwerlinien s_a und s_b:

$$s_a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot c\cdot\cos\beta} \approx \sqrt{\left(\frac{55.3041}{2}\right)^2 + 100^2 - 55.3041\cdot 100\,\cos 67^\circ} \approx 92.7563$$

$$s_b = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{b}{2}\cdot c\cdot\cos\alpha} \approx \sqrt{\left(\frac{93.4705}{2}\right)^2 + 100^2 - 93.4705\cdot 100\,\cos 33^\circ} \approx 65.9173$$

Damit können wir den Sinussatz in den Dreiecken ABE und ABF anwenden, um die Winkel α_2 und β_1 zu erhalten:

$$\frac{\sin\beta}{s_a} = \frac{\sin\alpha_2}{\frac{a}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{a\sin\beta}{2s_a}\right) \approx \arcsin\left(\frac{55.3041\,\sin 67^\circ}{2\cdot 92.7563}\right) \approx 15.9272^\circ$$

$$\frac{\sin\alpha}{s_b} = \frac{\sin\beta_1}{\frac{b}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1 = \arcsin\left(\frac{b\sin\alpha}{2s_b}\right) \approx \arcsin\left(\frac{93.4705\,\sin 33^\circ}{2\cdot 65.9173}\right) \approx 22.7150^\circ$$

Nun sind wir praktisch fertig. Es gibt nur noch aus diesen Winkeln über die Winkelsummen auf ε zu schliessen. Dabei gibt es einen einfachen Trick, denn im Dreieck ABD ist der Winkel ε der sogenannte Aussenwinkel zum Winkel δ. Ein solcher Aussenwinkel ist aber stets gleich gross wie die beiden anderen Winkel im Dreieck. Es gilt also:

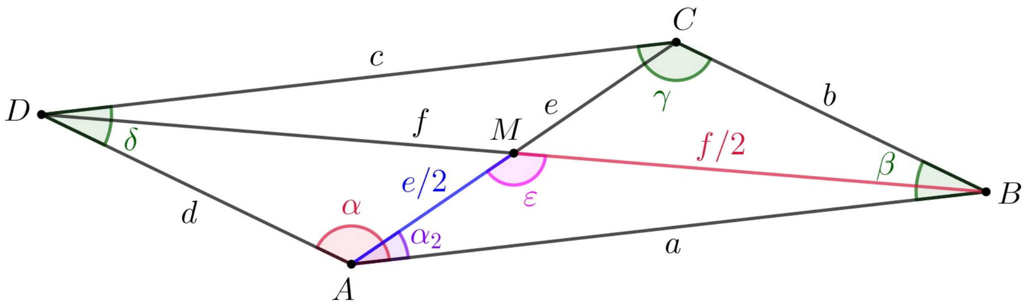
$$\varepsilon = \alpha_2 + \beta_1 \approx 15.9272^\circ + 22.7150^\circ = 38.6422^\circ \approx \underline{\underline{38.64^\circ}}$$

Hier noch rasch der Beweis für den "Aussenwinkel-Trick":

$$\delta = 180^\circ - \alpha_2 - \beta_1 \quad \text{und} \quad \delta = 180^\circ - \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = \alpha_2 + \beta_1$$

7. *Mehr Berechnungen in Vierecken*

(a) Im Parallelogramm sind aus Symmetriegründen die jeweils gegenüberliegenden Seiten und Eckwinkel gleich gross: $a = c$, $b = d$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. Zudem halbieren sich die Diagonalen e und f gegenseitig. Hier die Skizze mit den korrekten Proportionen:



Wir können zuerst ganz direkt via Cosinussatz auf die Eckwinkel schliessen, z.B.:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$$
$$\Leftrightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{e^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right) = \arccos\left(\frac{8^2 - 13^2 - 7^2}{-2\cdot 13\cdot 7}\right) \approx 32.204^\circ \approx \underline{\underline{32.20^\circ}} = \delta$$

Nun gilt im Parallelogramm, wie zu Beginn erwähnt, $\beta = \delta$ und $\alpha = \gamma$. Zudem beträgt die Winkelsumme im Viereck 360°, woraus sich auf α resp. γ schliessen lässt:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\alpha + 2\beta \stackrel{!}{=} 360^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 32.204^\circ \approx 147.796^\circ \approx \underline{\underline{147.80^\circ}} = \gamma$$

Weiter folgt für den Teil-Eckwinkel α_2, der im Dreieck ABC gegenüber der Seite b liegt, mit dem Sinussatz:

$$\frac{\sin\alpha_2}{b} = \frac{\sin\beta}{e} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{b\beta}{e}\right) \approx \arcsin\left(\frac{7\sin 32.204^\circ}{8}\right) \approx 27.796^\circ$$

Da sich die Diagonalen gegenseitig halbieren, können wir im Dreieck ABM ($M =$ Diagonalenschnittpunkt) mittels Cosinussatz mit dem Winkel α_2 aus der Seite a und der Hälfte der Diagonale e auch die Hälfte der Diagonale f berechnen:

$$\frac{f}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 - 2a\cdot\frac{e}{2}\cos\alpha_2} \approx \sqrt{13^2 + 4^2 - 2\cdot 13\cdot 4\cos 27.796^\circ} \approx 9.644$$

Damit finden wir für den stumpfen Winkel beim Diagonalenschnittpunkt:

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cos\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = \arccos\left(\frac{a^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2}{-2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}}\right) \approx \arccos\left(\frac{13^2 - 4^2 - 9.644}{-2\cdot 4\cdot 9.644}\right) \approx 141.041^\circ \approx \underline{\underline{141.04^\circ}}$$

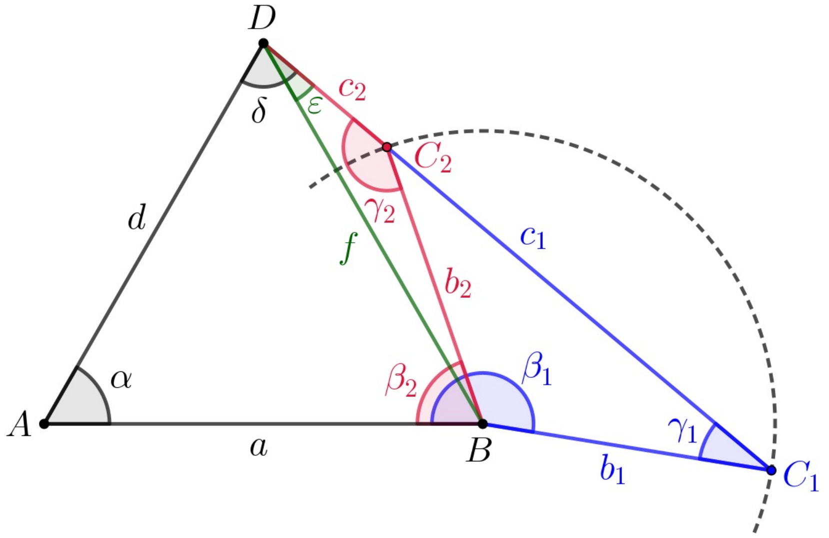
Die Fläche eines Parallelogramms ist das Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe, also z.B. $A = a\cdot h_a$. Nun lässt sich so eine Höhe leicht eintragen und dann mit der Trigo im rechtwinkligen Dreieck bestimmen, so z.B. die Höhe h_a im Dreieck ABC:

$$h_a = e\cdot\sin\alpha_2 \approx 8\cdot\sin 27.796^\circ \approx 3.731$$

Damit folgt für die Fläche des Parallelogramms:

$$A = a\cdot h_a \approx 13\cdot 3.731 \approx 48.503 \approx \underline{\underline{48.50}}$$

(b) Zunächst die Situationsskizze, die nach Eintragung von a, α, d und δ aufzeigt, dass es für die Seite b zwei Lösungen geben muss:



Zunächst lässt sich die Diagonale f berechnen. Das liesse sich mit dem Cosinussatz unter Verwendung von a, d und α bewerkstelligen. Allerdings ist das Dreieck ABD gleichseitig, wie wir aus den Angaben ablesen: $a = d = 6$ und $\alpha = 60°$. Somit hat die Diagonale ebenfalls exakt die Länge $f = 6$. Ausserdem finden wir: $\varepsilon = \delta - 60° = 80° - 60° = 20°$.

Variante 1: γ spitz: Mittels Sinussatz erhalten wir für den spitzen Winkel γ_1:

$$\frac{\sin\gamma}{f} = \frac{\sin\varepsilon}{b} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \arcsin\left(\frac{f\sin\varepsilon}{b}\right) = \arcsin\left(\frac{6\sin 20°}{4}\right) \approx 30.866° \approx \underline{\underline{30.87°}}$$

Aus der Winkelsumme im Viereck folgt für den überstumpfen Winkel β_1:

$$\beta_1 = 360° - \alpha - \gamma_1 - \delta = 360° - 60° - 30.866° - 80° = 189.134° \approx \underline{\underline{189.13°}}$$

Zur Berechung der Seite c_1 benötigen wir im Dreieck BC_1D den stumpfen Winkel bei B:

$$\beta_1 - 60° = 189.134° - 60° = 129.134°$$

Nun folgt mit dem Sinussatz im Dreieck BC_1D:

$$c_1 = \frac{f\sin 129.134°}{\sin\gamma_1} = \frac{6\sin 129.134°}{\sin 30.866°} \approx 9.071 \approx \underline{\underline{9.07}}$$

Variante 2: γ stumpf: Der andere mögliche Winkel γ ist der Komplementärwinkel zu γ_1:

$$\gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 180° - 30.866° = 149.134 \approx \underline{\underline{149.13°}}$$

Wiederum folgt damit aus der Winkelsumme im Viereck für den nun spitzen Winkel β_2:

$$\beta_2 = 360° - \alpha - \gamma_2 - \delta = 360° - 60° - 149.134° - 80° = 70.866° \approx \underline{\underline{70.87°}}$$

Zur Berechung von c_2 benötigen wir im Dreieck BC_2D den spitzen Winkel bei B:

$$\beta_2 - 60° = 70.866° - 60° = 10.866°$$

Im Dreieck BC_2D ergibt sich via Sinussatz somit:

$$c_2 = \frac{f\sin 10.866°}{\sin\gamma_2} = \frac{6\sin 10.866°}{\sin 149.134°} \approx 2.2047 \approx \underline{\underline{2.20}}$$