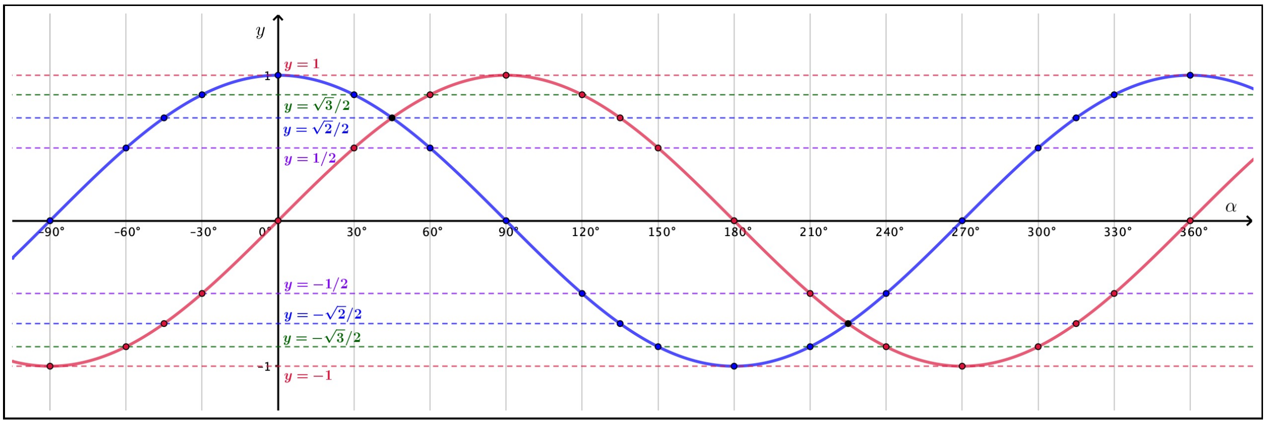
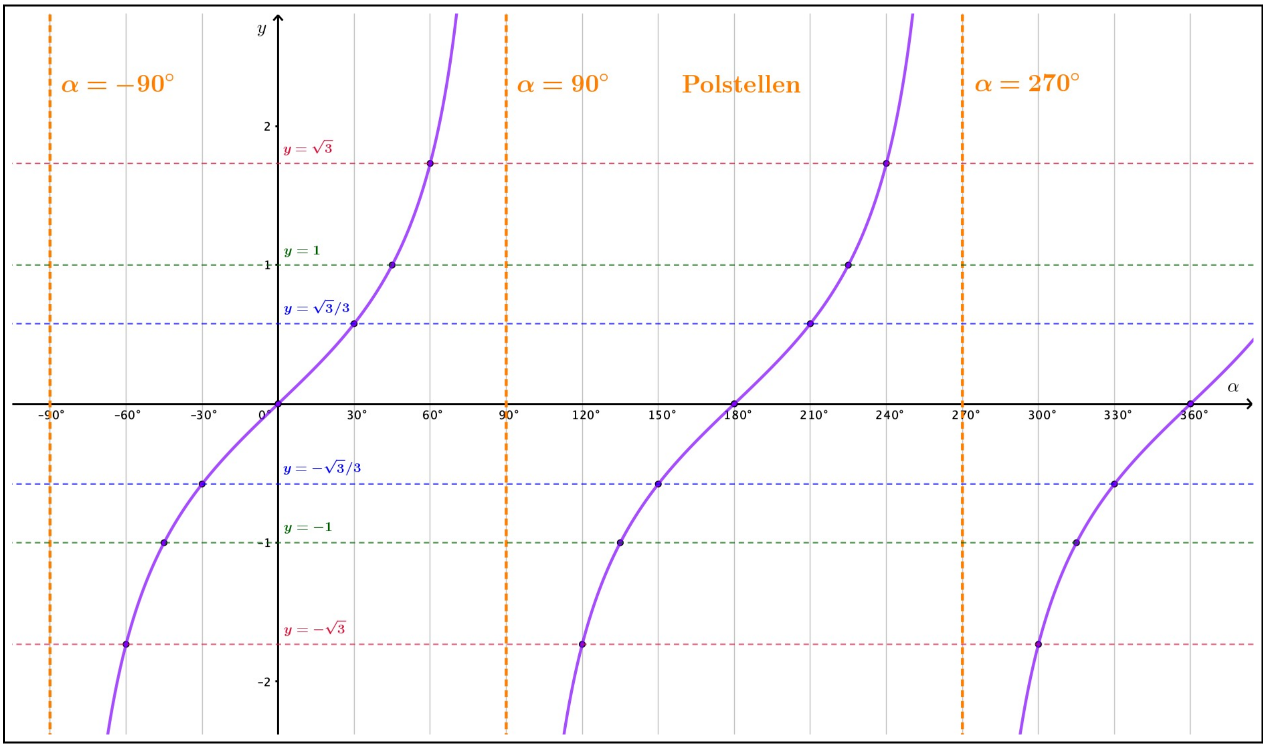
LÖSUNGEN SERIE 2: Winkelfunktionen nach der Definition am Einheitskreis

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. 

2. 

3. Für $-90° < \alpha < 360°$ sollten wir uns die Sinus- und Cosinuswerte im Kopf überlegen können, weil wir die Kurven in diesem Bereich gut kennen und die exakten Werte zwischen $0°$ und $90°$ im Kopf haben.

   Liegt ausserhalb von $[-90°; 360°]$, so können wir uns durch (mehrfache) Addition/Subtraktion von $360°$ (= Periode) in diesen Bereich zurückarbeiten, z.B.:

$$\sin(-225°) = \sin(-225° + 360°) = \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

oder: $$\sin 18\,300° = \sin(\underbrace{18\,000°}_{=50\cdot 360°} + 300°) = \sin 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Bei der Tangensfunktion liegt der wohlbekannte Bereich zwischen $-90°$ und $+90°$ und die Periode beträgt $180°$. Somit erhalten wir z.B. für einen deutlich negativeren Winkel:

$$\tan(-240°) = \tan(-240° + 180°) = \tan(-60°) = -\sqrt{3}$$

Für die gesuchten Werte erhalten wir auf diese Weise:

$\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$	$\tan 315° = -1$	$\sin 330° = -\dfrac{1}{2}$
$\cos(-45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(-225°) = \sin 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 300° = \dfrac{1}{2}$
$\tan(-135°) = \tan 45° = 1$	$\sin 240° = -\dfrac{1}{2}$	$\tan 405° = \tan 45° = 1$
$\sin 18\,300° = \sin 300° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(-1380°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$	$\tan(-240°) = \tan(-60°) = -\sqrt{3}$

4. Wir benutzen mehrfach den trigonometrischen Pythagoras:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

Ausserdem verwenden wir bei (a), dass $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(a) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \tan^2\alpha$

(b) $2\cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha - \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(1 - \sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

5. Es ergeben sich die folgenden exakten Winkelwerte:

(a) $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = 60°$ (b) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$ (c) $\arcsin(-1) = -90°$

(d) $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -30°$ (e)* $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = 15°$ (f)* $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) = 105°$

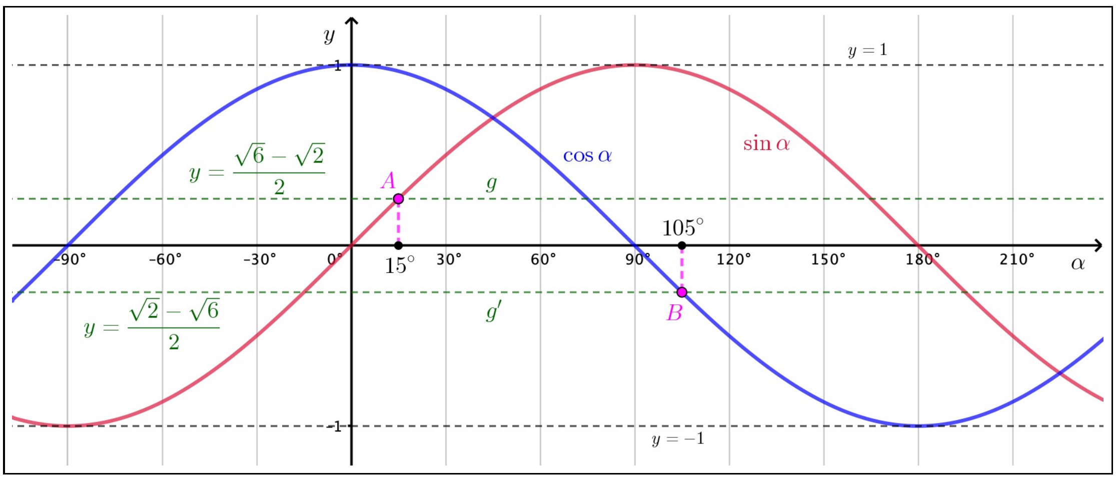
Zu (e): Mit $15°$ ergibt sich ein exakter Winkelwert! Das heisst doch umgekehrt, dass wir auch bei ein paar weiteren Winkeln – also nicht nur bei $0°$, $30°$, $45°$, etc. – exakte Werte angeben können. Offenbar ist $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Wir werden später lernen solche komplizierteren exakten Werte zu berechnen.

Zu (f): Mit $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ kennen wir einen weiteren exakten Wert der Sinusfunktion und somit eben auch der Cosinusfunktion, denn diese beiden Funktionen sind ja direkt miteinander verwandt. Wir können nun unsere Symmterierelationen benutzen, um herauszufinden, bei welchem Winkel α die Cosinusfunktion den Wert $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ annimmt:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = -\sin 15° = \sin(-15°) = \cos\left(90° - (-15°)\right) = \cos 105°$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und dass $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.

Die ganze Aufgabe lässt sich aber ebenso gut grafisch lösen (Erläuterung nächste Seite oben):



Überlegungen zur grafischen Lösung:

i. Wir kennen die Verläufe von Sinus- und Cosinuskurve!

ii. Nun betrachten wir die Stelle $\alpha = 15°$ und können den Punkt A, dessen exakte Höhe $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ uns aus Aufgabe (e) bekannt ist.

iii. Alle Punkte auf dieser Höhe bilden die Gerade g, die wir an der α-Achse spiegeln können, um alle Punkte auf der Höhe $y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, also die Gerade g' zu erhalten.

iv. Nun suchen wir nach Stellen $\alpha \in [0°; 180°]$, wo der Cosinus g' schneidet, denn genau dort hat er eben den Wert $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Bemerke: Nur das Intervall $[0°; 180°]$ ist relevant, weil der Arcuscosinus per Definition eine Abbildung von $[-1; 1]$ nach $[0°; 180°]$ ist.

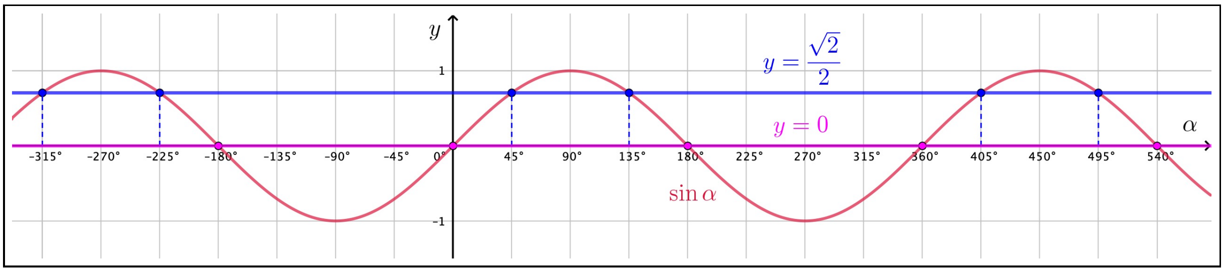
v. So finden wir den Punkt B, zu dem aus Symmetriegründen nur der Winkel $105°$ gehören kann.

6. Bei der Frage nach dem Wert einer Arcusfunktion gibt es genau eine Lösung, denn die Arcusfunktionen sind, wie alle Funktionen, **eindeutig**. Wir haben den Wertebereich entsprechend eingeschränkt (vgl. Skript Abschnitt 2.8)! Am Beispiel: $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hat genau einen Wert, nämlich $60°$.

   Anders bei einer trigonometrischen Gleichung. Sie fragt nach allen möglichen Winkeln α, durch die die Gleichung wahr wird. Das sind im Beispiel $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ unendlich viele. Selbstverständlich gehört $60°$ dazu, aber es ist eben nur eine Möglichkeit, aus der allerdings alle weiteren Lösungen durch Ausnutzung von Symmetrie und Periodizität der Cosinusfunktion gewonnen werden können.

7. Eine grafische Betrachtung ist stets hilfreich. Mit der Zeit kann man sowas auch im Kopf, aber zu Beginn ist es sicher hilfreich, sich jeweils rasch die Situation zu skizzieren resp. eine Sinus-, Cosinus- oder Tangenskurve vor sich zu haben.

   (a) $\sin\alpha = 0$ fragt nach allen Winkeln α, für die die Sinusfunktion den Wert 0 annimmt. Das sind alle ganzzahligen Vielfachen von $180°$, wie die folgende Grafik, die auch gerade für die Aufgabe (d) gedacht ist, zeigt:

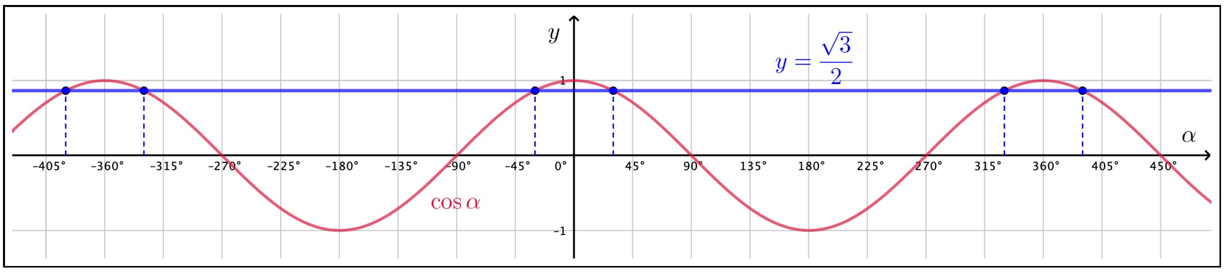


   Für die Lösungsmenge notieren wir:

$$\sin\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbb{L} = \underbrace{\{\ldots, -180°, 0°, 180°, 360°, \ldots\}}_{\text{aufzählend}} = \underbrace{\{\alpha = k\cdot 180° \mid k \in \mathbb{Z}\}}_{\text{beschreibend}}$$

   Die aufzählende Form der Lösungsmenge ist hier zwar rascher erfassbar, in aller Regel wollen wir aber die beschreibende Form verwenden, weil sie in den meisten Fällen übersichtlicher und kompakter ist, wie die nächste Aufgabe demonstriert.

   (b) Mit der Cosinusfunktion lässt sich gleichermassen skizzieren:



Es gibt nun zwei "Lösungsgruppen", innerhalb derer die Lösungen immer um $360°$ verschoben sind. Die eine enthält $\alpha = 30°$, die andere $\alpha = -30°$. Aufzählend könnten wir das so notieren:

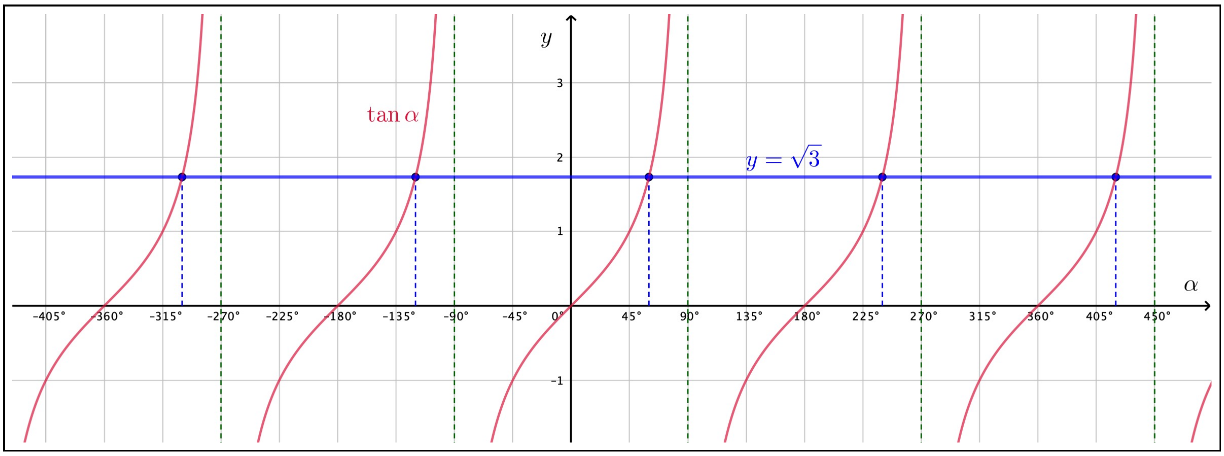
$$\mathbb{L} = \{\ldots, -330°, 30°, 390° \ldots\} \cup \{\ldots, -390°, -30°, 330° \ldots\}$$

Dabei steht $\cup$ für die **Mengenvereinigung**: Zur Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gehören alle Winkel, die zur ersten oder zur zweiten Menge gehören. Wir möchten aber auch diese Lösungsmenge in beschreibender Form notieren. Das sieht dann so aus:

$$\mathbb{L} = \{\alpha = \pm 30° + k \cdot 360° \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

In Worten: "Zur Lösungsmenge $\mathbb{L}$ zählen alle Winkel α, die sich von $30°$ oder von $-30°$ um ein ganzzahliges Vielfaches von $360°$ unterscheiden."

(c) Bei der Tangensfunktion gehen wir ganz genau gleich vor: skizzieren:



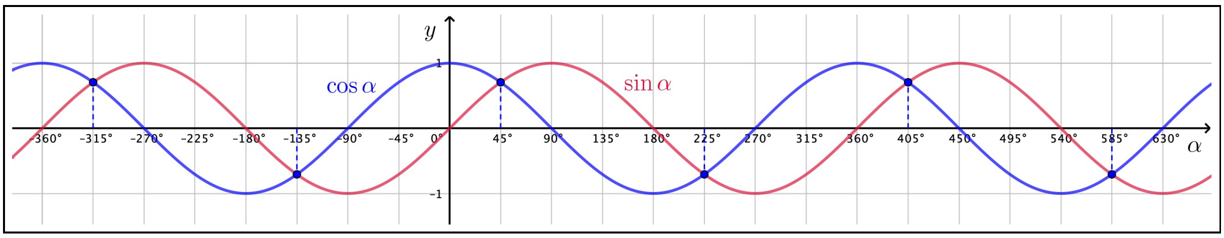
Für die Lösungsmenge ergibt sich – jetzt nur noch in beschreibender Form:

$$\mathbb{L} = \{\alpha = 60° + k \cdot 180° \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

(d) Die Grafik hierzu findet sich bei Aufgabe (a). Nun wird es auch in der beschreibenden Form nochmals etwas komplizierter, weil wir beim Sinus nicht so praktisch mit einem $\pm$ arbeiten können. Hier finden wir:

$$\mathbb{L} = \{\alpha = 45° + k \cdot 360° \text{ oder } \alpha = 135° + k \cdot 360° \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

(e) Bei derartigen trigonometrischen Gleichungen wollen wir vor allem in der Lage sein die Situation grafisch zu verstehen und daraus die Lösungsmenge abzuleiten. Hier fragen wir nach den Schnittstellen von Sinus- und Cosinusfunktion:



Als Lösungsmenge ergibt sich:

$$\mathbb{L} = \{\alpha = 45° + k \cdot 180° \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Im Falle dieser Aufgabe hätten wir das Resultat auch relativ einfach "rechnerisch" erhalten können:

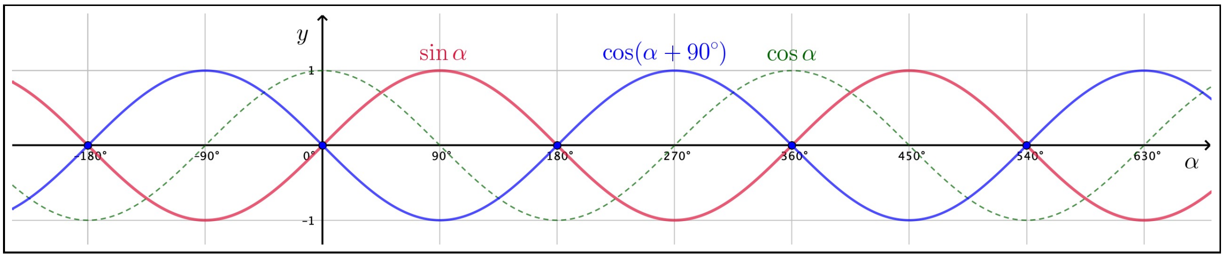
$$\sin\alpha = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha = 1$$

Und dann kann man sich leicht überlegen, bei welchen Winkeln der Tangens den Wert 1 annimmt...

(f) Was soll man sich unter $\cos(90°+\alpha)$ vorstellen? Die Antwort fällt leicht, wenn wir das Cosinusargument umgekehrt aufschreiben:

$$\cos(90° + \alpha) = \cos(\alpha + 90°)$$

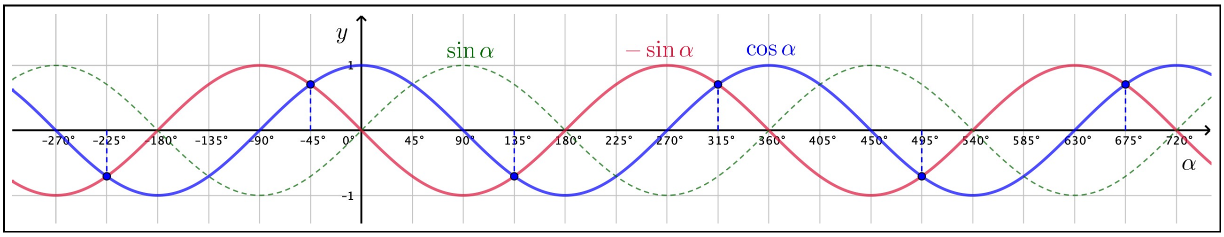
Wir erinnern uns: Der Graph von $f(x+C)$ ist der um C nach links verschobene Graph von $f(x)$. Also gehört zu $\cos(\alpha + 90°)$ die um $90°$ nach links verschobene Cosinuskurve – und schon können wir die Situation grafisch lösen:



Für die Lösungsmenge lesen wir ab:

$$\mathbb{L} = \{\alpha = k \cdot 180° \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

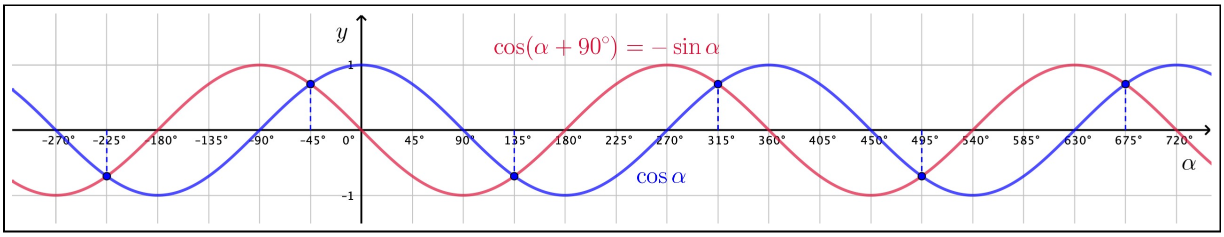
(g) $-\sin\alpha$ ist die an der α-Achse gespiegelte Sinusfunktion:



Daraus schliessen wir auf die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{\alpha = -45° + k \cdot 180° \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

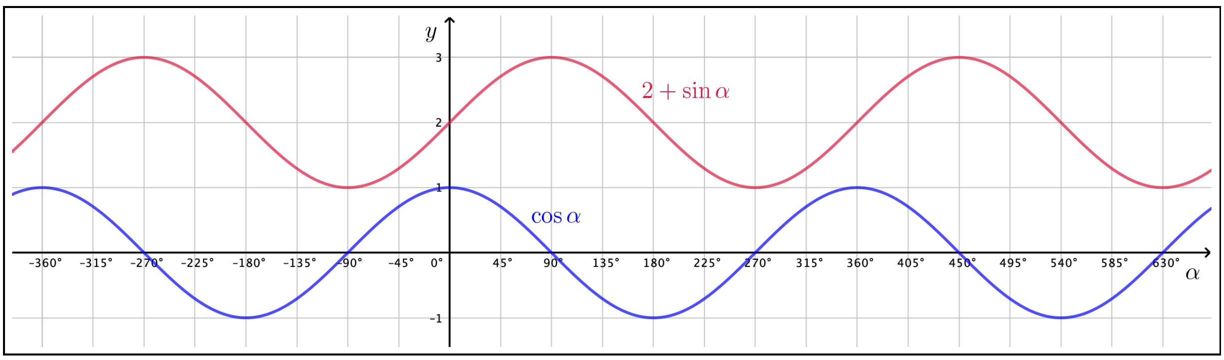
(h) $\cos(90°+\alpha)$ ist immer noch die um $90°$ nach links verschobene Cosinuskurve. Das ist aber, wie wir eben gerade schon bemerkt haben könnten, das Negative der Sinusfunktion, also $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$:



Somit ergibt sich die gleiche Lösungsmenge wie unter (g):

$$\mathbb{L} = \{\alpha = -45° + k \cdot 180° \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

(i) Der Graph von $2 + \sin\alpha$ ist die um 2 Einheiten nach oben verschobene Sinusfunktion. Diese weist gar keine Schnittpunkte mit der Cosinusfunktion auf. Die Lösungsmenge ist somit leer: $\mathbb{L} = \{\,\}$:



8. Wenn es sich um eine Identität handeln soll, dann müssen linke und rechte Seite für jeden beliebigen Winkel α denselben Wert ergeben. Das bedeutet, die zu den beiden Gleichungsseiten gehörenden Funktionsgraphen müssen dieselben sein. Folglich können wir stets grafisch überlegen, ob die Identität zutrifft.

   (a) Zu $\cos(-90° + \alpha) = \cos(\alpha - 90°)$ gehört die um $90°$ nach rechts verschobene Cosinuskurve, die sich aber genau mit der Sinuskurve deckt. $\Rightarrow$ Identität ist **korrekt**!

   (b) Soll die vorgeschlagene Identität $\tan(450° + \alpha) \equiv \tan\alpha$ stimmen, dann müsste $450°$ ein Vielfaches der Periode der Tangensfunktion, also von $180°$ sein. Das ist aber nicht so. $\Rightarrow$ Identität ist **falsch**!

   (c) Der "Identitätsvorschlag" $\sin(270° - \alpha) \equiv \sin(270° + \alpha)$ behauptet, dass der Sinus achsensymmetrisch bezüglich $\alpha = 270°$ ist, dass wir also denselben Sinuswert erhalten, wenn wir von $270°$ aus um einen beliebigen Winkel α nach rechts gehen, wie wenn wir um denselben Winkel α nach links gehen. Das trifft zu, wie wir durch Betrachtung der Sinuskurve bestätigen können. $\Rightarrow$ Identität ist **korrekt**!

   (d) $\cos(-270° - \alpha) \equiv \cos(270° - \alpha)$ behauptet, dass sich bei der Cosinusfunktion derselbe Wert ergibt, wenn wir von der Stelle $-270°$ aus um einen beliebigen Winkel α nach links gehen, wie wenn wir von der Stelle $270°$ um α nach links gehen. Dies aber kann nur stimmen, wenn die zwei Winkel $-270°$ und $270°$ genau ein Vielfaches einer Periode von $360°$ entfernt voneinander wären. Allerdings geht $540° : 360°$ nicht auf. $\Rightarrow$ Identität ist **falsch**!

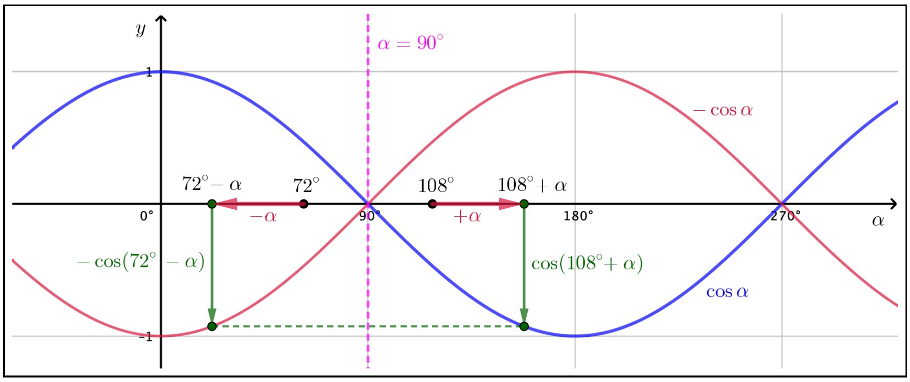
   (e) Die Behauptung $\sin(5400° + \alpha) \equiv \sin\alpha$ stimmt genau dann, wenn $5400°$ ein ganzzahliges Vielfaches der Sinusperiode $360°$ ist. Dies trifft tatsächlich zu, denn $5400° : 360° = 15$. $\Rightarrow$ Identität ist **korrekt**!

   (f) $\cos(108° + \alpha) \equiv -\cos(432° - \alpha)$: Ergibt sich stets derselbe Wert, wenn wir von $108°$ aus um einen beliebigen Winkel α nach rechts gehen und von diesem Winkel dann den Cosinuswert nehmen, wie wenn wir von $432°$ aus um denselben Winkel α nach links gehen und dort dann das Negative des Cosinuswertes berechnen?

   Bevor wir eine Grafik betrachten, können wir uns die Zahlen ein wenig vereinfachen. Da die Cosinusfunktion eine Periode von $360°$ aufweist, gilt automatisch:

   $$-\cos(432° - \alpha) = -\cos(72° - \alpha)$$

   Nun schauen wir uns eine dazu passende Grafik an:



   Tatsächlich ist $\cos(108° + \alpha) \equiv -\cos(72° - \alpha)$, denn es geht hier um die Achsensymmetrie zwischen $\cos\alpha$ und $-\cos\alpha$ bezüglich $\alpha = 90°$. Da $72°$ und $108°$ beide gleich weit von $90°$ entfernt sind, entspricht das negative der Cosinusfunktion an der Stelle $72° - \alpha$ dem Cosinus bei $108° + \alpha$.

   Diese – wie auch die anderen Identitäten – könnten wir übrigens auch "ungrafisch beweisen", indem wir einfach die Symmetrien und Periodizitäten der Winkelfunktionen konsequent ausnutzen. So könnten wir hier kontinuierlich umformen:

   $$-\cos(432° - \alpha) \overset{\text{i.}}{=} -\cos(72° - \alpha) \overset{\text{ii.}}{=} -\cos(-72° + \alpha) \overset{\text{iii.}}{=} \cos(180° - 72° + \alpha) = \cos(108° + \alpha)$$

   Notizen zu den einzelnen Schritten:

   i. Periodizität: $\cos(360° + \alpha) = \cos\alpha$.

   ii. Hauptsymmetrie des Cosinus (bezüglich y-Achse): $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

   iii. Spiegelung von Sinus- oder Cosinusfunktion an der α-Achse entspricht Verschiebung um $180°$:

   $$-\sin\alpha = \sin(\alpha + 180°) \qquad \text{und} \qquad -\cos\alpha = \cos(\alpha + 180°)$$