LÖSUNGEN SERIE 11: Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

Trigonometrie II / Schwingungen und Wellen / Klasse 155c / AGe

1. Durch Summen- resp. Differenzbildung lassen sich diese exakten Werte mittels der Additionstheoreme bestimmen:

   (a) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}}$

   (b) $\cos 15° = \sin(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}}$

   (c) $\tan(-75°) = -\tan 75° = -\frac{\sin 75°}{\cos 75°} = -\frac{\cos 15°}{\sin 15°} = -\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

   $= -\frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{6 - 2} = -\frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = \underline{\underline{-2 - \sqrt{3}}}$

2. Wir berechnen die linke und die rechte Seite jeweils separat und vergleichen die Resultate:

   (a) $\sin 90° = 1$ und

   $\sin(60° + 30°) = \sin 60° \; \cos 30° + \sin 30° \; \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \checkmark$

   (b) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und

   $\cos(90° - 45°) = \cos 90° \; \cos 45° + \sin 90° \; \sin 45° = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \checkmark$

   (c) $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin(2 \cdot 60°) = 2 \sin 60° \; \cos 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \checkmark$

   (d) $\cos 270° = 0$ und $\cos(2 \cdot 135°) = \cos^2 135° - \sin^2 135° = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \quad \checkmark$

3. Mit den Additionstheoremen folgt:

   (a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \; \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \; \cos x = x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \underline{\underline{\cos x}}$

   (b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \; \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \; \sin \frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = \underline{\underline{-\sin x}}$

   (c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \; \cos x + \sin \frac{3\pi}{2} \; \sin x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \sin x = \underline{\underline{-\sin x}}$

   (d) $\sin(\pi - x) = \sin \pi \; \cos x - \sin x \; \cos \pi = 0 \cdot \cos x - \sin x \cdot (-1) = \underline{\underline{\sin x}}$

   Bemerke: Mittels der Additionstheoreme lassen sich Beziehungen, die wir bisher mittels Symmetriebeziehungen haben verstehen können, jetzt auch rechnerisch relativ einfach überprüfen!

4. In beiden rechtwinkligen Dreiecken hat die Hypotenuse die Länge 1. Damit folgt für die Gegenkathete g und die Ankathete a zum Winkel β:

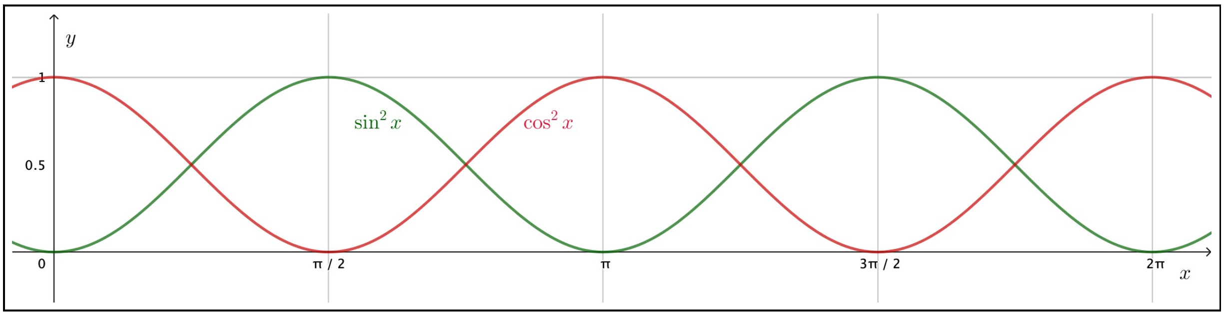
$$g = 1 \cdot \sin\beta \qquad \text{und} \qquad a = 1 \cdot \cos\beta$$

Somit ergibt sich für die Fläche des ganzen Dreiecks:

$$A = 2 \cdot A_{\text{rechtwinklig}} = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin\beta\,\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\beta\,\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(2\beta) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin\alpha}}$$

Dies ist ein Beispiel dafür, wie hilfreich Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln sein können. Der Schlussausdruck für diese Dreiecksfläche ist extrem überschaubar und einfach geworden!

5. (a) Wir erhalten die folgenden Funktionsgraphen:



i. Es sieht so aus, als wären $f(x) = \sin^2 x$ und $g(x) = \cos^2 x$ selber wieder Sinus- oder Cosinusfunktionen!

ii. Für $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ weist die Sinusfunktion $\sin x$ Werte zwischen 0 und 1 auf. Quadrieren wir eine solche Zahl, so wird der Wert dadurch verkleinert. Beispiel: $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{6} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Folglich muss die Kurve von $\sin^2 x$ im Intervall $]0; \frac{\pi}{2}[$ stets unterhalb derjenigen von $\sin x$ verlaufen.

(b) Wir wollen die beiden Funktionen als parametrisierte Sinusfunktionen ansetzen: $A\cdot\sin\big(B(x-C)\big)+D$. Dafür lesen wir ab: Die Perioden beider Kurven sind halb so lang wie diejenige einer unmodifizierten Sinus- oder Cosinusfunktion, also $P = \pi$ und somit $B = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Die Kurven "schwingen" um eine mittlere Lage von $D = \frac{1}{2}$ mit einer Amplitude von ebenfalls $\frac{1}{2}$. Wenn wir in beiden Fällen mit einer modifizierten Sinusfunktion arbeiten, so muss diese im Falle von $\sin^2 x$ um eine Viertelperiode, hier also um $\frac{\pi}{4}$ nach links verschoben werden. Bei $\cos^2 x$ ist es hingegen eine Verschiebung um eine Viertelperiode nach rechts. Alles zusammen folgt:

$$f(x) = \sin^2 x \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)\right)+\frac{1}{2}$$
$$g(x) = \cos^2 x \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)\right)+\frac{1}{2}$$

Natürlich könnten wir auch von Anfang an mit modifizierten Cosinusfunktionen arbeiten. Bei $\cos^2 x$ wird auf diese Weise keine horizontale Verschiebung benötigt, bei $\sin^2 x$ hingegen eine um π oder – eben geschickter – eine Spiegelung an der x-Achse, also eine Multiplikation mit -1 resp. einfach eine negative Amplitude. So erhalten wir:

$$f(x) = \sin^2 x \stackrel{?}{=} -\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}$$
$$g(x) = \cos^2 x \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}$$

Das sieht irgendwie übersichtlicher aus als bei den Formulierungen mit der Sinusfunktion, einfach weil wir mittels Cosinusfunktion keine horizontalen Verschiebungen einbauen müssen.

(c) Wir nehmen nun die Cosinus-Doppelwinkelformel und lösen sie nach $\sin^2 x$ auf:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x = 1 - \cos(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)}}$$

Dieses Resultat entspricht bereits unserer Formulierung aus (b) unter Verwendung der Cosinusfunktion. Wir wollen $\sin^2 x$ aber auch noch als modifizierte Sinusfunktion ausdrücken. Dazu überlegen wir: Die negative (= an der x-Achse gespiegelte) Cosinuskurve ist eine um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschobene Sinuskurve:

$$-\cos(2x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Damit folgt für $\sin^2 x$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)}}$$

Das entspricht genau unserer Vermutung aus Aufgabe (b). Auf dieselbe Weise finden wir für $\cos^2 x$:

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x = \cos(2x) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)}}$$

Auch hier wollen wir die Cosinus- noch durch eine Sinusfunktion ersetzen. $\cos(2x)$ entspricht einer um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobenen Sinuskurve, also:

$$\cos(2x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Und damit erhalten wir für $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)}}$$

Auch dies entspricht unserer Vermutung in Aufgabe (b).

6. Wir starten mit $\tan(2\alpha)$ und formen kontinuierlich um:

$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \underline{\underline{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}}$$

7. Betrachten wir zuerst die Sinusfunktion. Mit dem Additionstheorem, mit der Doppelwinkelformel und mit $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ folgt:

$$\begin{aligned}
\sin(3\alpha) &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos(2\alpha) + \cos\alpha\sin(2\alpha)\\
&= \sin\alpha\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\\
&= \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha\\
&= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha\\
&= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha = \underline{\underline{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}}
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise finden wir für $\cos(3\alpha)$:

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos(2\alpha) - \sin\alpha\sin(2\alpha)\\ &= \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\\ &= \cos^3\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha\\ &= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\ &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = \underline{\underline{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}}\end{aligned}$$

8. Wir folgen dem Lösungsrezept:

   i. Es sind:

   $$22.5° = \frac{45°}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   ii. Mit den Doppelwinkelformeln können wir damit zwei Gleichungen ansetzen:

   $$\sin 45° = \sin\big(2 \cdot 22.5°\big) = 2\sin 22.5° \cos 22.5° \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   $$\text{und} \qquad \cos 45° = \cos\big(2 \cdot 22.5°\big) = \cos^2 22.5° - \sin^2 22.5° \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   iii. Somit haben wir effektiv ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten gefunden. Wir substituieren $x = \sin 22.5°$ und $y = \cos 22.5°$ und schreibe damit die Gleichungen neu:

   $$\left|\begin{array}{r} 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \qquad \Rightarrow \qquad \left|\begin{array}{r} x = \frac{\sqrt{2}}{4y} \\ 2x^2 - 2y^2 = \sqrt{2} \end{array}\right|$$

   Nun setzen wir die obere in die untere Gleichung ein und erhalten:

   $$\begin{aligned} & 2x^2 - 2y^2 = 2 \cdot \frac{2}{16y^2} - 2y^2 = \frac{1}{4y^2} - 2y^2 \stackrel{!}{=} \sqrt{2} \qquad \left| \cdot 4y^2 \right.\\ \Rightarrow \quad & 1 - 8y^4 = 4\sqrt{2}\,y^2 \quad \left| + 8y^4 - 1 \right.\\ \Leftrightarrow \quad & 8y^4 - 4\sqrt{2}\,y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

   Diese quadratische Gleichung für y^2 lösen wir mit der Mitternachtsformel:

   $$y^2 = \frac{4\sqrt{2} \pm \sqrt{\big(4\sqrt{2}\big)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{4\sqrt{2} \pm \sqrt{32+32}}{16} = \frac{4\sqrt{2} \pm \sqrt{64}}{16} = \frac{4\sqrt{2} \pm 8}{16} = \frac{\sqrt{2} \pm 2}{4}$$

   Da $\sqrt{2} < 2$ ist, kommt nur die Lösung mit dem $+$ in Frage, denn ganz links steht y^2, was ≥ 0 sein muss. Nun müssen wir noch die Wurzel ziehen, um schliesslich $\cos 22.5°$ zu erhalten:

   $$\cos 22.5° = y = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}}$$

   Wenn wir den Cosinuswert haben, ist der Sinuswert rasch bestimmt (Pythagoras!):

   $$\sin 22.5° = \sqrt{1 - \cos^2 22.5°} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{4-2-\sqrt{2}}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}}$$

   Mit gleicher Vorgehensweise könnten wir nun exakte Sinus- und Cosinuswerte für noch kleinere Winkel oder via Additionstheoreme exakte Werte für Winkel wie beispielsweise $52.5° = 30° + 22.5°$ erhalten. Diese Rechnungen wären zwar umständlich, aber eben grundsätzlich möglich.