LÖSUNGEN SERIE 14: Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. *Funktionsansätze*

   (a) Die **ungedämpfte Schwingung** eines Federpendels wird beschrieben durch die Funktion:

   $$h(t) = A \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

   $A =$ **Amplitude** $=$ Ausschlagsstärke der Schwingung
   $=$ Distanz zwischen mittlerer Lage und maximalem Ausschlag (beim Federpendel in m)

   $\omega =$ **Kreisfrequenz** (in rad pro s)
   $=$ Winkelgeschwindigkeit für die Sinusschwingung, durch die die Schwingung beschrieben wird

   $T =$ **Schwingungsperiode** $=$ Dauer eines einzelnen Schwingungszyklus (in s)

   $f =$ **Schwingungsfrequenz** $=$ Anzahl Schwingungszyklen pro Zeitspanne (in Hz)

   Diese Pendelschwingung beschreibt einen sogenannten **harmonischen Oszillator**. Viele schwingende Objekte können in erster Näherung durch eine solche Schwingung beschrieben werden. Es ist auch für die klassische und für die Quantenmechanik ein wiederkehrendes Beispiel, an dem elementare Überlegungen gut illustriert werden können. Auch innerhalb der Akustik kommt diese ungedämpfte Schwingung gleich wieder vor als Teil von komplizierteren Funktionen.

   (b) Für die **Schwebung** ergibt sich aus der Addition der beiden einzelnen sinusartigen Schalldruckschwankungen (mit $\omega_1 = 2\pi f_1$ und $\omega_2 = 2\pi f_2$) mittels Additionstheoreme:

   $$p(t) = \underbrace{A \cdot \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\, t\right)}_{=A(t)} \cdot \sin(\bar{\omega} t) \qquad \text{mit} \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ , \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

   $A(t) =$ **Zeitabhängige Amplitude** (erzeugt das lauter und leiser Werden)

   $\Delta\omega =$ **Kreisfrequenzdifferenz** zwischen der schnelleren und der langsameren Einzelschwingung

   $\bar{\omega} =$ **Mittlere Kreisfrequenz** der schnelleren und der langsameren Einzelschwingung

   $\omega_{1/2} =$ **Kreisfrequenzen** der beiden Einzelschwingungen

   $f_{1/2} =$ **Frequenzen** der beiden Einzelschwingungen

   Bei der Überlagerung zweier Sinustöne mit nahezu gleichen Frequenzen f_1 und f_2 entsteht ein Schwebungsphänomen. Das ist ein lauter und leiser werdender Ton, dessen Tonhöhe der mittleren Frequenz der beiden Einzeltöne entspricht. Die zeitabhängige Amplitude $A(t)$ ist eine sinusartige Schwankung, deren Kreisfrequenz der Differenz der Kreisfrequenzen der beiden Einzelschwingungen entspricht und daher tpyischerweise viel langsamer ist als die mittlere Frequenz, die die Tonhöhe festlegt.
   Beachte! Die **Schwebungsfrequenz** $\Delta f_{\text{Schwebung}}$ der Lautstärkenschwankung ist doppelt so gross wie die mathematische Schwebungsfrequenz $\Delta f = f_2 - f_1$, denn bei jedem Wellenberg und bei jedem Wellental der Einhüllenden $A(t)$ wird es laut, also eben zweimal pro Periode von $A(t)$.

   (c) Die auf einem Seil **laufende Welle** wird mathematisch beschrieben durch:

   $$h(x,t) = A \cdot \sin(kx \mp \omega t) \qquad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

   $A =$ **Amplitude**

   $k =$ **Wellenzahl** $=$ Anzahl rad (Winkelgrösse) pro Meter

   $\omega =$ **Kreisfrequenz**

   $T =$ **Periode** $=$ Zeitabstand zwischen zwei Wellenbergen

   $f =$ **Frequenz** der Welle $=$ Frequenz, mit der die Welle ausgesandt wird
   $=$ Frequenz, mit der die Welle an einem Ort vorbeikommt

   Die Funktion $h(x,t)$ beschreibt die Auslenkung des Seils aus der Ruhelage und zwar an jeder Stelle x und zu jedem Zeitpunkt t. Mit dem Minuszeichen läuft die Welle in die positive Richtung der x-Achse, mit dem Pluszeichen entsprechend in die negative Richtung.

(d) Zur n-ten **stehenden Welle** auf einer Instrumentensaite der Länge l gehört folgende Funktion:

$$h_n(x,t) = \underbrace{A_n \cdot \sin(k_n x)}_{=A_n(x)} \cdot \sin(\omega_n t) \qquad \text{mit} \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad \text{und} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = 2\pi f_n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{wobei} \quad \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n+1} \quad \text{mit} \quad \lambda_0 = 2\ell \qquad \text{und} \qquad f_n = (n+1)\cdot f_0 \quad \text{mit} \quad f_0 = \frac{c}{2l}$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots =$ **Index** $\in \mathbb{N}_0 =$ Nummerierung der Eigenschwingungen der Saite

$\ell =$ **Länge der Saite**

$c =$ **Wellengeschwindigkeit auf der Saite**

$A_n(x) =$ **Ortsabhängige Amplitude** $=$ Funktion von x (enthält die Knotenpunkte!)

$A_n =$ **Amplitude** der ortsabhängigen Amplitude der n-ten Eigenschwingung

$k_n =$ **Wellenzahl** der ortsabhängigen Amplitude der n-ten Eigenschwingung

$\lambda_n =$ **Wellenlänge** der n-ten Eigenschwingung

$\lambda_0 = 2l =$ **Wellenlänge** der Grundschwingung

$\omega_n =$ **Kreisfrequenz** der n-ten Eigenschwingung

$T_n =$ **Periode** der n-ten Eigenschwingung

$f_n =$ **Frequenz** der n-ten Eigenschwingung $=$ n-te **Eigenfrequenz**

$f_0 =$ **Grundfrequenz** $=$ Frequenz der Grundschwingung

Bei ganz bestimmten Anregungsfrequenzen (Eigenfrequenzen) schwingt die Saite in Form einer stehenden Welle mit sich nicht bewegenden **Knotenpunkten**. Dabei haben diese möglichen **Eigenschwingungen** lauter Eigenfrequenzen, die natürliche Vielfache ein- und derselben Grundfrequenz f_0 sind.

In der mathematischen Beschreibung der stehenden Welle $h_n(x,t)$ sind die Knotenpunkte jeweils die Nullstellen der ortsabhängigen Amplitude $A_n(x)$.

Die real angespielte Saite schwingt in Form einer Summe über die unterschiedlich gewichteten Eigenschwingungen $h_n(x,t)$. D.h., die Amplituden A_n sind unterschiedlich gross und legen durch ihre relative Gewichtung die Klangfarbe des Instrumentes fest.

2. *Ein paar Verständnisfragen*

(a) Es gibt verschiedene Phänomene, die sich nur sinnvoll erklären lassen, wenn wir davon ausgehen, dass sich Schall wellenartig ausbreitet. Zu erwähnen wären hier insbesondere Interferenzphänomene, bei denen sich Schall konstruktiv und destruktiv überlagern kann, oder dann auch Phänomene wie der Dopplereffekt, bei dem die Erhöhung oder Absenkung der Tonhöhe bestens mit der Wellenidee erklärt werden kann.

Eine Schallwelle in der Luft müssen wir uns so vorstellen, dass Verdichtungen und Ausdünnungen in der Luft mit Schallgeschwindigkeit weitergegeben werden. Dabei bewegt sich nicht die Luftmasse als ganzes in eine Richtung (das wäre Wind), sondern vielmehr kann man sich kleine Luftvolumen vorstellen, die sich längs der Ausbreitungsrichtung der Schallwelle mehr oder weniger an Ort und Stelle hin und her bewegen.

(b) Aus dem Mund kommt die Schallwelle. Der Becher ist durch seine hohle Form gut geeignet, diese Schalldruckschwankung aufzunehmen und als Schwingung an die Schnur zu übertragen. In der gespannten Schnur wird diese Schwingung als Welle an den anderen Becher übermittelt. Dort wirkt der zweite Becher als Übersetzer, der die in der Schnur ankommende Schwingung wieder in eine Schallwelle umwandelt, die dann beim Ohr ankommt.

Die Idee des ganzen Schnurtelefons ist, dass ein Teil der Schallwelle des sprechenden Mundes direkt vom Becher aufgenommen wird. Der Rest dieses Schalls verbreitet sich kugelförmig im Raum und die Schallenergie geht auf diese Weise rasch verloren, weil sie sich rasch sehr verteilt. Anders beim Signal in der Schnur. Die in die Schnur hineingegebene Energie geht beim Transport durch die Schnur kaum verloren und kann auf der anderen Seite zur Erzeugung der Schallwelle beim Ohr verwendet werden. Auf diese Weise knn das Schnurtelefon auch über recht grosse Distanzen die Information im Schall übertragen.

(c) Wenn wir einen Ton singen oder ein Instrument gespielt wird, so sind in einem einzelnen Ton bereits mehrere sehr verschiedene Frequenzen enthalten (Grundton und Obertöne). Würden die zu diesen Frequenzen gehörenden sinusförmigen Schallwellen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in der Luft unterwegs sein, so würde der Klang "auseinanderfallen". Nach mehr oder weniger Strecke würden die Frequenzen nicht mehr synchron ankommen und wir würden den Ton z.B. als gestaffelte Aneinanderreihung einzelner Frequenzen wahrnehmen. Das ist allerdings gar nicht der Fall. Wenn unterschiedliche Frequenzen in der Luft nicht genau gleich schnell unterwegs wären, so muss dieser Effekt sehr klein sein.

(d) Um die Gründe für diese Tonhöhenveränderung zu verstehen, erinnern wir uns an den Mechanismus, der der Stimme zugrunde liegt. Die Schwingungen der Stimmbänder im Kehlkopf ermöglichen es uns, Laute zu erzeugen. Die Stimmbänder modulieren den Luftstrom – d.h., sie versehen ihn mit Schallwellen – bevor der Mund als Resonanzkörper fungiert.

Helium-Atome (He, Edelgas) sind deutlich leichter als Luftmoleküle (v.a. Stickstoff $\mathrm{N_2}$ und Sauerstoff $\mathrm{O_2}$). Dies führt dazu, dass sich Schallwellen in Helium schneller ausbreiten als in Luft, weil die Teilchen weniger träge sind. Ersetzt Helium die Luft in den Atemwegen und in der Mundhöhle, so erhöht sich dort also die Schallgeschwindigkeit. Sie steigt von $340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf $1020\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Auch die Stimmbänder schwingen etwas schneller, weil das Schwingen in dieser weniger trägen Umgebung leichter fällt, und der erzeugte Schall wird stärker in den Atemwegen reflektiert. Entscheidend ist, dass die höheren Frequenzen insgesamt durch die höhere Schallgeschwindigkeit in Helium begünstigt werden. Das führt dazu, dass sich unsere Stimme höher anhört. Der Effekt ist im Detail aber nicht so einfach korrekt zu erklären. Im Internet findet sich deswegen sehr viel Unsinn – wie immer, wenn es es komplizierter wird.

Umgekehrt kann das Einatmen eines Gases, das dichter als Luft ist, die Stimme verändern und tiefer klingen lassen. (Dies ist allerdings sofort wesentlich gefährlicher als das Einatmen von Helium, weil das dichtere Gas in der aufrechten Normalposition des Menschen von sich aus in der Lunge bleibt.)

(e) Hier muss man zunächst sagen: Das kommt drauf an! Sind Luft und Schallquelle relativ zueinander in Ruhe, so trifft dies zu. Bewegt sich hingegen die Schallquelle in der Luft, so entstehen vor der sich bewegenden Quelle Verkürzungen der Wellenlänge und damit eben auch eine Erhöhung der Frequenz, währenddem dahinter die Wellenlänge vergrössert und damit die Frequenz verkleinert ist. Stichwort: Doppler-Effekt.

(f) Die Aussage ist grundsätzlich vernünftig. Die realen Werte bestätigen sie. So beträgt die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle in der Luft bei Zimmertemperatur mit etwa $490\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und ist damit nochmals deutlich grösser als die Schallgeschwindigkeit mit $340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(g) In Gasen findet die Übertragung der Kräfte zwischen den Teilchen im Wesentlichen durch Zusammenstösse statt. Dazu müssen sich die Teilchen also "berühren". Ganz anders ist die Situation in Festkörpern, wo die Atome sich ständig "berühren", resp. eben durch andauernd wirkende elektrische Kräfte miteinander verbunden sind, die auch dafür sorgen, dass die Teilchen relativ zueinander auf Position bleiben. Es sind diese Kräfte, die auch für die Übertragung von Schallwellen durch den Festkörper zuständig sind, was aufgrund der geschilderten Situation eben wesentlich rascher passiert.

(h) Trifft die Schallwelle auf Wasser, so kommen die Dichtemaxima mit der Frequenz dieser Welle auf die Wasseroberfläche. Das bedeutet, dass die Welle im Wasser auch mit dieser Frequenz angeregt wird. Die Frequenz bleibt beim Eintritt ins Wasser somit grundsätzlich dieselbe. Damit ist aber klar, dass sich die Wellenlänge verändert, denn Schallwellen sind im Wasser deutlich schneller unterwegs, wodurch die Wellenlänge vergrössert wird, wenn die Frequenz gleich bleibt.

(i) Stehende wellen auf einer Saite oder einem sonstigen Medium entstehen durch die Überlagerung laufender Wellen, die also eine räumliche Ausdehnung haben. Es sind diese räumlichen Sinusfunktionen, die sich bei zur stehenden Welle aufsummieren. Daher können wir von einer "räumlichen Interferenz" sprechen. An verschiedenen Orten besteht konstruktive und an anderen Orten eben destruktive Interferenz.

Anders bei Schwebungen. Dort addieren sich beispielsweise die Schalldruckschwankungen, die an einem bestimmten Ort auftreffen. Dabei kann es ebenfalls zu Interferenz kommen, sodass zu gewissen Zeitpunkten konstruktive und zu anderen Zeitpunkten destruktive Interferenz vorliegt. Daher können wir von einer "zeitlichen Interferenz" sprechen.

3. *Grundsätzliches zur Schwebung – eine Rekapitulation von Kapitel 12*

(a) Die Einzeltöne haben praktisch dieselbe Tonhöhe. Um zwischen beispielsweise $440\,\mathrm{Hz}$ und $442\,\mathrm{Hz}$ einen Unterschied zu bemerken, muss ich über ein extrem geschärftes Gehör verfügen.

Auch die Summe der beiden Sinustöne scheint dieselbe Tonhöhe aufzuweisen. Nun verändert sich aber andauernd die Lautstärke des Tons. Das ist das Schwebungsphänomen. Es ergibt sich ein Wah-Wah-Effekt, der umso langsamer abläuft, je näher die beiden ursprünglichen Tonfrequenzen beieinander liegen.

(b) **Vorbemerkung:** Man muss zwischen der real "gehörten" Schwebungsfrequenz $f_{\mathrm{Schwebung}}$ und der mathematischen Schwebungsfrequenz f_{S} unterscheiden. In Texten ist mit dem Ausdruck Schwebungsfrequenz $f_{\mathrm{Schwebung}}$ jeweils die effektiv gehörte Frequenz des lauter und leiser Werdens gemeint. Der Aufgabentext benennt diese gehörte Schwebungsfrequenz mit $2.0\,\mathrm{Hz}$. Zweimal pro Sekunde wird der Ton laut und wieder leise.

Die mathematische Schwebungsfrequenz f_{S} ist die Frequenz in der Sinus- oder Cosinusfunktion der Amplitudenfunktion $A(t)$, deren Graph die schnelle Sinusschwingung einhüllt resp. begrenzt. Die Periode dieser Envelopenfunktion, also die mathematische Schwebungsperiode T_{S}, enthält einen Wellenberg und ein Wellental. Das bedeutet, innerhalb einer solchen Periode wird es tatsächlich zweimal laut und zweimal leise.

Somit ist die gehörte Schwebungsfrequenz $f_{\mathrm{Schwebung}}$ doppelt so gross wie die Frequenz f_{S} der Amplitudenfunktion $A(t)$.

Schauen wir uns das auch noch im rechnerischen Formalismus an, der im Abschnitt 12.1 des Skripts beschrieben wird.

Zunächst definieren wir die mittlere Frequenz $\bar{f}$ und den Frequenzunterschied Δf aufgrund der Frequenzen f_1 und f_2 der beiden Einzeltöne:

$$\text{Mittlere Frequenz:}\quad \bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} \qquad \text{und} \qquad \text{Frequenzunterschied:}\quad \Delta f = f_2 - f_1$$

Damit lassen sich die Frequenzen der beiden Einzeltöne neu schreiben in der Form:

$$f_1 = \bar{f} - \frac{\Delta f}{2} \qquad \text{und} \qquad f_2 = \bar{f} + \frac{\Delta f}{2}$$

Aus jedem einzelnen Frequenzausdruck (f_1, f_2, $\bar{f}$ und Δf) kann durch Multiplikation mit 2π eine entsprechende Kreisfrequenz ω gewonnen werden ($\omega = 2\pi f$). Folglich gilt auch:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad \text{sowie} \qquad \omega_1 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}$$

Mit diesen Ausdrücken für ω_1 und ω_2 können die Sinusfunktionen $p_1(t)$ und $p_2(t)$ der beiden Einzeltöne mittels Additionstheoreme zerlegt und neu zusammengefasst werden (vgl. S. 58f im Skript).

Das Resultat ist eine Sinusfunktion mit Kreisfrequenz $\bar{\omega}$ resp. Frequenz $\bar{f}$ (gross!), deren Amplitude $A(t)$ sich sinus- resp. cosinusartig verändert. Diese Amplitudenfunktion $A(t)$ funktioniert mit der langsamen Kreisfrequenz $\omega_{\mathrm{S}} = \frac{\Delta\omega}{2}$ resp. Frequenz $f_{\mathrm{S}} = \frac{\Delta f}{2}$.

Wie wir uns oben überlegt haben, ist die Frequenz der Envelope $A(t)$ aber nur halb so schnell wie die effektiv gehörte Schwebungsfrequenz $f_{\mathrm{Schwebung}}$, für die somit gilt:

$$\text{Gehörte Schwebungsfrequenz:} \qquad f_{\mathrm{Schwebung}} = 2 \cdot f_{\mathrm{S}} = 2 \cdot \frac{\Delta f}{2} = \Delta f$$

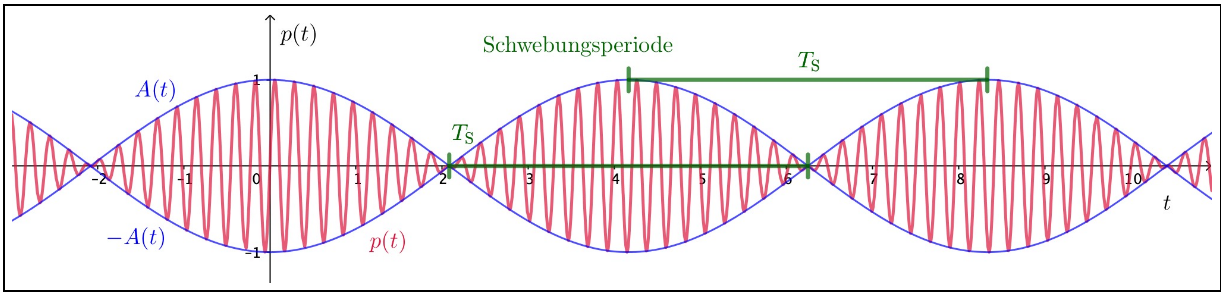
Die gehörte Schwebungsfrequenz $f_{\mathrm{Schwebung}}$ entspricht genau dem Frequenzunterschied Δf.

Damit beantworten wir endlich die eigentliche Frage: Die andere Einzeltonfrequenz muss $2.0\,\mathrm{Hz}$ oberhalb oder unterhalb von $f_1 = 440\,\mathrm{Hz}$ liegen, also entweder $\underline{\underline{f_2 = 442\,\mathrm{Hz}}}$ oder $\underline{\underline{f_2 = 438\,\mathrm{Hz}}}$ betragen.

(c) **Interferenzphänomene** lassen sich überall dort beobachten, wo wir es mit **Wellen** zu tun haben. Das Wort Interferenz steht für **Überlagerung** oder **Überschneidung**. Mehrere Welle überlagern sich also. Die zugehörigen Wellenfunktionen werden **aufsummiert**. Man nennt dies eine **Superposition**.

Bei der Schwebung setzen wir uns auf einen bestimmten Punkt, an dem mehrere Schallwellen vorbeikommen. Wir betrachten also nicht die Wellen als Ganzes, sondern die Schalldruckschwankungen, die sie an diesem Ort hervorrufen. Durch die Aufsummierung dieser einzelnen Druckschwankungen entsteht eine Gesamtdruck mit für diese Art von Überlagerung charakteristischen Intensitätsmaxima und -minima. Genau diese Beobachtung ist die **Interferenz**. Hohe Intensität bedeutet konstruktive Interferenz, also gegenseitige Verstärkung, niedrige Lautstärke destruktive Interferenz, also gegenseitige Auslöschung.

(d) Hier das entsprechende Schalldruckmuster:



(e) Mit den Frequenzwerten $f_1 = 440\,\mathrm{Hz}$ und $f_2 = 442\,\mathrm{Hz}$ erhalten wir für die Kreisfrequenzen:

$$\bar{\omega} = 2\pi\bar{f} = 2\pi \cdot \frac{f_1 + f_2}{2} = \pi(f_1 + f_2) = 882\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 2\pi(f_2 - f_1) = 2\pi \cdot 2\,\mathrm{Hz} = 4\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Damit notieren wir gemäss dem Resultat oben auf Seite 59 im Skript:

$$p(t) = \underbrace{2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\,t\right)}_{=A(t)} \cdot \sin\left(\bar{\omega}\,t\right) = \underline{\underline{2\cos\left(2\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdot t\right) \sin\left(882\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdot t\right)}}$$

Anstelle der Cosinusfunktion könnten wir ebenso gut eine Sinusfunktion notieren, denn der Unterschied besteht lediglich in einer Verschiebung des zeitlichen Nullpunktes.

4. *Elementare Berechnungen mit* $c = \lambda \cdot f$

(a) Die Klaviersaite ist beidseitig eingespannt. Bei derartigen Randbedingungen ist die Wellenlänge λ_0 der Grundschwingung gerade das Doppelte der Saitenlänge ℓ:

$$\lambda_0 = 2\ell = 2 \cdot 1.62\,\mathrm{m} = 3.24\,\mathrm{m}$$

Aus der Wellengleichung folgt daraus für die Grundtonfrequenz:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{1711\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3.24\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{528\,\mathrm{Hz}}}$$

Zu den Oberschwingungen der Saite gehören lauter natürliche Vielfache von f_0:

$$f_n = \underline{\underline{(n+1) \cdot f_0}} = \underline{\underline{(n+1) \cdot 528\,\mathrm{Hz}}} \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Wir rechnen die beiden Frequenzangaben mit der Schallgeschwindigkeit im Wasser in Wellenlängen um:

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{1450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{80\,000\,\mathrm{Hz}} = 0.018\,\mathrm{m} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{1450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{200\,000\,\mathrm{Hz}} = 0.007\,\mathrm{m}$$

Die Delfine erzeugen unter Wasser also sehr kurzwellige Kommunikationssignale im Bereich zwischen $7\,\mathrm{mm}$ und knapp $2\,\mathrm{cm}$.

(c) i. Auf der Saite gilt:

$$\lambda_0 = 2\ell = \underline{\underline{64\,\text{cm}}} = \underline{\underline{0.64\,\text{m}}}$$

ii. Die Schallwelle ist in der Luft unterwegs, daher hat sie bei $440\,\text{Hz}$ eine Wellenlänge von:

$$\lambda_{0,\text{Luft}} = \frac{c_\text{Luft}}{f_0} = \frac{330\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{440\,\text{Hz}} = \underline{\underline{0.75\,\text{m}}}$$

iii. Es geht um dieselbe Frequenz, aber im einen Fall um die Wellengeschwindigkeit auf der Saite und im anderen Fall um die Wellengeschwindigkeit in Luft. Aufgrunddieser unterschiedlichen Geschwindigkeiten ergeben sich verschiedene Wellenlängen.

iv. Grundsätzlich genau gleich gross wie die Grundfrequenz des Tons auf der Saite, also $\underline{\underline{440\,\text{Hz}}}$.

5. *Das Foucault'sche Pendel*

(a) Für die Kreisfrequenz ergibt sich aus der Formelangabe mit einer Pendellänge von $67\,\text{m}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{67\,\text{m}}} = 0.383\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Damit folgt für Frequenz und Periode der Pendelschwingung:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0.383\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi} = 0.0609\,\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.0609\,\text{Hz}} = 16.4\,\text{s}$$

Bei der Bewegung von einer zur anderen Seite verstreicht eine halbe Periode, also $\underline{\underline{8.2\,\text{s}}}$.

(b) Wenn die Frequenz dieselbe sein soll, dann auch die Kreisfrequenz. Somit erhalten wir:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}}{\left(0.383\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} = \underline{\underline{23\,\text{m}}}$$

Die Pendellänge auf dem Mars müsste eben verkürzt werden, damit das Pendel bei schwächerer Gravitation gleich schnell hin und her schwingen würde.

6. *Frequenzverhältnisse, Saitenlängen und Intervalle*

(a) Will man vom Ton der leeren Saite aus eine grosse Terz nach oben springen, so dürfen gemäss der Intervalltabelle nur noch $\frac{4}{5}$ der Saite schwingen:

$$\frac{f_\text{neu}}{f_\text{leer}} = \frac{5}{4} = \frac{\ell_\text{leer}}{\ell_1} = \quad \Rightarrow \quad \ell_\text{neu} = \frac{4}{5}\,\ell_\text{leer} = \frac{4}{5}\cdot 120\,\text{cm} = \underline{\underline{96\,\text{cm}}}$$

(b) Wir stellen das Verhältnis zwischen neuere und alter Saitenlänge auf, das dann auch dem umgekehrten Frequenzverhältnis entsprechen muss:

$$\frac{f_\text{neu}}{f_\text{leer}} = \frac{\ell_\text{leer}}{\ell_\text{neu}} = \frac{120\,\text{cm}}{90\,\text{cm}} = \frac{4}{3}$$

Damit handelt es sich bei diesem Intervallsprung um eine $\underline{\underline{\text{Quarte}}}$.

(c) Wir rechnen hoch:

$$\frac{f_{0,\text{neu}}}{f_{0,A}} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad f_{0,\text{neu}} = \frac{5}{3}\cdot f_{0,\text{A}} = \frac{5}{3}\cdot 220\,\text{Hz} = \underline{\underline{367\,\text{Hz}}}$$

(d) Tatsächlich ergibt ein Quartsprung nach einem vorherigen Quintsprung auch mit den zu den reinen Intervallen gehörenden Frequenzverhältnissen einen Oktavsprung:

$$f_{0,\text{Quinte}} = \frac{3}{2}\cdot f_0$$

Gehen wir von diesem Ton aus eine Quarte nach oben, so folgt:

$$f_{0,\text{Quinte+Quarte}} = \frac{4}{3}\cdot f_{0,\text{Quinte}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot f_0 = 2\cdot f_0 = f_{0,\text{Oktave}}$$

7. *Rund ums Cello*

(a) Bildet man jeweils die Verhältnisse der benachbarten Frequenzen, so erkennt man:

$$\frac{98.0}{65.4} \approx \frac{147}{98.0} \approx \frac{220}{147} \approx 1.5 = \frac{3}{2}$$

Aus der Intervalltabelle erfahren wir, dass dieses Frequenzverhältnis zu einer Quinte gehört. Die Töne der vier Violinsaiten besitzen also **Quintabstände**.

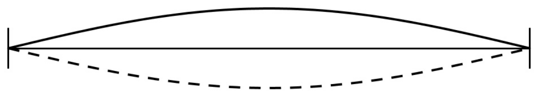
(b) Beim Stimmen verändert man die **Spannung** einer Saite und variiert damit die **Ausbreitungs-** resp. **Wellengeschwindigkeit** c in ihr: Je grösser die Spannung, desto grösser ist c.

Aufgrund der Gleichung $c = \lambda \cdot f$ ergibt sich daraus ein direkter Einfluss auf die erzeugte Tonhöhe: Bei vorgegebener Saitenlänge ℓ ist die Wellenlänge $\lambda_0 = 2\ell$ des **Grundtons** fix. Somit muss bei grösserer Wellengeschwindigkeit c auch die zum Grundton gehörende **Frequenz** f_0 grösser werden: $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$.

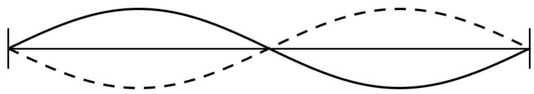
Je stärker die Saite gespannt ist, umso höher tönt sie also.

(c) **Bemerke:** Die n-te Oberschwingung weist n Knotenpunkte auf!

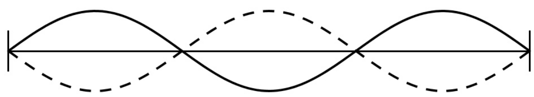
Grundschwingung $n = 0$



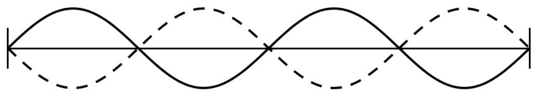
1. Oberschwingung $n = 1$



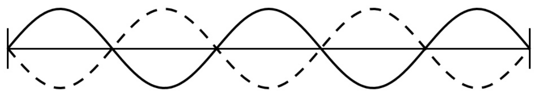
2. Oberschwingung $n = 2$



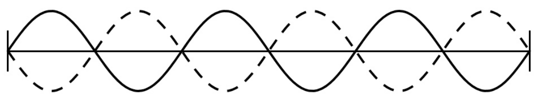
3. Oberschwingung $n = 3$



4. Oberschwingung $n = 4$



5. Oberschwingung $n = 5$



(d) Die Saitenlänge ist laut Vorgabe $\ell = 690\,\text{mm}$. Eine Wellenlänge besteht stets aus einem Wellenberg und einem Wellental. Somit folgt aus den Graphen oben:

$$n=0: \quad \lambda_0 = 2 \cdot \ell = \underline{\underline{1380\,\text{mm}}} \qquad n=3: \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \cdot \ell = \underline{\underline{345\,\text{mm}}} = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$n=1: \quad \lambda_1 = \ell = \underline{\underline{690\,\text{mm}}} = \frac{\lambda_0}{2} \qquad n=4: \quad \lambda_4 = \frac{2}{5} \cdot \ell = \underline{\underline{276\,\text{mm}}} = \frac{\lambda_0}{5}$$

$$n=2: \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} \cdot \ell = \underline{\underline{460\,\text{mm}}} = \frac{\lambda_0}{3} \qquad n=5: \quad \lambda_5 = \frac{1}{3} \cdot \ell = \underline{\underline{230\,\text{mm}}} = \frac{\lambda_0}{6}$$

Diese Wellenlängen sind alles andere als willkürlich. Sie lassen sich durch eine einfache Gleichung in Abhängigkeit von n ausdrücken:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n+1} = \frac{\lambda_0}{n+1}$$

(e) Die Grundtonfrequenz der d-Saite ist uns bekannt: $f_d = 147\,\text{Hz}$. Die Frequenzen sämtlicher Eigenschwingungen der Saite sind ganzzahlige Vielfache dieser Grundtonfrequenz:

$$f_n = (n+1) \cdot f_d$$

Somit ergibt sich für die niedrigsten sechs Schwingungsfrequenzen:

$f_0 = \underline{\underline{147\,\text{Hz}}}$, $f_1 = \underline{\underline{294\,\text{Hz}}}$, $f_2 = \underline{\underline{441\,\text{Hz}}}$, $f_3 = \underline{\underline{588\,\text{Hz}}}$, $f_4 = \underline{\underline{735\,\text{Hz}}}$, $f_5 = \underline{\underline{882\,\text{Hz}}}$.

(f) Mit den beiden Grundtonfrequenzen $f_C = 65.4\,\text{Hz}$ und $f_a = 220\,\text{Hz}$ und der auf beiden Saiten gleich grossen Grundtonwellenlänge $\lambda_0 = 1380\,\text{mm} = 1.38\,\text{m}$ lassen sich mit der Wellengleichung sofort die Wellengeschwindigkeiten bestimmen:

$$c_C = \lambda_0 \cdot f_C = 1.38\,\text{m} \cdot 65.4\,\text{Hz} = \underline{\underline{90.3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}} \qquad \text{und} \qquad c_a = \lambda_0 \cdot f_a = 1.38\,\text{m} \cdot 220\,\text{Hz} = \underline{\underline{304\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

(g) i. Die Klangfarbe eines Tones wird durch seine Obertonzusammensetzung festgelegt. D.h., es kommt darauf, wie stark Grund- und Obertonfrequenzen relativ zueinander in der ausgesandten Schallwelle vorhanden sind.

ii. Je nachdem, wo die Saite angestrichen wird, kann sich die Obertonzusammensetzung und damit die Klangfarbe verändern.

Der Strich kann unterschiedliche Qualitäten aufweisen (viel Druck $\leftrightarrow$ wenig Druck, schneller Strich $\leftrightarrow$ langsamer Strich). Auch dies hat einen Einfluss auf die Klangfarbe.

Die Saite kann anstatt mit dem Bogen gestrichen auch mit dem Finger gezupft werden.

(h) Zu einer grossen Sexte gehört das Frequenz- resp. Saitenlängenverhältnis $5:3$. Die leere Saite besitzt eine Länge von $690\,\mathrm{mm}$. Daraus folgt für die Saitenlänge der Sexte darüber:

$$\ell_{\text{Sexte}} = \frac{3}{5}\cdot\ell_{\text{leer}} = \frac{3}{5}\cdot 690\,\mathrm{mm} = \underline{\underline{414\,\mathrm{mm}}}$$

Merke nochmals: Das zu einem Intervall gehörende Frequenzverhältnis beschreibt umgekehrt auch gerade das Saitenlängenverhältnis. Je höher der Ton, desto höher die Frequenz, desto kürzer die Saite.

(i) Die leere Saite ist immer noch $690\,\mathrm{mm}$ lang. Dann ergibt sich das Saitenlängenverhältnis zur abgeklemmten Saite zu:

$$\frac{l_{\text{neu},1}}{l_{\text{leer}}} = \frac{518\,\mathrm{mm}}{690\,\mathrm{mm}} = 0.751 \approx 0.75 = \frac{3}{4}$$

Somit hören wir eine **Quarte** als Intervallsprung.

Es spielt gar keine Rolle, auf welcher der vier Saiten diese neue Saitenlänge angespielt wird. Das Intervall zur leeren Saite ist stets diese Quarte.

8. *Eigenschwingungen bei gedackten Orgelpfeifen*

Für die Wellenlängen ergibt sich aus den gezeigten Druckamplitudenfunktionen:

$$\lambda_0 = 4\ell = 4\cdot 50\,\mathrm{cm} = 200\,\mathrm{cm} \qquad \lambda_1 = \frac{4}{3}\,\ell = \frac{4}{3}\cdot 50\,\mathrm{cm} = 66.7\,\mathrm{cm}$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{5}\,\ell = \frac{4}{5}\cdot 50\,\mathrm{cm} = 40\,\mathrm{cm} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_n = \frac{4\ell}{2n+1} \quad \text{mit} \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Via Schallgeschwindigkeit lassen sich die zugehörigen Frequenzen bestimmen:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2.00\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{170\,\mathrm{Hz}}} = \text{Grundtonfrequenz}$$

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0.667\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{510\,\mathrm{Hz}}} \qquad f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0.40\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{850\,\mathrm{Hz}}}$$

Auch diese Frequenzabfolge lässt sich in einer Gleichung darstellen:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{\frac{4\ell}{2n+1}} = \frac{c}{4\ell}\cdot(2n+1) \qquad \text{mit} \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Die Grundfrequenz der gedackten Orgelpfeife beträgt $f_0 = \frac{c}{4l}$. Allerdings kommen bei dieser Pfeife nicht alle natürlichen Vielfachen dieser Grundtonfrequenz vor! Vielmehr sind es nur die **ungeraden Vielfachen**, denn $2n+1$ mit $n = 0,1,2,3,\ldots$ ist gerade die Folge der ungeraden Zahlen:

$$2\cdot 0+1 = 1 \qquad 2\cdot 1+1 = 3 \qquad 2\cdot 2+1 = 5 \qquad 2\cdot 3+1 = 7 \qquad \text{etc.}$$

Notieren wir schliesslich die Schwingungsfunktion der stehenden Welle. Ich mach das hier gerade allgemein. Dabei muss man bedenken, dass gemäss dem eingetragenen Koordinatensystem der örtliche Nullpunkt ganz links im Pfeifenrohr sitzen soll, wo die Druckschwankung maximal ist. Das ist aber weiter kein Problem. Wir notieren die ortsabhängige Amplitudenfunktion einfach mit der Cosinusfunktion – that's all:

$$p_n(x,t) = A_n\cdot\cos(k_n x)\cdot\sin(\omega_n t) \qquad \text{mit} \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

dabei sind: $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi}{\frac{4\ell}{2n+1}} = \frac{\pi(2n+1)}{2\ell}$ und $\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi\cdot\frac{c}{4\ell}\cdot(2n+1) = \frac{\pi c(2n+1)}{2\ell}$

9. *Überlagerung zweier phasenverschobener Sinusschwingungen*

Bei einem Mikrophon kommen die sinusförmigen Schallwellen aus zwei Lautsprechern an. Beide Schallwellen haben genau die gleiche Frequenz und kommen mit gleicher Amplitude beim Mikrophon an. Allerdings ist die eine Schallwelle relativ zur anderen um φ phasenverschoben, sodass wir für die beiden Schalldruckschwankungen am Ort des Mikrophons zunächst notieren:

$$p_1(t) = A \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{und} \qquad p_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

(a) Klar: Für $\varphi = 0$ sind die beiden Schalldruckschwankungen genau synchron und interferieren somit konstruktiv. Bei einer Phasenverschiebung von $\varphi = \pi$ hingegen ist p_2 um eine halbe Periode gegenüber p_1 verschoben. Dann ist

$$p_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \pi) = -A \cdot \sin(\omega t) = -p_1(t) \quad \Rightarrow \quad p_{\text{total}} = p_1(t) + p_2(t) = 0$$

und somit löschen sich die beiden Druckschwankungen gegenseitig aus (destruktive Interferenz).

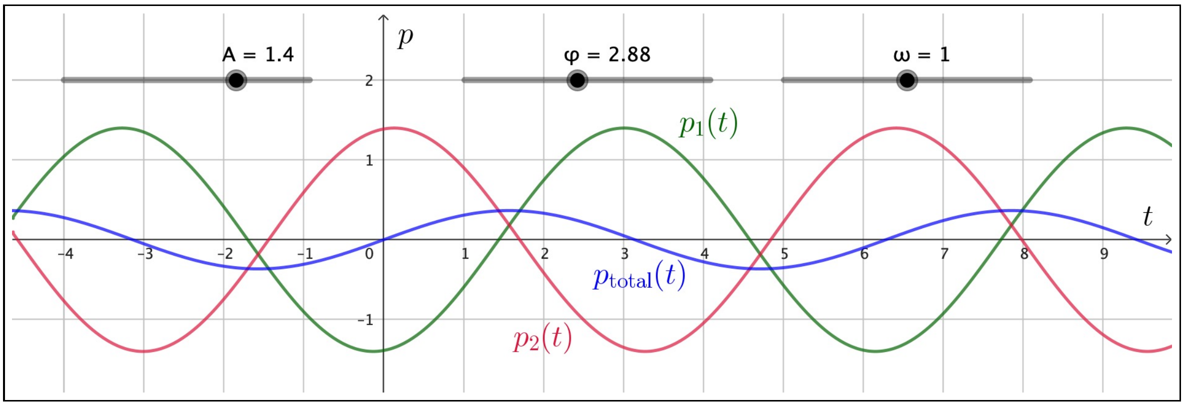
(b) Nach der in der Aufgabenstellung erläuterten Nullpunktverschiebung der Zeitachse können wir die beiden Druckschwankungen unter Verwendung der Additionstheoreme addieren und in einen neuen Ausdruck überführen:

$$\begin{aligned}
p_{\text{total}}(t) = p_1(t) + p_2(t) &= A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) + A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\
&= A \cdot \left(\sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\right) \\
&= A \cdot \left(\sin(\omega t)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos(\omega t)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin(\omega t)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos(\omega t)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \\
&= 2A \cdot \sin(\omega t)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
&= \underbrace{2A \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}_{=A(\varphi)} \cdot \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Wir sehen nun eine Sinusschwingung $\sin(\omega t)$ mit derselben Kreisfrequenz ω wie die beiden ursprünglichen Schwingungen. Die Amplitude dieser Schwingung hängt nun aber von der Phasenverschiebung φ ab – eben $A(\varphi)$. Dabei fliesst $\cos(\frac{\varphi}{2})$ als Faktor in diese Amplitude mit ein. Das bedeutet, dass wir bei $\varphi = 0$ maximale konstruktive Interferenz haben ($\cos 0 = 1$!). Ebenso ist das wieder bei $\varphi = 2\pi$ der Fall, denn $\cos\frac{2\pi}{2} = \cos\pi = -1$ lässt die Amplitude $2A\cos\frac{\varphi}{2}$ auch maximal gross werden. Das Minuszeichen hat für den Betrag dieser Amplitude keine Bedeutung. Hingegen finden wir bei $\varphi = \pi$ komplette destruktive Interferenz, weil $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Diese Resultate decken sich komplett mit den Vorüberlegungen unter (a).

(c) Hier ein Beispiel aus GeoGebra:



Die Periode beträgt $T = 2\pi$, sodass die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ wird. Die Phasenverschiebung ist auf $\varphi = \frac{11}{12}\pi$ eingestellt. Das ist fast π und wir sehen, dass schon fast komplette destruktive Interferenz herrscht. Die gemeinsame Schwingung $p_{\text{total}}(t)$ weist in diesem Fall eine ziemlich geringe Amplitude auf.

10. *Ein Versuch mit dem Vokal "O"*

(a) Wir erkennen ein sich ständig wiederholendes Muster. Dessen horizontale, also zeitliche Länge entspricht der Grundperiode T_0. Einmal pro Grundperiode gibt es einen hohen Peak (= Ausschlag nach oben), der sich gut als "Zeitmarker" verwenden lässt.

Der hohe Ausschlag ganz links liegt etwa bei $t_1 = 0.005\,\mathrm{s}$. Acht Grundperioden weiter rechts sind wir fast am Ende des gezeigten Diagrammausschnitts angekommen. Der dortige hohe Peak liegt etwa bei $t_2 = 0.058\,\mathrm{s}$. Somit erhalten wir für acht Grundperioden eine Zeitspanne von:

$$8T_0 = t_2 - t_1 = 0.058\,\mathrm{s} - 0.005\,\mathrm{s} = 0.053\,\mathrm{s}$$

Daraus folgt für eine einzelne Grundperiode und für die zugehörige Grundfrequenz:

$$T_0 = \frac{8T_0}{8} = \frac{0.053\,\mathrm{s}}{8} = 0.006625\,\mathrm{s} \qquad \Rightarrow \qquad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0.006625\,\mathrm{s}} = 150.94\,\mathrm{Hz} \approx \underline{\underline{150\,\mathrm{Hz}}}$$

Für diese Rechnung habe ich die Dauer möglichst vieler Grundperioden aus dem Diagramm abgelesen, denn bei der anschliessenden Division dividiere ich automatisch auch den Ablesefehler durch die entsprechende Anzahl und erhöhe so die Genauigkeit des errechneten Wertes.

(b) Erhöhe ich die Tonhöhe um eine Oktave, so verdoppelt sich dabei die Grundfrequenz. Mein höher gesungenes "O" hätte dann also eine Grundfrequenz von $f_0 = 2 \cdot 150\,\mathrm{Hz} = 300\,\mathrm{Hz}$.

Ich ermittle das Frequenzverhältnis zu $440\,\mathrm{Hz}$ und versuche es durch ein "möglichst einfaches, natürliches Zahlenverhältnis" auszudrücken:

$$\frac{440\,\mathrm{Hz}}{300\,\mathrm{Hz}} \approx 1.47 \approx 1.5 = \frac{3}{2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{300\,\mathrm{Hz}}{440\,\mathrm{Hz}} \approx 0.682 \approx 0.\overline{6} = \frac{2}{3}$$

Damit dürfte in etwa eine $\underline{\underline{\text{Quinte}}}$ zum Kammerton a fehlen.

(c) **Allgemein:** Das zu einem bestimmten Schalldruckdiagramm gehörende Frequenzspektrum zeigt mir, welche Frequenzen in der gesamten Schalldruckschwankung wie stark vertreten sind. Dabei würde das Schalldruckdiagramm zu einer einzelnen Frequenz einer reinen Sinuskurve entsprechen. Das Schalldruckdiagramm muss also stets als Summe aus unterschiedlich stark gewichteten Sinuskurven aufgefasst werden.

Bei einem Klang, den wir als Ton mit bestimmter Tonhöhe und Klangfarbe wahrnehmen, enthält das Frequenzspektrum nur natürliche Vielfache ein- und derselben Grundfrequenz. Wir sehen ein sogenannt **diskretes Frequenzspektrum** mit regelmässig auftretenden Ausschlägen (Peaks) bei einzelnen Frequenzen.

Zur konkreten Aufgabe: Im gezeigten Schalldruckdiagramm erkennen wir, dass insbesondere diejenige Oberschwingung ziemlich ausgeprägt vorhanden sein muss, die innerhalb einer Grundperiode dreimal schwingt, die also die dreifache Grundfrequenz aufweist. Anders gesagt: Die zweite Oberschwingung resp. der dritte Peak von links muss im Frequenzspektrum eine herausragende Stellung haben.

Damit fallen die Frequenzspektren A und D ganz klar aus dem Rennen. B und C hingegen zeigen genau einen sehr ausgeprägten dritten Peak.

Im Frequenzspektrum C ist zudem der sechste Peak, also die fünfte Oberschwingung sehr deutlich vorhanden. Es müsste im Schalldruckdiagramm also auch noch eine doppelt so schnelle Schwingung gut sichtbar sein. Das ist nicht der Fall.

Die Lösung muss somit das $\underline{\underline{\text{Frequenzspektrum B}}}$ sein.

Das passt auch sehr gut damit zusammen, dass das "O" immer noch ein einigermassen "rund" klingender, also kein "spitziger" Vokal ist und somit keine ausgeprägten höheren Obertöne aufweisen sollte.