

MATHEMATIK: TRIGONOMETRIE PHYSIK: SCHWINGUNGEN UND WELLEN

für die Klasse 155c

Alex Gertsch

Zürich im November 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Repetition: Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck	1
1.1	Die Definitionen der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck	1
1.2	Exakte Werte von 0° bis 90°	1
1.3	Klammerlose Notation der Winkelfunktionen	2
1.4	Zusammenhänge unter den Winkelfunktionen	2
1.5	Arcusfunktionen – die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen	3
2	Die Neudefinition der Winkelfunktionen am Einheitskreis	4
2.1	Erweiterung einer Funktion auf einen grösseren Definitionsbereich	4
2.2	Vorbereitungen: Winkel und Einheitskreis im x - y -Koordinatensystem	4
2.3	Die Definition von Sinus- und Cosinusfunktion am Einheitskreis	5
2.4	Folgerungen aus der Neudefinition von Sinus- und Cosinusfunktion	6
2.5	Die Definition der Tangensfunktion am Einheitskreis	9
2.6	Folgerungen aus der Neudefinition der Tangensfunktion	9
2.7	Enthalten die Neudefinitionen der Winkelfunktionen die alten Definitionen?	11
2.8	Die Arcusfunktionen mit den neuen Definitionen am Einheitskreis	12
3	Trigonometrie im allgemeinen Dreieck: Sinus- und Cosinussatz	14
3.1	Sinussatz und Cosinussatz – eine Kurzvorstellung	14
3.2	Der Beweis des Sinussatzes	16
3.3	Der Beweis des Cosinussatzes	18
3.4	Eine letzte Anmerkung zum Sinussatz	20
4	Winkelangaben im Bogenmass	21
4.1	Das Bogenmass – eine Bogenlänge auf dem Einheitskreis	21
4.2	Die Umrechnung zwischen Grad- und Bogenmass	22
4.3	Winkelfunktionen und Bogenmass	23
4.4	Grad- und Bogenmass im Taschenrechner	25
4.5	Sinus und Tangens bei kleinen Winkeln	25
5	Modifikationen der Sinusfunktion	27
5.1	Rep.: Vier Funktionsparameter und ihre grafischen Auswirkungen	27
5.2	Anwendung der vier Parameter auf die Sinusfunktion	29
5.3	Die Phase φ – noch ein Verschiebungsparameter	31
5.4	Übersicht zu den Funktionsparametern der allgemeinen Sinusfunktion	32
6	Die mathematische Beschreibung des harmonischen Oszillators	33
6.1	Periode T und Frequenz f ($\hat{=}$ Drehzahl)	33
6.2	Winkelgeschwindigkeit und Kreisfrequenz ω	33
6.3	Ein Beispiel: Die Windturbine von calandawind.ch	34
6.4	Drehbewegung einer Scheibe und Sinusfunktion des Federpendels	35
6.5	Die ungedämpfte Schwingung eines Federpendels	37
6.6	Reduktion auf das Wesentliche dank freier Wahl des Koordinatensystems	38
7	Resonanz – das Grundphänomen der Schwingungslehre	39
7.1	Eigenschwingungen und -frequenzen	39
7.2	Anregung und Resonanz	39
7.3	Frequenzselektion bzw. Tonhöherzeugung bei Musikinstrumenten	40
7.4	Tonverstärkung durch Resonanzkörper	40
7.5	Die Resonanzkatastrophe	41

8	Was ist ein Ton? – eine Antwort mittels Frequenzanalyse	42
8.1	Das Schalldruckdiagramm des Stimmgabeltons und sein Frequenzspektrum	42
8.2	Grundton und Obertöne am Beispiel eines Flügeltens	43
8.3	Rauschen und Geräusche ohne Tonhöhe	44
8.4	Zusammenfassung von und Folgerungen aus Kapitel 8	45
9	Klangsynthese durch Aufsummierung von Sinusschwingungen	46
9.1	Die Beschreibung der einzelnen Oberschwingung	46
9.2	Aufsummierung der Einzelschwingungen zur Gesamtschwingung	46
9.3	Die Summenbildung ohne Phasenverschiebungen	47
9.4	Der reale Fall: Die Summe mit Phasenverschiebungen	48
9.5	Kurzzusammenfassung – die Mathematik eines einzelnen Tons	48
10	Die Envelope am Beispiel des gedämpften Federpendels	49
10.1	Allgemeines zur Multiplikation von Funktionen	49
10.2	Das gedämpfte Federpendel	51
10.3	Gesamte Schwingungsfunktion $f(t)$ des Federpendels und Envelope $A(t)$	53
11	Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus	54
11.1	Vorstellung der Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln	54
11.2	Aussage und Plausibilisierung der Additionstheoreme	55
11.3	Doppelwinkelformeln – Herleitungen, etc.	56
12	Schwebungen – ein erstes Interferenzphänomen	57
12.1	Der mathematische Ansatz	57
12.2	Interferenz – ein Grundphänomen bei der Überlagerung von Wellen	60
13	Laufende Wellen	61
13.1	Das Ablösen eines einzelnen Wellenberges	61
13.2	Die Anregung einer laufenden Welle	62
13.3	Die mathematische Beschreibung der laufenden Welle	63
14	Stehende Wellen	65
14.1	Stehende Wellen auf zweiseitig eingespannten Seilen	65
14.2	Die Wellenlängen von stehenden Wellen auf eingespannten Seilen	67
14.3	Die mathematische Beschreibung der stehenden Welle	67
14.4	Stehende Welle als Superposition zweier entgegengesetzt laufender Wellen	69
14.5	Die Selektion der möglichen Wellenlängen	70
14.6	Die Frequenzselektion	71
A	Die Herleitung der Additionstheoreme	72
A.1	Repetition: Die Definitionen von Sinus und Cosinus am Einheitskreis	72
A.2	Die eigentliche Herleitung der Additionstheoreme	75

1 Repetition: Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

1.1 Die Definitionen der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Wir erinnern uns an den Anfang der trigonometrischen Betrachtungen im rechtwinkligen Dreieck:

- i. Als zueinander **ähnliche** Figuren bezeichnen wir **ebene Figuren**, die bis auf einen Skalierungsfaktor **kongruent** (= deckungsgleich) sind. Es gilt:

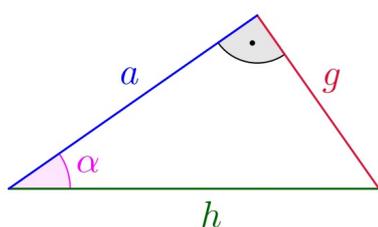
Ähnliche Figuren haben gleiche Winkel und gleiche Seitenverhältnisse.

- ii. Zwei **Dreiecke** sind zueinander ähnlich, wenn zwei Winkel miteinander übereinstimmen.¹
- iii. Schränken wir uns weiter auf **rechtwinklige Dreiecke** ein ($\gamma = 90^\circ$), so braucht in zwei solchen Dreiecken nur ein spitzer Winkel übereinzustimmen, damit sie ähnlich zueinander sind.
- iv. **Folgerung:** Wird in einem rechtwinkligen Dreieck einer der spitzen Winkel vorgegeben, so werden dadurch auch die Seitenverhältnisse des Dreiecks eindeutig festgelegt.

Diese Überlegungen führen uns zu den Definitionen der sogenannten **Winkelfunktionen**:

Definitionen der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck sei ein spitzer Winkel α vorgegeben, wodurch alle Seitenverhältnisse eindeutig festgelegt sind. Drei davon benutzen wir zur Definition der sogenannten **Winkelfunktionen** (= Funktionen, die vom Winkel α abhängen):



Sinus: $\sin(\alpha) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{g}{h}$ (1)

Cosinus: $\cos(\alpha) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{h}$ (2)

Tangens: $\tan(\alpha) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{g}{a}$ (3)

Rep.: Die **Hypotenuse** h liegt gegenüber des rechten Winkels und ist stets die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck. Die beiden kürzeren Seiten heißen **Katheten** und werden bezüglich des Winkels α als **Ankathete** a (an α anliegend) und als **Gegenkathete** g (gegenüber von α) bezeichnet.

1.2 Spezielle Werte von 0° bis 90°

Die rechts tabellierten exakten Werte der Winkelfunktionen von 0° bis 90° wollen wir stets **auswendig** haben! Sie lassen sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras herleiten. Die Werte für 0° und 90° gehören eigentlich nicht mehr zum erlaubten Winkelbereich von α , denn dann handelt es sich ja gar nicht mehr um ein Dreieck. Trotzdem sind die Angaben sinnvoll, wie wir bald sehen werden.

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-

¹Der dritte Winkel ist dann wegen der Winkelsumme von 180° sowieso auch gleich gross.

1.3 Klammerlose Notation der Winkelfunktionen

Die Funktionsschreibweise $f(x)$ bringt zum Ausdruck, dass f eine Funktion von x ist, dass wir also x als die **unabhängige** und f als die **abhängige Grösse** auffassen. Bei den Winkelfunktionen hängt jeweils das Seitenverhältnis vom Winkel ab. Demnach sollten wir Klammern dazuschreiben: $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$. Es hat sich aber etabliert, diese Funktionsklammern bei den Winkelfunktionen nur dann zu notieren, wenn es für das Verständnis eines Ausdrucks unbedingt erforderlich ist. Das ist immer dann der Fall, wenn der Ausdruck für einen Winkel, zu dem ein Seitenverhältnis angegeben werden soll, umfangreicher ist, z.B. in $\cos(90^\circ - \alpha)$.

Werden nur einzelne Winkelsymbole in eine Winkelfunktion eingesetzt, lassen wir die Klammer weg und schreiben einfach $\tan \alpha$, $\cos \delta$, $\sin \varphi$, etc.

Die Schreibweise ohne Klammern will stets richtig verstanden sein. Das gilt insbesondere bei Potenzen von Winkelfunktionen, wie z.B. in $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Dabei gilt:²

$$\sin^2 \alpha \equiv (\sin(\alpha))^2 \quad \text{und} \quad \cos^2 \alpha \equiv (\cos(\alpha))^2$$

Es wird also $\sin \alpha$ resp. $\cos \alpha$ ins Quadrat erhoben, nichts anderes.

1.4 Zusammenhänge unter den Winkelfunktionen

Aus den Definitionen der Winkelfunktionen lassen sich Beziehungen zwischen Ihnen herleiten.

Symmetrie: Ist α einer der spitzen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, so beträgt der andere spitze Winkel automatisch $\beta = 90^\circ - \alpha$. Die Gegenkathete von β ist die Ankathete von α und umgekehrt. Durch diese Vertauschung ergeben sich **Symmetriebeziehungen** zwischen der Sinus- und der Cosinusfunktion:

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{und} \quad \cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ sind **symmetrisch bezüglich $\alpha = 45^\circ$** . Diese Symmetrie ist bei den speziellen Werten unten auf Seite 1 gut erkennbar. Z.B. ist $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tangens-Ersetzung: Die Tangensfunktion kann stets durch einen Bruch aus Sinus- und Cosinusfunktion ersetzt werden:

$$\tan \alpha = \frac{g}{a} = \frac{\frac{g}{h}}{\frac{a}{h}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

“Trigonometrischer Pythagoras”: Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras. Ich notiere ihn mit Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse:

$$g^2 + a^2 = h^2$$

Daraus leiten wir für die Sinus- und die Cosinusfunktion folgende Beziehung ab:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{g}{h}\right)^2 + \left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{g^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{g^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

Wir nennen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ den **trigonometrischen Satz des Pythagoras**.

²Das Zeichen “ \equiv ” steht für “ist identisch mit (für jedes α)”, “wird identifiziert mit” resp. “ist zu verstehen als”. Es kann auch als Definition eines Ausdrucks verstanden werden. (Ich hätte stattdessen auch “ $:=$ ” schreiben können.)

Ich halte die eben erläuterten Beziehungen nochmals in einer Übersicht fest:

Zusammenhänge unter den Winkelfunktionen		
Symmetrien:	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	(4)
	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	(5)
Ersetzung:	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	(6)
(Trig.) Pythagoras:	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	(7)

1.5 Arcusfunktionen – die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gehört zu jedem Winkel α genau je ein Wert von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$. Die Winkelfunktionen sind **eindeutig**.

Das gilt auch in die Gegenrichtung! Z.B. legt ein bestimmtes Verhältnis q von Gegenkathete zu Hypotenuse eindeutig den zugehörigen Winkel α im rechtwinkligen Dreieck fest. Es kommen dafür nicht mehrere Winkelwerte in Frage. D.h., zu jeder Winkelfunktion existiert im rechtwinkligen Dreieck eine ebenso eindeutige **Umkehrfunktion**. Diese Umkehrfunktionen werden als **Arcusfunktionen** bezeichnet.

Beispiel: In einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck sei $q = \frac{g}{h}$ das Seitenverhältnis von Gegenkathete g zu Hypotenuse h bezüglich einem spitzen Winkel α . Dann gilt für α und q :

$$\sin \alpha = q \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arcsin(q)$$

Für ein Zahlenbeispiel können wir unsere Tabelle mit den speziellen Werten konsultieren:

$$\alpha = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad q = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{resp. umgekehrt:} \quad q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

Zur Schreibweise der Arcusfunktionen

Oftmals erlauben wir uns bei diesen Arcusfunktionen die **Taschenrechner-Notation** zu verwenden: $\sin^{-1}(q)$, $\cos^{-1}(q)$ und $\tan^{-1} q$. Die althergebrachten Schreibweisen $\arcsin(q)$, $\arccos(q)$ und $\arctan q$ sollen dabei aber nicht vergessen gehen, weshalb ich in diesem Skript konsequent diese Notation benutze. In Kürze wird übrigens klar werden, woher der Ausdruck *arcus* genau kommt. Damit wird auch diese Namensgebung verständlicher.³

³Die Taschenrechner-Schreibweise kommt übrigens daher, dass im allgemeinen Funktionsformalismus die Umkehrfunktion zu einer Funktion f mit f^{-1} bezeichnet wird.

2 Die Neudefinition der Winkelfunktionen am Einheitskreis

2.1 Erweiterung einer Funktion auf einen grösseren Definitionsbereich

Wir wollen in diesem Kapitel die Winkelfunktionen auf beliebige Winkel **erweitern**. D.h., jedem Winkel α von $-\infty^\circ$ bis $+\infty^\circ$ soll neuerdings ein Sinus-, Cosinus- und Tangenswert zugeordnet werden können.⁴

Natürlich fordern wir, dass eine derartige Funktionserweiterung auf dem bisherigen Definitionsbereich⁵, also für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, immer noch dieselben Werte wie bis anhin liefert; $\sin 60^\circ$ soll beispielsweise immer noch $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ergeben. Ansonsten würden wir durch die "Erweiterung" eine ganz neue Funktion erschaffen und es gäbe keinen vernünftigen Grund sie gleich zu nennen wie die alte. Die in den Abschnitten 2.3 und 2.5 eingeführten Neudefinitionen der Winkelfunktionen am Einheitskreis erfüllen diese Forderung, wie wir uns hinterher überlegen werden.

2.2 Vorbereitungen: Winkel und Einheitskreis im x - y -Koordinatensystem

Winkelangabe im x - y -Koordinatensystem und Richtungsstrahl

- i. Wir betrachten ein normales x - y -Koordinatensystem (vgl. Abb. 1).
- ii. Wir setzen uns in den Ursprung $(0, 0)$ und legen fest, dass die Blickrichtung längs der positiven x -Achse dem Winkel 0° entspricht. Von dieser **Nullrichtung** aus geben wir nun Winkel an.
- iii. Dazu legen wir fest:
 - **Positive Winkel** $\alpha > 0^\circ$ werden **im Gegenuhrzeigersinn** abgetragen.
 - **Negative Winkel** $\alpha < 0^\circ$ werden **im Uhrzeigersinn** abgetragen.

Auf diese Weise lassen sich beliebige Winkelwerte $-\infty^\circ < \alpha < +\infty^\circ$ abtragen. Zu jedem Winkel α gehört ein von $(0, 0)$ wegführender (**Richtungs-)**Strahl s_α . Dabei fallen beispielsweise die Strahlen für $\alpha = \dots, -240^\circ, 120^\circ, 480^\circ, 840^\circ, \dots$ zusammen, denn diese Winkel unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° , also um eine ganze Umdrehung.

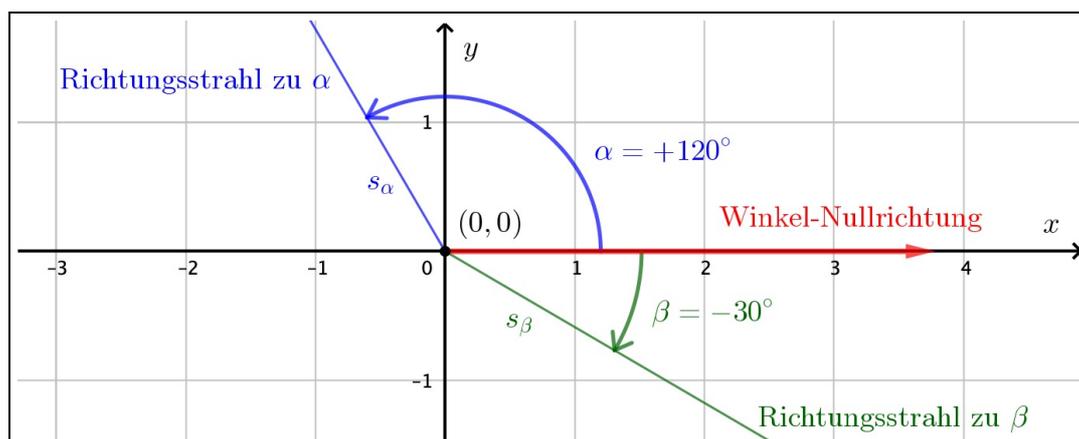


Abbildung 1: Abtragen von Winkeln im x - y -Koordinatensystem.

⁴Ausnahme: Der Tangens wird **Definitionslücken** aufweisen, also einzelne Winkelwerte, die nicht in die Funktion eingesetzt werden können.

⁵Repetition: Als **Defintionsbereich** \mathbb{D} einer Winkelfunktion bezeichnen wir die Menge aller Werte Winkel α , die wir in die Funktion einsetzen dürfen.

Der Einheitskreis

Als **Einheitskreis** bezeichnen wir den Kreis mit Radius 1 rund um den Ursprung $(0,0)$ in einem x - y -Koordinatensystem. Jeder Punkt $P(x,y)$ auf dem Einheitskreis hat also den Abstand 1 zum Ursprung, sodass gemäss dem Satz des Pythagoras für seine Koordinaten x und y gilt:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (8)$$

Dass es auch Punkte mit negativen Koordinaten gibt, spielt wegen der Quadrate keine Rolle!

Gleichung (8) nennt man die **implizite Beschreibung** des Einheitskreises, denn mit ihr kann die Punktmenge, die den Einheitskreis ausmacht, vollständig beschrieben werden:

$$\text{Einheitskreis} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

“Der Einheitskreis besteht aus allen Punkten (x, y) in der reellen x - y -Zahlenebene⁶ mit der Eigenschaft, dass die beiden Koordinaten die Beziehung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen.”

So einfach das Objekt Einheitskreis daher kommt, so wichtig ist es für die Trigonometrie, eben weil wir daran die Winkelfunktionen definieren!

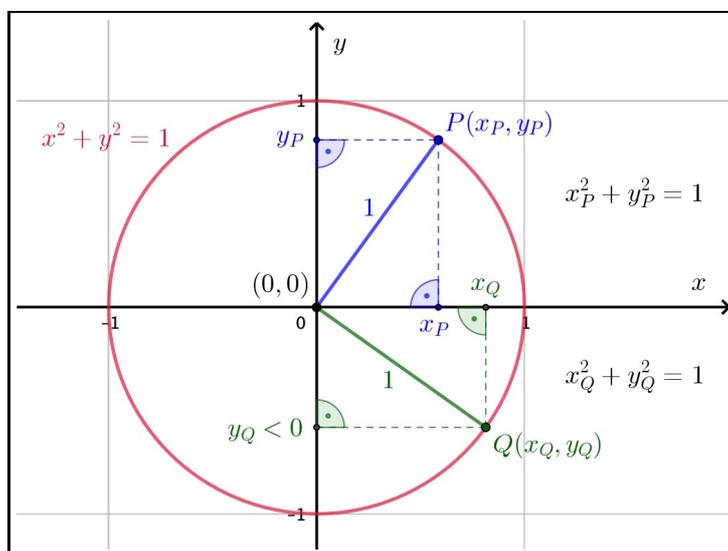


Abbildung 2: Der rote Einheitskreis besteht aus allen Punkten (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$.

2.3 Die Definition von Sinus- und Cosinusfunktion am Einheitskreis

Die Winkelfunktionen sollen jedem Winkel α einen eindeutigen Funktionswert zuordnen. Bei der Sinus- und der Cosinusfunktion läuft diese Zuordnung nun folgendermassen (vgl. Abb. 3):

- i. Der Winkel α legt den vom Ursprung $(0,0)$ ausgehenden Strahl s_α fest.
- ii. Der Strahl s_α schneidet den Einheitskreis in einem bestimmten Punkt P , dessen Koordinaten (x_P, y_P) folglich durch die Wahl von α eindeutig festgelegt werden.
- iii. Nun definieren wir, dass $\cos \alpha$ durch die x -Koordinate und $\sin \alpha$ durch die y -Koordinate des Punktes P gegeben sei:

$$\cos \alpha := x_P \quad \text{und} \quad \sin \alpha := y_P$$

⁶Dafür schreiben wir kurz \mathbb{R}^2 und meinen damit ganz präzise die Menge aller reellen, geordneten Zahlenpaare, also eben alle Paare der Form (x, y) mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

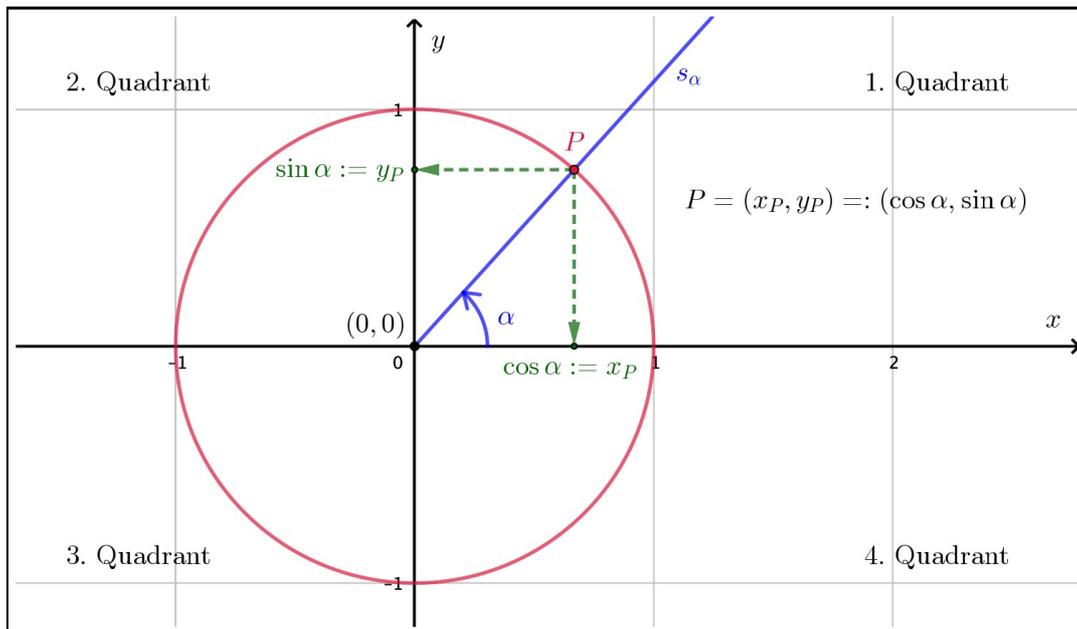


Abbildung 3: Die Definition von Sinus- und Cosinusfunktion am Einheitskreis: Die Werte der beiden Winkelfunktionen entsprechen den Koordinaten des Punktes P auf dem Einheitskreis, der durch die Vorgabe des Winkels α festgelegt wird.

2.4 Folgerungen aus der Neudefinition von Sinus- und Cosinusfunktion

Beschränktheit von Sinus- und Cosinusfunktion Da alle Sinus- und Cosinuswerte Koordinaten von Punkten auf dem Einheitskreis sind, sind sie **beschränkt auf das Intervall** $[-1; 1]$:

$$\text{Beschränktheit: } -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{für alle } \alpha \quad (9)$$

Vorzeichen in den vier Quadranten: $\sin \alpha$ hat als Wert die y -Koordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis, $\cos \alpha$ entspricht der x -Koordinate von P . Damit ist klar, welche **Vorzeichen** die beiden Winkelfunktionen in den vier **Quadranten** des x - y -Koordinatensystems resp. für verschiedene Winkelbereiche aufweisen:

	1. Quadrant $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	2. Quadrant $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	3. Quadrant $180^\circ < \alpha < 270^\circ$	4. Quadrant $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+

$\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ sind 360° -periodisch: Nach einer vollen Runde um den Einheitskreis wiederholen sich die Werte von Sinus- und Cosinusfunktion, denn der Strahl zu $(\alpha + 360^\circ)$ zeigt wieder in dieselbe Richtung wie der Strahl zu α . Wir sagen: Sinus und Cosinus besitzen eine **Periode** von 360° . Sie sind **360° -periodisch**. Es gilt also:

$$\text{Periodizitäten: } \sin(\alpha \pm 360^\circ) = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos(\alpha \pm 360^\circ) = \cos \alpha \quad \text{für alle } \alpha \quad (10)$$

Sinus- und Cosinuskurven: Die Graphen von Sinus- und Cosinusfunktion heissen **Sinus-** resp. **Cosinuskurve** (vgl. Abb. 4). Diese Kurven haben ein sehr charakteristisches Aussehen und sind für die gesamte Mathematik und Physik von enormer Bedeutung. Ihren Verlauf sollten wir uns im Kopf jederzeit vorstellen können! Dazu merkt man sich am besten:

- Die **Sinuskurve** verläuft durch den Ursprung $(0, 0)$ und erreicht bei 90° den Wert 1.
- Die **Cosinuskurve** hat bei 0° den Wert 1 und erreicht bei 90° den Wert 0.

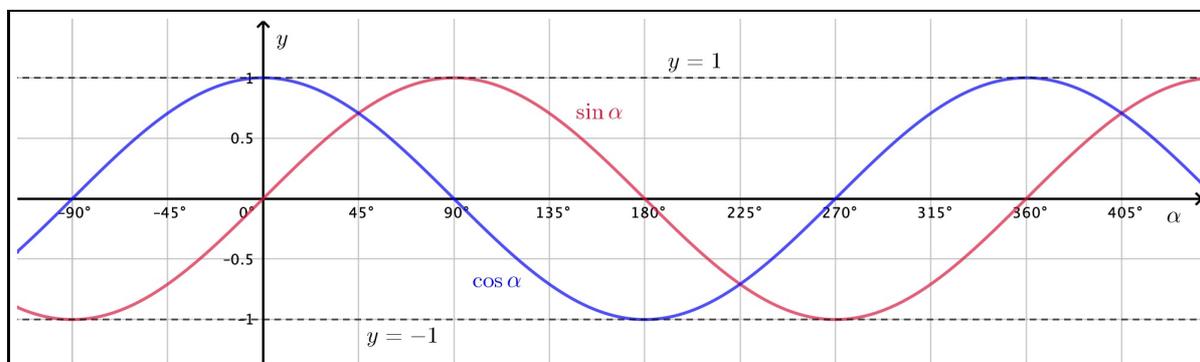


Abbildung 4: Sinus- und Cosinuskurve.

Die Hauptsymmetrien von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$: Die Cosinuskurve ist **achsensymmetrisch zur y -Achse** (vgl. Abb. 5). Somit ist die Cosinusfunktion eine sogenannte **gerade Funktion** und für alle Winkel α gilt die Symmetriebeziehung:

$$\text{Cosinusfunktion ist gerade: } \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \text{für alle } \alpha \quad (11)$$

Die Sinuskurve ist **punktsymmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$** . Das bedeutet, die Sinusfunktion ist eine **ungerade Funktion** und es gilt:

$$\text{Sinusfunktion ist ungerade: } \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{für alle } \alpha \quad (12)$$

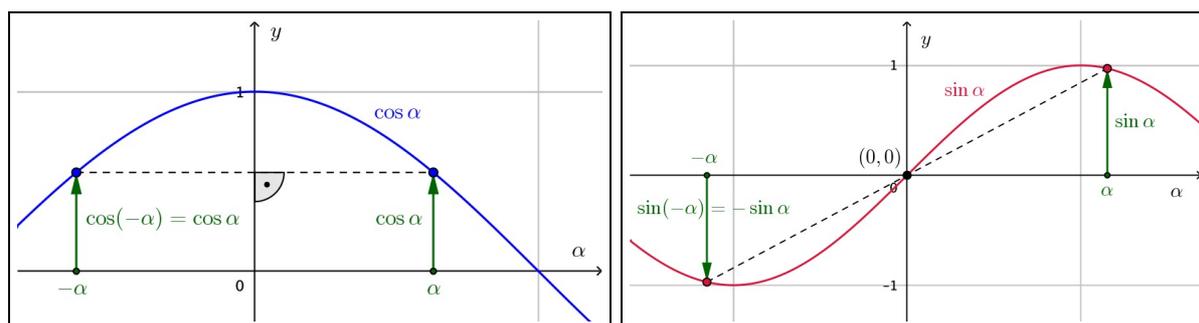


Abbildung 5: Die grundlegenden Symmetrieeigenschaften von Cosinus- und Sinusfunktion: Der Cosinus ist gerade – die Cosinuskurve ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Die Sinusfunktion ist ungerade – die Sinuskurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Weitere Symmetrien von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$: Aus den Kurven lassen sich beliebig viele weitere **Symmetrierelationen** ablesen, so z.B. für jedes Maximum oder Minimum eine Achsensymmetrie und für jeden Durchgang durch die horizontale Achse eine Punktsymmetrie. Beispielsweise gilt für die Cosinusfunktion (vgl. Abb. 6):

Achsensymmetrien: $\cos(-180^\circ - \alpha) = \cos(-180^\circ + \alpha)$ $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ + \alpha)$
 $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(360^\circ + \alpha)$ $\cos(540^\circ - \alpha) = \cos(540^\circ + \alpha)$

Punktsymmetrien: $\cos(-90^\circ - \alpha) = -\cos(-90^\circ + \alpha)$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha)$
 $\cos(270^\circ - \alpha) = -\cos(270^\circ + \alpha)$ $\cos(450^\circ + \alpha) = -\cos(450^\circ - \alpha)$

Weitere Symmetrierelationen finden wir, wenn wir verschiedene Symmetrieachsen und -punkte miteinander in Verbindung setzen. Beispiele:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

Die erste Gleichung in Worten: "Anstatt von 180° um den Winkel α nach links zu gehen ($180^\circ - \alpha$), kann ich ebenso gut vom Ursprung aus um den Winkel α nach rechts gehen ($0^\circ + \alpha = \alpha$). Für beide Winkel, $180^\circ - \alpha$ und α , erhalte ich so stets denselben Sinuswert."

Noch mehr Symmetrierelationen ergeben sich, wenn wir auch Beziehungen zwischen $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ zulassen. Hier zwei Beispiele, die bereits vom rechtwinkligen Dreieck bekannt sind und die Symmetrie zwischen Sinus und Cosinus bezüglich 45° beschreiben (vgl. Abb. 6):

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

Allgemein darf man aber sagen: Alle diese zusätzlichen Symmetrierelationen brauchen wir uns nicht speziell zu merken, denn sie lassen sich bei Bedarf rasch wieder herleiten, wenn man die Sinus- und die Cosinusfunktion vor Augen hat. Wirklich zentral sind hingegen die auf Seite 7 vorgestellten "Hauptsymmetrien" der Sinus- und der Cosinusfunktion.

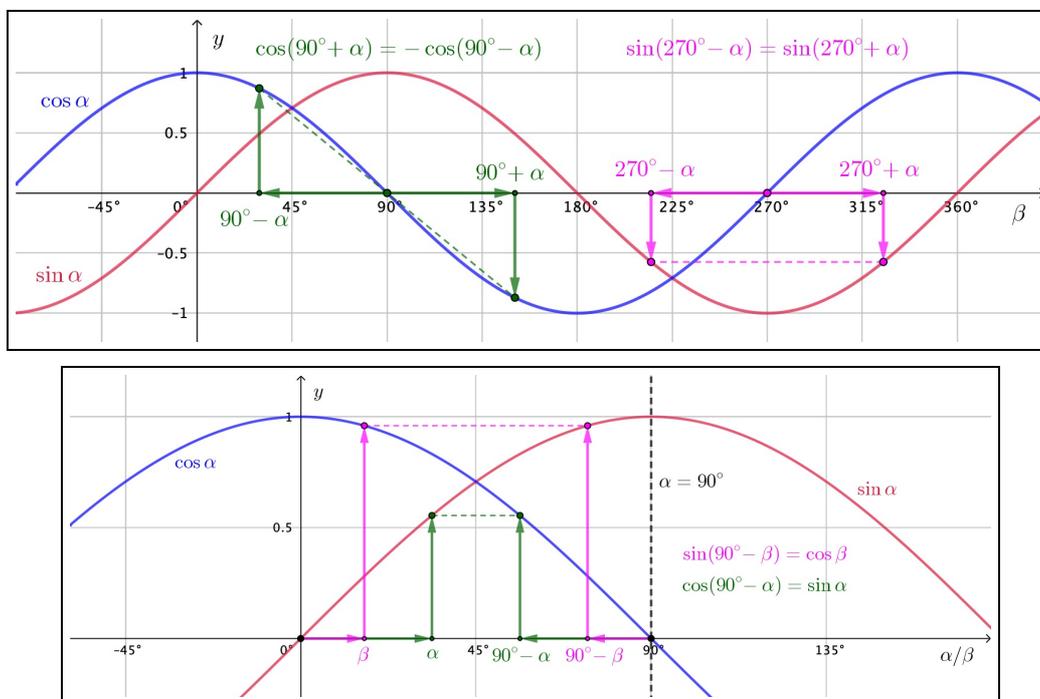


Abbildung 6: Veranschaulichung weiterer Symmetrien von Sinus- und Cosinusfunktion.

2.5 Die Definition der Tangensfunktion am Einheitskreis

Wenden wir uns nun der Neudefinition der Tangensfunktion zu (vgl. Abb. 7):

- i. Der Winkel α legt die Richtung des vom Ursprung $(0, 0)$ des x - y -Koordinatensystems ausgehenden Strahls s_α fest, den wir allerdings gleich "rückwärts" über den Ursprung $(0, 0)$ hinaus verlängern. Er wird so zu einer **Gerade** g_α .
- ii. Wir legen nun im Punkt $(1, 0)$ eine **vertikale Tangente** $t: x = 1$ an den Einheitskreis.
- iii. Die Gerade g_α schneidet in der Regel die Tangente t und legt so den Punkt $Q(1, y_Q) \in t$ fest.
- iv. Wir definieren: $\tan \alpha$ ist durch die y -Koordinate von Q gegeben:

$$\tan \alpha := y_Q$$

Auch die Tangensfunktion wird also durch die Koordinate eines Punktes definiert, der durch die Wahl des Winkels α geometrisch festgelegt wird.

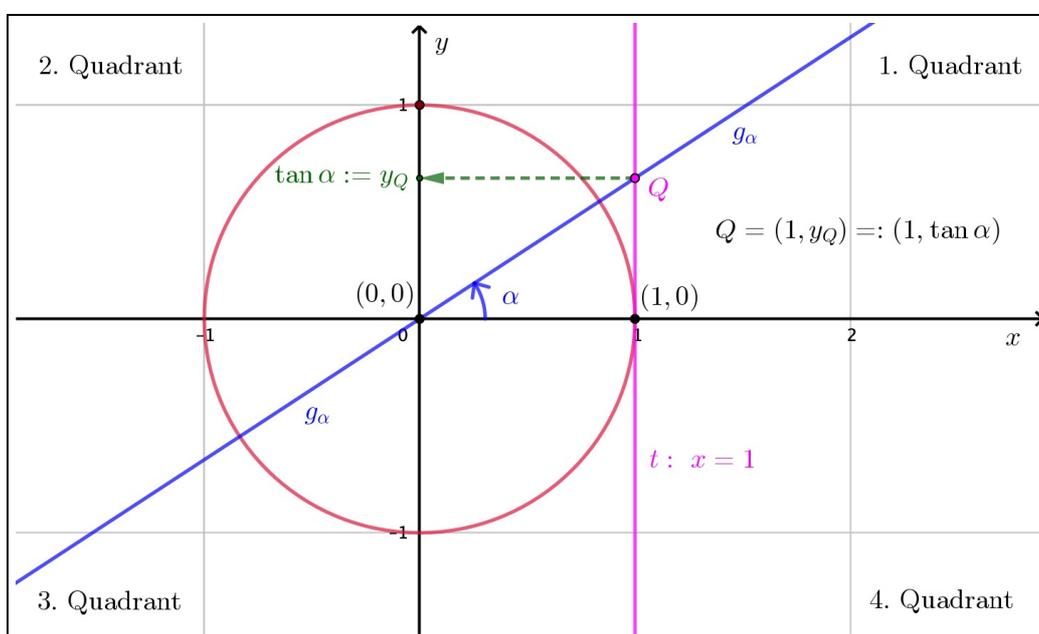


Abbildung 7: Die Definition von Tangensfunktion am Einheitskreis: Der Tangenswert entspricht der y -Koordinate des Punktes Q auf der vertikalen Tangente $x = 1$ an den Einheitskreis.

2.6 Folgerungen aus der Neudefinition der Tangensfunktion

$\tan \alpha$ weist Definitionslücken auf: Für $\alpha = 90^\circ$ ist g_α identisch mit der y -Achse. Dann existiert der Punkt Q gar nicht, weil g_α und t parallel zueinander liegen. Für $\alpha = 90^\circ$ ist also die Tangensfunktion **nicht definiert**.

Dies wiederholt sich alle 180° . $\tan \alpha$ hat somit unendlich viele **Definitionslücken**, nämlich bei allen Winkeln, die um ein ganzzahliges Vielfaches von 180° von 90° entfernt sind:

$$\begin{aligned} \text{Menge aller Tangens-Definitionslücken} &= \{ \dots, -270^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, 630^\circ, \dots \} \\ &= \{ 90^\circ + k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

$\tan \alpha$ ist **180°-periodisch**: Alle 180° sieht die Gerade g_α wieder identisch aus.⁷ Daher besitzt die Tangensfunktion eine **Periode** von 180° und es gilt:

$$\text{Periodizität: } \tan(\alpha \pm 180^\circ) = \tan \alpha \quad \text{für alle } \alpha \quad (13)$$

Tangenskurve: Abb. 8 zeigt die **Tangenskurve**. Auch diese Kurve ist in ihrem Aussehen sehr charakteristisch und wir sollten sie uns stets vorstellen können! Dazu merkt man sich:

- Die **Tangenskurve** verläuft durch den Ursprung $(0, 0)$ und strebt gegen $+\infty$, wenn α sich von unten her 90° nähert. Sie springt bei den Definitionslücken jeweils von $+\infty$ zu $-\infty$ ist dazwischen stets steigend.

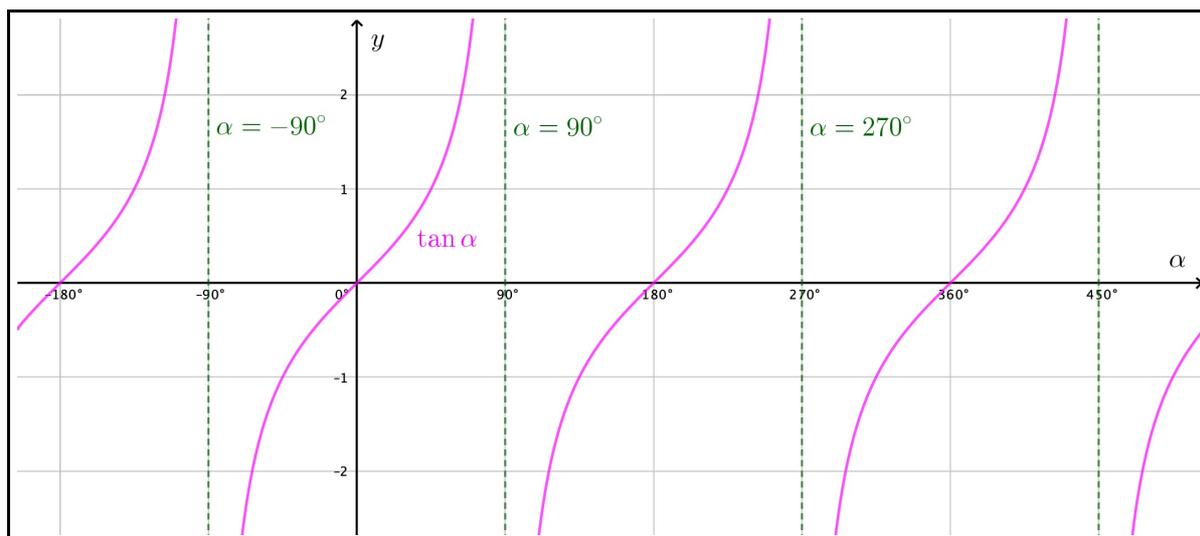


Abbildung 8: Die Tangenskurve.

Polstellen – das Aussehen der Definitionslücken: Bei $\alpha = 45^\circ$ hat $\tan \alpha$ den Wert 1. Gehen wir von dort aus in Abb. 7 mit α gegen 90° , so steigt $\tan \alpha$ immer weiter und erreicht so beliebig grosse Werte, denn der Schnittpunkt von g_α mit der vertikalen Tangente $t : x = 1$ rückt beliebig weit nach oben und die y -Koordinate von Q wird beliebig gross. Wir sagen: “Für $\alpha \nearrow 90^\circ$ strebt $\tan \alpha$ gegen $+\infty$ ”.⁸

Ganz analog können wir überlegen, dass $\tan \alpha$ für $\alpha \searrow 90^\circ$ gegen $-\infty$ strebt.

Betrachten wir nun den Graphen von $\tan \alpha$ in Abb. 8. An der Stelle $\alpha = 90^\circ$ ist $\tan \alpha$ nicht definiert. Links davon geht die Funktion gegen $+\infty$, rechts davon gegen $-\infty$. Eine solche Definitionslücke, neben der die Funktionswerte gegen $\pm\infty$ streben, bezeichnen wir allgemein als **Polstelle**. Solche Polstellen werden wir noch bei diversen anderen Funktionen antreffen. Die Definitionslücken von $\tan \alpha$ sind also Polstellen.

$\tan \alpha$ ist eine ungerade Funktion: Die Tangenskurve ist **punktsymmetrisch zum Ursprung** $(0, 0)$. Das bedeutet, der Tangens ist eine **ungerade** Funktion und es gilt:

$$\text{tan } \alpha \text{ ist ungerade: } \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \quad \text{für alle } \alpha \quad (14)$$

Auch beim Tangens liessen sich beliebig viele weitere Symmetrierelationen gewinnen. Diese werden wir aber so selten verwenden, dass wir uns an dieser Stelle nicht weiter darum bemühen.

⁷Im Gegensatz zum Strahl s_α bei der Definition von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$, der nur alle 360° in dieselbe Richtung zeigt.

⁸ $\alpha \nearrow 90^\circ$ ist die Kurzschreibweise dafür, dass sich α von kleineren Werten her 90° beliebig annähern, 90° selber aber nie erreichen soll. $\alpha \nearrow 90^\circ$ lesen wir als: “ α geht von unten gegen 90° ”.

2.7 Enthalten die Neudefinitionen der Winkelfunktionen die alten Definitionen?

Die Antwort lautet uneingeschränkt: Ja! Zwischen 0° und 90° stimmen sämtliche Werte von Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion in beiden Definitionen überein.

Das wollen wir noch etwas besser verstehen. Weshalb enthalten die Definitionen am Einheitskreis diejenigen am rechtwinkligen Dreieck? Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass der Einheitskreis eben den Radius 1 aufweist. Schauen wir uns einen beliebigen Winkel $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ an. Abb. 9 unten zeigt die Situation. Darin sind zwei rechtwinklige Dreiecke erkennbar:

- Im Dreieck $\triangle OAP$ entspricht die Hypotenuse dem Kreisradius, ist also gleich 1, und die Längen der beiden Katheten sind gemäss der Definition am Einheitskreis gegeben durch $\cos \alpha$ (= Ankathete von α) und $\sin \alpha$ (= Gegenkathete von α). Setzen wir diese Dreiecksseiten in die alten Definitionen von Sinus und Cosinus ein, so finden wir:

$$\sin_{\text{alt}}(\alpha) := \frac{\text{Gegenkath.}}{\text{Hyp.}} = \frac{\sin \alpha}{1} = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos_{\text{alt}}(\alpha) := \frac{\text{Ankath.}}{\text{Hyp.}} = \frac{\cos \alpha}{1} = \cos \alpha$$

- Im Dreieck $\triangle OBQ$ ist die Ankathete von α gleich 1 und die Gegenkathete entspricht gemäss der neuen Definition gerade $\tan \alpha$. Setzen wir diese Seiten in die alte Definition des Tangens ein, so finden wir:

$$\tan_{\text{alt}}(\alpha) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\tan \alpha}{1} = \tan \alpha$$

Tatsächlich stimmen für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ alle neuen Definitionen der Winkelfunktionen am Einheitskreis mit den alten Definitionen am rechtwinkligen Dreieck überein, sodass wir nicht mehr zwischen alt und neu zu unterscheiden brauchen. Die alten Definitionen sind vollständig in der Erweiterung enthalten.

Nach wie vor gültig sind auch alle Zusammenhänge, die wir für die Winkelfunktionen im Kasten auf Seite 3 festgehalten hatten, namentlich:

Symmetrien: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ und $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

Ersetzung: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ **Trigo. Pythagoras:** $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

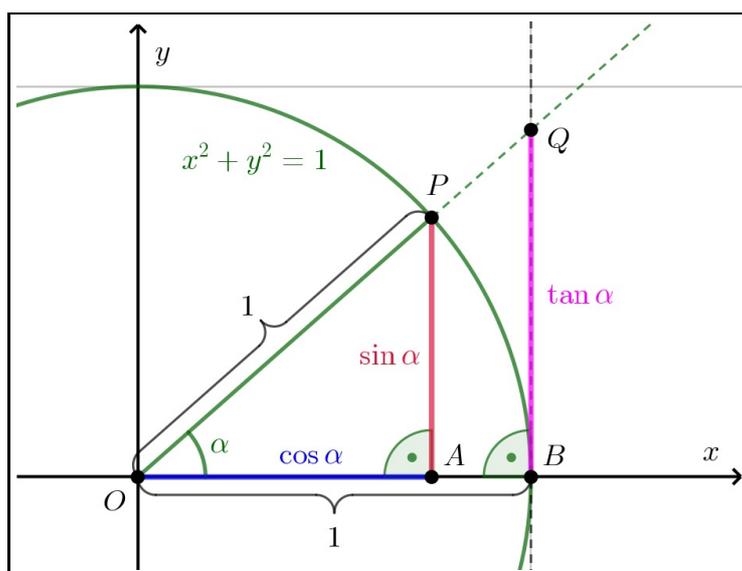


Abbildung 9: Die alten Definitionen der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck lassen sich in der neuen Situation am Einheitskreis wiederentdecken.

2.8 Die Arcusfunktionen mit den neuen Definitionen am Einheitskreis

Trigonometrische Gleichungen mit unendlich vielen Lösungen

Solange wir uns auf Winkel $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ beschränken, sind die Winkelfunktionen **eindeutig**. D.h., zu jedem Winkel α gibt es genau einen Wert von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ und jedem gültigen Wert dieser vier Winkelfunktionen kann umgekehrt auch wieder genau ein Winkel $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ zugeordnet werden.

Die Umkehrfunktionen $\arcsin(y)$, $\arccos(y)$ und $\arctan(y)$ waren bis anhin also genauso eindeutig wie die Winkelfunktionen selber. So galt beispielsweise strikt:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

Die **trigonometrische Gleichung** $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ hatte bisher genau eine Lösung!

Diese Eindeutigkeit geht mit der Neudefinition der Winkelfunktionen am Einheitskreis grundsätzlich verloren! So lösen neuerdings unendlich viele Winkel α die Gleichung $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, wie Abb. 10 illustriert.

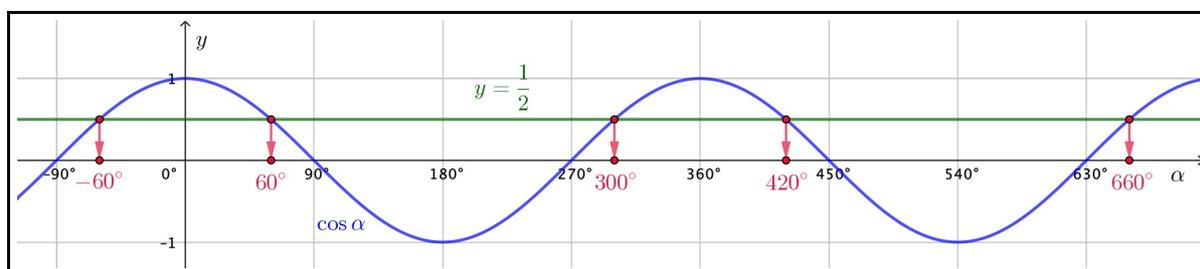


Abbildung 10: Zur Gleichung $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ gibt es pro Periode zwei passende Werte von α .

Es ergibt sich eine Lösungsmenge mit unendlich vielen Elementen:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{L} = \{ \pm 60^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

In einer Periode (= ein Umlauf des Winkels α um den Ursprung resp. 360°) finden wir zwei Lösungen. Bei $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ sind das z.B. $\alpha = 60^\circ$ und $\alpha = -60^\circ$ (oder $\alpha = 300^\circ$). Alle weiteren Lösungen unterscheiden sich von einer dieser beiden Lösungen um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° .

Die Lösungsmenge oben liest sich folgendermassen: "Alle Winkel α , die sich schreiben lassen in der Form $\alpha = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$ oder $\alpha = -60^\circ + k \cdot 360^\circ$, wobei k für eine ganze Zahl steht."

Einschränkung der Wertebereiche der Arcusfunktionen

Natürlich möchten wir die Arcusfunktionen, also die Umkehrfunktionen von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ weiterhin gebrauchen können. Von mathematischen Funktionen fordern wir aber stets **Eindeutigkeit**: Jeder Zahl y soll durch eine Arcusfunktion ein ganz bestimmter Winkel α zugewiesen werden. Es dürfen nicht mehrere Winkel herauskommen.

Diese Forderung der Eindeutigkeit erfüllen wir, indem wir die Wertebereiche der Arcusfunktionen gezielt einschränken, sodass für ein y immer nur ein ganz bestimmtes α in Frage kommt:

$$\begin{array}{lll} \arcsin : & [-1; 1] & \longrightarrow & [-90^\circ; 90^\circ] & \arccos : & [-1; 1] & \longrightarrow & [0^\circ; 180^\circ] \\ & y & \longmapsto & \arcsin(y) & & y & \longmapsto & \arccos(y) \\ \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-90^\circ; 90^\circ[\\ & y & \longmapsto & \arctan(y) \end{array}$$

Unser Taschenrechner ist selbstverständlich mit diesen Einschränkungen vertraut.

Graphen der Arcusfunktionen

Betrachten wir zum Kapitelende nun noch die Graphen der Arcusfunktionen.

Grundsätzlich gilt stets: Der Graph einer Umkehrfunktion ist die Spiegelung des Graphen der ursprünglichen Funktion an der Winkelhalbierenden w_{13} des 1. und des 3. Quadranten. Damit wir diesen Zusammenhang deutlich vor Augen haben, zeigt Abb. 11 jeweils den Graph der Arcusfunktion und unterlegt den Graph der zugehörigen Winkelfunktion.

Wir sehen, dass es bei den Arcusfunktionen nun eben "Weglassungen" gibt, die auf die Einschränkung des Wertebereichs zur Wahrung der Eindeutigkeit zurückzuführen sind.

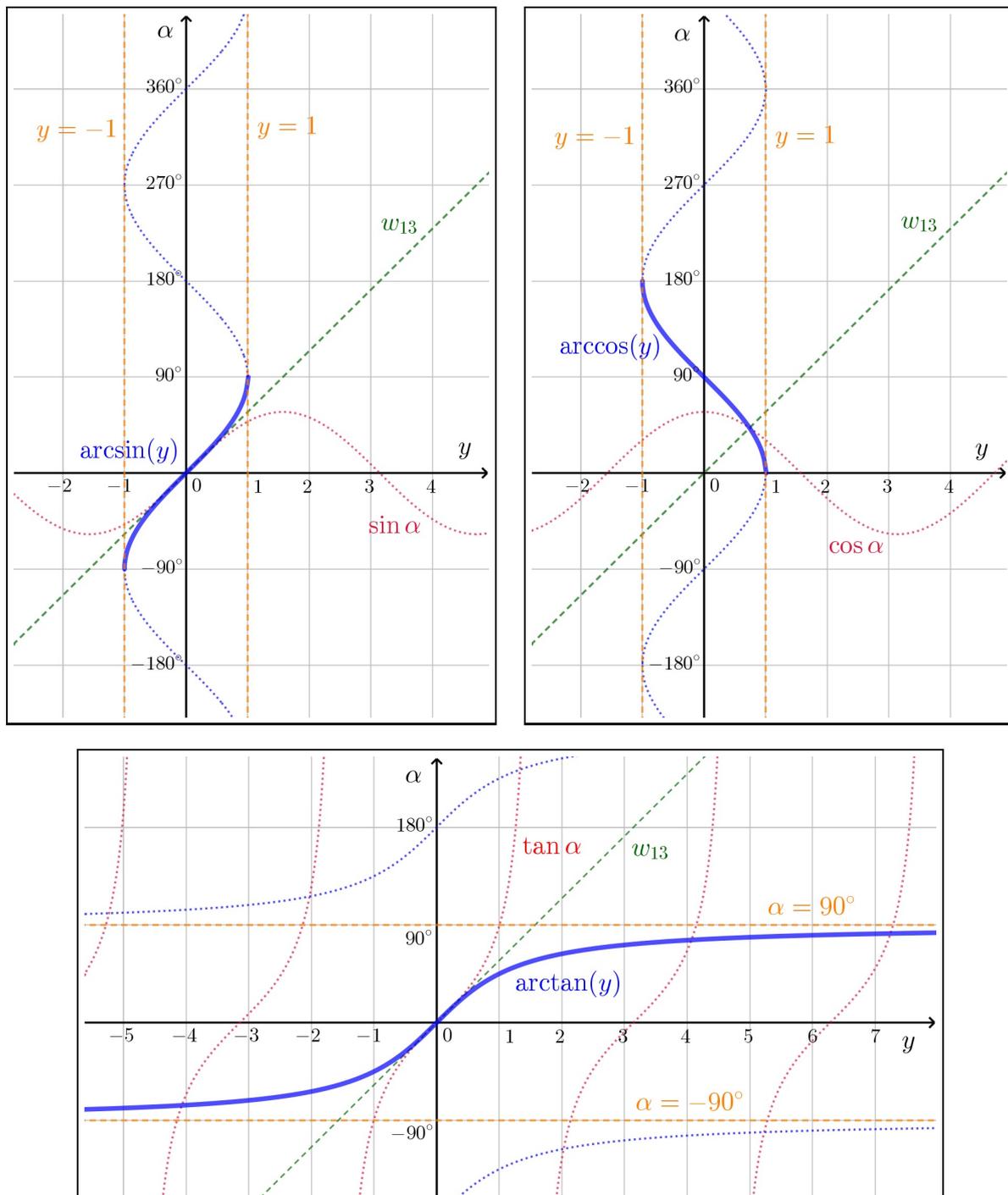


Abbildung 11: Die Graphen der Arcusfunktionen $\arcsin(y)$, $\arccos(y)$ und $\arctan(y)$.

3 Trigonometrie im allgemeinen Dreieck: Sinus- und Cosinussatz

Die drei Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens erlauben uns im rechtwinkligen Dreieck beliebige Seiten und Winkel zu berechnen. Dies ist bereits ein sehr mächtiger Werkzeugkasten, mit dem wir auch in umfangreicheren ebenen Figuren alle möglichen Rechnungen anzustellen vermögen. Schliesslich lässt sich ein beliebiges Vieleck stets in rechtwinklige Dreiecke zerlegen, wie Abb. 12 exemplarisch zeigt.

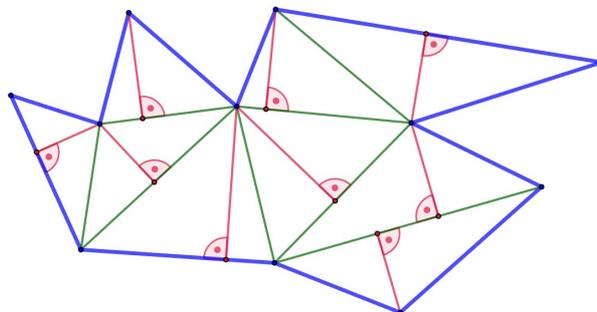


Abbildung 12: Zerlegung eines 11-Ecks in lauter rechtwinklige Dreiecke.

In bisherigen Übungen haben wir auf diese Weise bereits Vierecke behandelt oder in **allgemeinen Dreiecken** (= alle möglichen Dreiecke, auch ohne rechten Winkel) durch eine Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke Berechnungen angestellt. Gerade letztere Zerlegung scheint ganz praktisch zu sein, wie wir in Abb. 12 erahnen können. Dort wurde nämlich das 11-Eck zuerst in allgemeine Dreiecke (grün) zerlegt, die dann je in zwei rechtwinklige Dreiecke (rot) aufgeteilt wurden. So wird klar, dass sich tatsächlich jedes Vieleck in rechtwinklige Dreiecke zerlegen lässt.

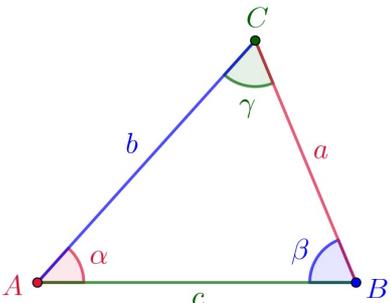
Weiter verstehen wir nun aber, dass es nützlich sein könnte, trigonometrische Aussagen in allgemeinen Dreiecken zur Verfügung zu haben, denn dann müssten wir nicht immer jedes allgemeine Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilen, um darin Berechnungen anzustellen.

Genau solche in jedem beliebigen Dreieck gültigen trigonometrischen Zusammenhänge sollen in diesem Kapitel vorgestellt werden – selbstverständlich inklusive ihrer Beweise. Sie werden als **Sinussatz** und als **Cosinussatz** bezeichnet und sind in vielen Anwendungen, z.B. in der Vermessungstechnik, von grossem Nutzen.

3.1 Sinussatz und Cosinussatz – eine Kurzvorstellung

Hier die beiden neuen trigonometrischen Aussagen im allgemeinen Dreieck:

Sinussatz und Cosinussatz im allgemeinen Dreieck



In jedem Dreieck gelten die folgenden Beziehungen (Standardbeschriftung siehe links):

Sinussatz: $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ (15)

Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (16)

Der Cosinussatz gilt zyklisch für alle Winkel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Erste Anmerkungen zum Sinus- und zum Cosinussatz

- Für die konkrete Anwendung ist der Sinussatz oben "zu umfangreich" notiert. Wir verwenden ihn als Beziehung zwischen zwei Winkeln und den jeweils gegenüberliegenden Seiten, also z.B.

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} .$$

Die Notation im vorigen Kasten enthält einfach alle möglichen Beziehungen auf einmal.

- Der Cosinussatz verknüpft die drei Dreiecksseiten mit genau einem der drei Winkel. Er kann folglich auf drei verschiedene Arten notiert werden, wie das im Kasten gezeigt wurde. Man spricht von einer **zyklischen Vertauschung** der Variablen: Aus a wird b , aus b wird c und aus c wird a , während α zu β , β zu γ und γ zu α wird.
- Wann der Sinussatz und wann der Cosinussatz zu verwenden ist, hängt von der jeweiligen Aufgabenstellung ab. In Kürze kann man sagen: "Ist mehr als ein Winkel beteiligt, dann kommt der Sinussatz zur Anwendung, ansonsten der Cosinussatz."

Zwei Beispiele zur Verdeutlichung:

- i. Von einem Dreieck sind die drei Seiten $a = 4$, $b = 7$ und $c = 9$ gegeben und man möchte den grössten Winkel bestimmen.

In jedem Dreieck liegt der grösste Winkel gegenüber von der grössten Seite. (Das steckt übrigens so als Aussage auch im Sinussatz drin.) D.h. in dieser Aufgabenstellung, dass wir den Winkel γ (gegenüber von c) bestimmen möchten. Es geht nur um einen einzigen Winkel, also verwenden wir den Cosinussatz:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \cos \gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \\ \Leftrightarrow \quad \gamma &= \arccos \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \right) = \arccos \left(\frac{9^2 - 4^2 - 7^2}{-2 \cdot 4 \cdot 7} \right) \approx 106.6^\circ \end{aligned}$$

Wir bemerken schon jetzt, dass es wichtig ist, dass wir die Cosinusfunktion resp. die Arcuscosinusfunktion auch für Winkel $> 90^\circ$ zur Verfügung zu haben!

Dies ist das Musterbeispiel, wie alleine aus den Seiten eines Dreiecks auf dessen Winkel geschlossen werden kann. Das funktioniert nur mit dem Cosinussatz.

- ii. Von einem Dreieck kennen wir die beiden Winkel $\alpha = 43^\circ$ und $\beta = 76^\circ$. Wie gross ist die Seite b , wenn $a = 12$ ist?

Nun haben wir zwei Winkel und eine Seite gegeben. Das bedeutet, der Sinussatz kommt zur Anwendung:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{12 \cdot \sin 76^\circ}{\sin 43^\circ} \approx 17.1$$

N.B.: Wenn zwei Winkel des Dreiecks bekannt sind, dann natürlich aufgrund der Winkelsumme von 180° auch der dritte. D.h., es hätte auch problemlos nach der Seite c gefragt werden können, denn aus $\alpha = 43^\circ$ und $\beta = 76^\circ$ folgt $\gamma = 180^\circ - 43^\circ - 76^\circ = 61^\circ$.

- Der Cosinussatz sieht aus wie eine Modifikation zum Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ($c^2 = a^2 + b^2$). Tatsächlich kann man das genau so auffassen: Der Cosinussatz ist also die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras auf beliebige Dreiecke! Ist $\gamma = 90^\circ$, so ist nämlich $\cos \gamma = 0$ und der Satz reduziert sich auf $c^2 = a^2 + b^2$.

3.2 Der Beweis des Sinussatzes

Hier der Beweis des Sinussatzes Schritt für Schritt. Die Ausführungen beziehen sich auf Abb. 13.

- i. Gegeben sei ein allgemeines Dreieck ABC . In diesem Dreieck wollen wir den Sinussatz

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

beweisen.

- ii. Das Dreieck ABC lässt sich durch das Eintragen der Höhe h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke ACD und BCD aufteilen.
 iii. In diesen beiden rechtwinkligen Dreiecken können wir – der wohlbekannten Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck folgend – je einen Ausdruck für die Höhe h_c notieren:

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin \alpha \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = a \cdot \sin \beta$$

- iv. Setzen wir die beiden Ausdrücke für h_c einander gleich, so erhalten wir bereits den ersten Teil des Sinussatzes:

$$h_c = b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

- v. Wir können argumentieren, dass wir durch die Eintragung einer anderen Höhe im Prinzip auf dieselbe Beziehung zwischen zwei neuen Winkeln und Seiten stossen können und so durch Betrachtung der Höhe h_a z.B.

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

finden könnten. Das stimmt ganz bestimmt in einem Dreieck mit lauter spitzen Winkeln, denn die Überlegungen in ii. bis iv. wären mit einer anderen Höhe als h_c effektiv genau die gleichen. Im allgemeinen Dreieck mit lauter spitzen Winkeln sind wir also bereits fertig, denn wenn $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$ und $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$, dann stimmt auch

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} .$$

Wie aber sieht es in einem Dreieck mit einem stumpfen Winkel aus, wie es das Dreieck ABC in Abb. 13 ist?

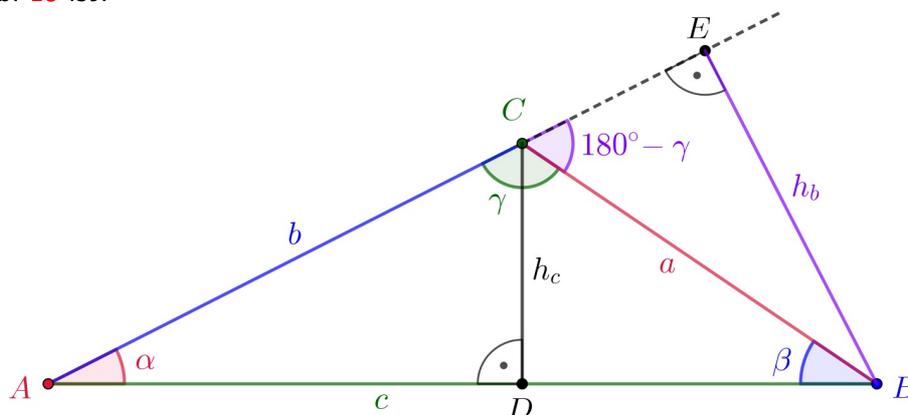


Abbildung 13: Skizze zum Sinussatz – ein allgemeines Dreieck mit einem stumpfen Winkel.

- vi. Da das Dreieck ABC mit γ einen stumpfen Winkel aufweist, liegen die beiden Höhen h_a und h_b ausserhalb des Dreiecks. In Abb. 13 können wir die Höhe h_b eintragen, indem wir die Seite b über die Ecke C hinaus verlängern und danach von der Ecke B aus das Lot auf diese Verlängerung fällen.
- vii. Nun gibt es wiederum zwei rechtwinklige Dreiecke, ABE und BCE , in denen wir die Höhe h_b mittels Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck ausdrücken können:

$$\sin \alpha = \frac{h_b}{c} \Leftrightarrow h_b = c \cdot \sin \alpha \quad \text{und} \quad \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{h_b}{a} \Leftrightarrow h_b = a \cdot \sin(180^\circ - \gamma)$$

Dabei haben wir benutzt, dass der spitze Winkel bei C im Dreieck BCE gerade $180^\circ - \gamma$ betragen muss.

- viii. Somit finden wir durch Gleichsetzen der Ausdrücke für h_b :

$$c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin(180^\circ - \gamma) \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin(180^\circ - \gamma)}{c}$$

Das sieht schon sehr "sinussatzig" aus, aber $\sin(180^\circ - \gamma)$ scheint die Sache zu stören.

- ix. Nun haben wir aber in Kapitel 2 gelernt, dass $\sin(180^\circ - \gamma)$ durch Ausnützen der Achsensymmetrie an $\alpha = 90^\circ$ auch anders notiert werden kann. Abb. 14 illustriert nochmals, dass effektiv gilt:

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$$

Damit sind wir aber fertig, denn nun ist

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin(180^\circ - \gamma)}{c} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

und wir haben somit gezeigt, dass auch im Dreieck mit einem stumpfen Winkel gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad \text{q.e.d.}$$

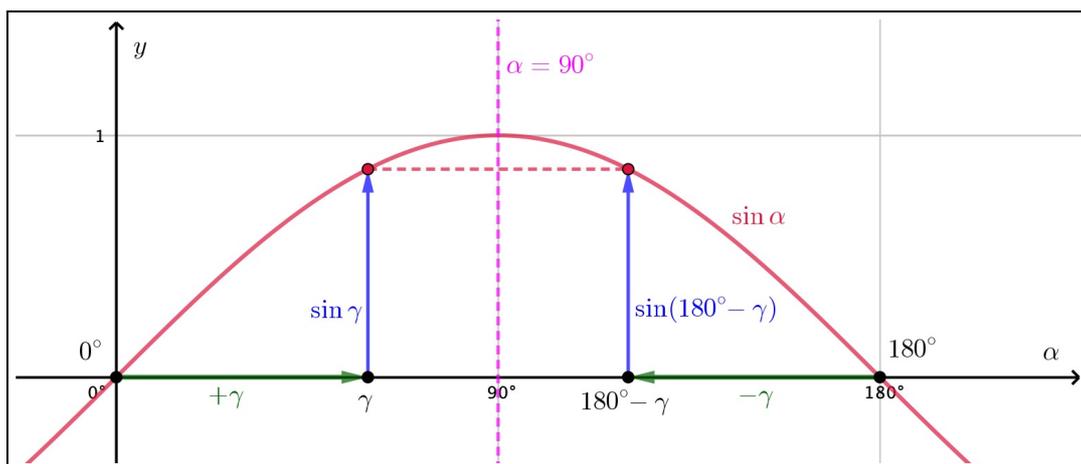


Abbildung 14: Achsensymmetrie der Sinusfunktion bezüglich $\alpha = 90^\circ$.

3.3 Der Beweis des Cosinussatzes

- i. Gegeben sei ein allgemeines Dreieck ABC . Darin wollen wir beweisen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- ii. Wir betrachten zunächst den Fall bei spitzem Winkel γ und werden uns hinterher separat den stumpfen Fall anschauen. Wie Abb. 15 zeigt, tragen wir zunächst die Höhe h_b ins Dreieck ABC ein. Weil γ spitz ist, liegt diese Höhe innerhalb des Dreiecks. So entsteht der Höhenfusspunkt D , der die Seite b in die Teilstrecken d und e unterteilt. Somit gilt auch: $b = d + e$.

Achtung! Die Seite b geht immer noch von A bis C . Die pink eingetragene Strecke d ist ein Teil der Seite b , nämlich der Abschnitt vom Fusspunkt D zur Ecke C .

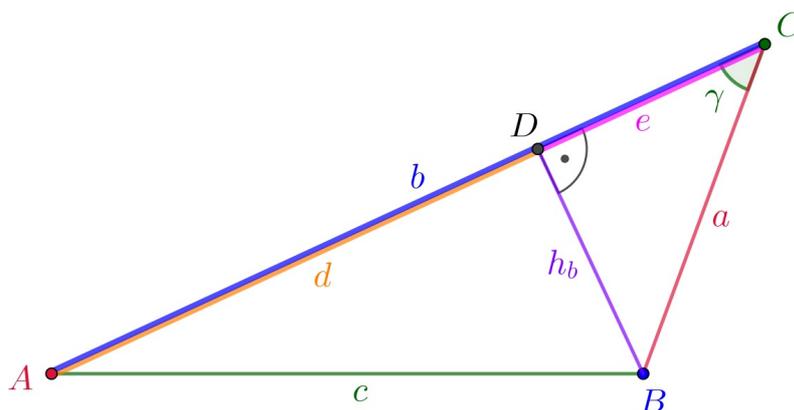


Abbildung 15: Skizze zum Cosinussatz – ein allgemeines Dreieck mit spitzem Eckwinkel γ .

- iii. Dank dieser Höhe sind zwei rechtwinklige Dreiecke ABD und BCD entstanden. Wir wollen im Dreieck ABD den Satz des Pythagoras notieren:

$$c^2 = h_b^2 + d^2$$

- iv. Auf der rechten Seite der Gleichung ist die Strecke d die Differenz zwischen der gesamten Dreiecksseite b und dem Abschnitt e :

$$d = b - e \quad \Rightarrow \quad c^2 = h_b^2 + d^2 = h_b^2 + (b - e)^2$$

- v. Mit der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck BCD können wir dort die beiden Katheten e und h_b durch die Hypotenuse a und den Winkel γ ausdrücken:

$$\sin \gamma = \frac{h_b}{a} \quad \Rightarrow \quad h_b = a \cdot \sin \gamma \quad \text{und} \quad \cos \gamma = \frac{e}{a} \quad \Rightarrow \quad e = a \cdot \cos \gamma$$

- vi. Diese Ausdrücke setzen wir in die rechte Seite der vorigen Gleichung ein:

$$c^2 = h_b^2 + (b - e)^2 = (a \sin \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2$$

- vii. Nun formen wir die rechte Seite weiter um, wobei wir den trigonometrischen Satz des Pythagoras verwenden ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$):

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \sin \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2 = a^2 \sin^2 \gamma + b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma \\ &= a^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

- viii. Damit sind wir im Dreieck mit spitzem Eckwinkel γ aber bereits fertig, denn nach dieser Umformung lautet die ganze Gleichung:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{q.e.d.}$$

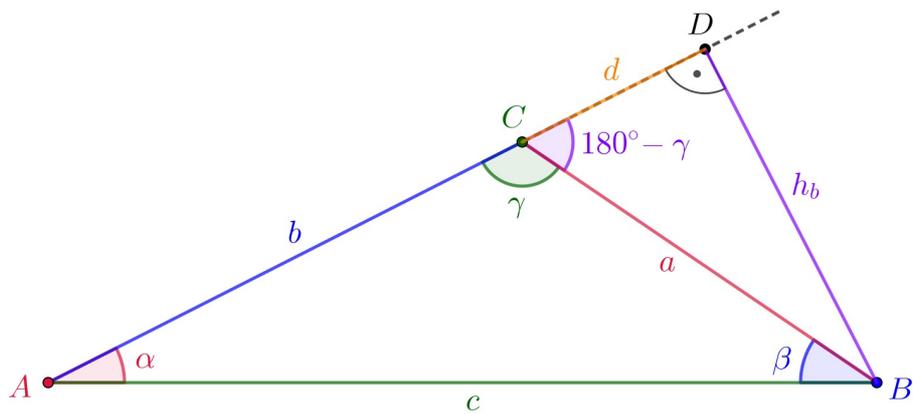


Abbildung 16: Skizze zum Cosinussatz – ein allgemeines Dreieck mit stumpfem Eckwinkel γ .

Nach dem spitzen Eckwinkel wollen wir den Cosinussatz auch für stumpfe Eckwinkel beweisen. Wir gehen sehr vergleichbar vor wie vorhin und wie beim Beweis zum stumpfen Winkel beim Sinussatz:

- i. In 16 sehen wir, dass die Seite b über den Eckpunkt C hinaus erweitert wird, sodass die Höhe h_b ausserhalb des Dreiecks eingezeichnet werden kann. So entsteht das rechtwinklige Dreieck ABD , in dem wir den Satz des Pythagoras formulieren können:

$$c^2 = (b + d)^2 + h_b^2$$

- ii. Im kleinen rechtwinkligen Dreieck lassen sich die Katheten d und h_b durch die Seite a und den Winkel $180^\circ - \gamma$ ausdrücken:

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a \cdot \sin(180^\circ - \gamma)$$

$$\text{und} \quad \cos(180^\circ - \gamma) = \frac{d}{a} \Rightarrow d = a \cdot \cos(180^\circ - \gamma)$$

- iii. Diese Ausdrücke für d und h_b setzen wir in die rechte Gleichungsseite von vorhin ein und formen diese dann weiter um:

$$\begin{aligned} c^2 &= (b + d)^2 + h_b^2 = (b + a \cos(180^\circ - \gamma))^2 + (a \sin(180^\circ - \gamma))^2 \\ &= b^2 + 2ab \cos(180^\circ - \gamma) + a^2 \cos^2(180^\circ - \gamma) + a^2 \sin^2(180^\circ - \gamma) \\ &= a^2 \underbrace{(\sin^2(180^\circ - \gamma) + \cos^2(180^\circ - \gamma))}_{=1} + b^2 + 2ab \cos(180^\circ - \gamma) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(180^\circ - \gamma) \end{aligned}$$

- iv. Das sieht schon fast nach dem gewünschten Resultat aus. Allerdings steht vor dem letzten Term rechts noch ein Minuszeichen und im Argument der Cosinusfunktion steht noch $180^\circ - \gamma$ anstelle von γ . Beide Mängel werden nun aber auf einmal beseitigt, denn für die Cosinusfunktion gilt nach der Definition am Einheitskreis die folgende Identität:

$$\cos(180^\circ - \gamma) \equiv -\cos \gamma$$

Die Richtigkeit dieser Identität wird in Abb. xx grafisch untermauert.

- v. Nun sind wir tatsächlich fertig, denn mit dieser Identität können wir schreiben:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(180^\circ - \gamma) = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{q.e.d.}$$

Der Cosinussatz gilt also auch für stumpfe Eckwinkel.

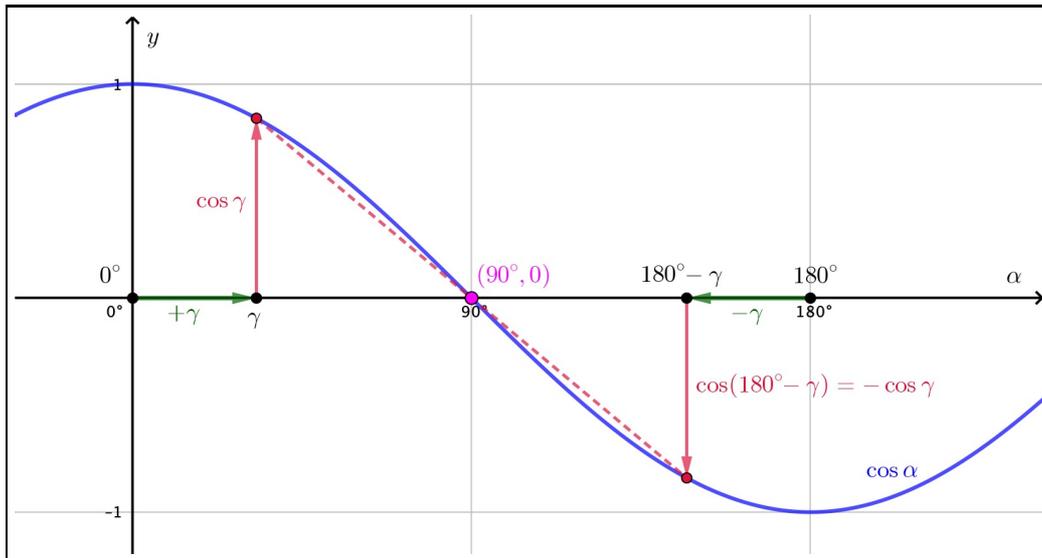


Abbildung 17: Punktsymmetrie der Cosinusfunktion bezüglich $(90^\circ, 0)$.

3.4 Eine letzte Anmerkung zum Sinussatz

Benutzen wir den Cosinussatz zur Berechnung eines Winkels in einem Dreieck, in dem wir alle Seiten kennen, so erhalten wir ein eindeutiges Resultat, denn tatsächlich legen die drei Dreiecksseiten zusammen alle drei Winkel ganz eindeutig fest.

Beim Sinussatz gibt es hingegen Situationen, in denen das anders ist. Betrachten wir Abb. 18. Gesucht wird der Winkel γ bei Vorgabe des Winkels α und der beiden Seitenlängen a und b . Ist $a < b$, so sind zwei Eckpunkte B_1 und B_2 und damit natürlich auch zwei Winkel γ_1 und γ_2 möglich.

Beispiel: Für $\alpha = 30^\circ$, $a = 3.6$ und $b = 6$ ergibt sich aus dem Sinussatz:

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{6 \cdot \sin 30^\circ}{3.6} = \frac{6 \cdot \frac{1}{2}}{3.6} = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$$

Nun hat die Sinusfunktion aber für $0^\circ < \beta < 180^\circ$ zwei Lösungen mit $\sin \beta = \frac{5}{6}$, nämlich bei $\beta_1 \approx 56.4^\circ$ und bei $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 123.56^\circ$.

Natürlich gibt es auch für $a > b$ zwei Winkelwerte mit dem durch den Sinussatz festgelegten Sinuswert. Allerdings wird dann der stumpfe Winkel β_2 grösser als $180^\circ - \alpha$ herauskommen, sodass $\alpha + \beta_2 > 180^\circ$ wäre, was natürlich nicht geht.

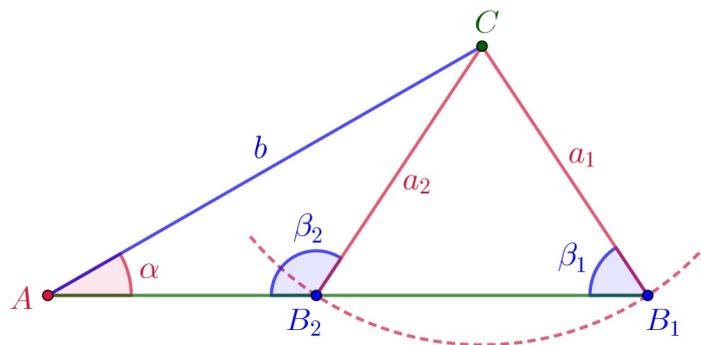


Abbildung 18: Uneindeutigkeit bei der Winkelbestimmung mit dem Sinussatz

4 Winkelangaben im Bogenmass

In der Primar- und Sekundarschule haben wir alle gelernt Winkel in **Grad** ($^\circ$) anzugeben. Ich nehme an, diese Art der Winkelangabe ist dir so vertraut, dass du dir nichts mehr zu überlegen brauchst, wenn du z.B. hörst, dass ein Winkel 30° , 45° , 90° oder 180° beträgt. Sofort hast du eine sehr gute Vorstellung des Winkels resp. des Ausmasses einer Drehung vor Augen.

Und trotz all dieser Vertrautheit soll nun ein neues **Winkelmass**, also eine neue Art die Grösse eines Winkels anzugeben, eingeführt werden! Dafür muss es wohl gute Gründe geben, denn weshalb sonst sollte man etwas so Bekanntes und Greifbares wie das **Gradmass** zur Seite legen und durch etwas Neues ersetzen?! Zumindest einen solchen Grund werden wir am Ende dieses Kapitels in Abschnitt 4.5 kennenlernen (Sinus und Tangens bei kleinen Winkeln), weitere folgen nach.

Vorerst gilt es einfach zur Kenntnis zu nehmen, dass wir Winkel künftig nicht mehr im Grad-, sondern im sogenannten **Bogenmass** angeben. In der Physik der Schwingungen und Wellen wird ausschliesslich dieses neue Winkelmass verwendet und auch ein Programm wie GeoGebra, sowie alle Programmiersprachen arbeiten standardmässig damit. Bei praktisch jedem Taschenrechner kann ich den Winkelangabemodus auf das Grad- oder das Bogenmass einstellen.

An dieser Stelle möchte ich es nicht verpassen, bereits das Allerwichtigste, was es sich in Sachen Bogenmass zu merken gilt, gross und in aller Deutlichkeit zu notieren:

Umrechnung zwischen Bogenmass und Gradmass

$$\pi \hat{=} 180^\circ$$

“ π im Bogenmass entspricht ($\hat{=}$) im Gradmass 180° .”

Egal, ob man die Festlegung des Bogenmasses am Einheitskreis präsent hat oder nicht, diese simple Umrechnungsvorschrift zwischen Grad- und Bogenmass wird stets gute Dienste leisten → **Merken!**

4.1 Das Bogenmass – eine Bogenlänge auf dem Einheitskreis

In Abschnitt 2.2 hatten wir gesehen, wie ein Winkel α im x - y -Koordinatensystem von der x -Achse aus abgetragen wird. Der zugehörige Richtungsstrahl s_α legte dann bei der Neudefinition von Sinus- und Cosinusfunktion den Punkt P auf dem Einheitskreis fest (vgl. Abschnitt 2.3).

Wie Abb. 19 zeigt, gehört zu jedem Winkel α eine eindeutig festgelegte **Bogenlänge** x_{bog} , die auf dem Einheitskreis vom Punkt $(1,0)$ zu diesem Punkt P führt. Zur Beschreibung der Öffnung des Winkels α in Grad können wir nun ebenso gut die Bogenlänge x_{bog} angeben. In der Tat ergibt es genau so Sinn vom Winkel x_{bog} anstelle vom Winkel α zu sprechen!

Die Grösse von Winkeln können wir also wie bisher in Winkelgraden, aber neuerdings auch als Bogenlängen (auf dem Einheitskreis!) angeben. Im ersten Fall sprechen wir vom **Gradmass**, im zweiten vom **Bogenmass**.

Bemerkung 1: x_{bog} ist eine dimensionslose reelle Zahl, die die Länge einer gebogenen Strecke in einem x - y -Koordinatensystem beschreiben soll. Dimensionslos bedeutet, x_{bog} hat keine physikalische Einheit, denn das x - y -Koordinatensystem ist ein rein mathematisches! Weder die x - noch die y -Achse haben eine physikalische Einheit. Es sind dimensionslose reelle Zahlenachsen. Ihre mathematische Einheit – wenn man so will – ist die Zahl 1, denn -3 ist gleich $3 \cdot 1$, genauso wie z.B. mit 7 s eben $7 \cdot 1\text{ s}$ gemeint ist.

Allerdings wurde für die Bogenlänge resp. das Bogenmass zur Kennzeichnung resp. Verdeutlichung, dass es sich jeweils um eine Winkelangabe handelt, eine Art Hilfseinheit geschaffen. Sie wird **Radian** genannt – kurz: rad. Ich werde in Kürze nochmals darauf zurückkommen. Wir werden das rad allerdings nur dann notieren, wenn es der Verdeutlichung dienlich ist. In den meisten Fällen verzichten wir aber darauf die Einheit rad extra aufzuschreiben.

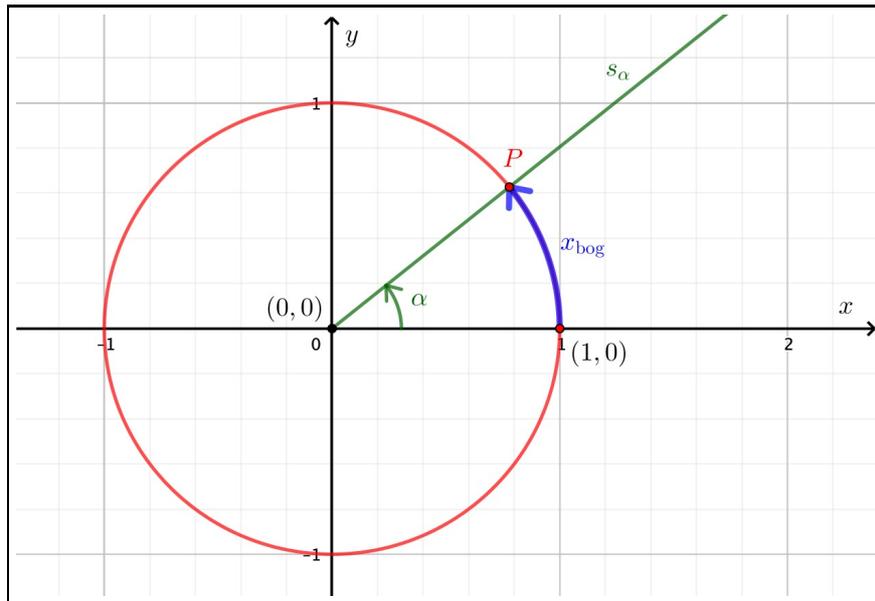


Abbildung 19: Zum Verständnis des Bogenmasses: Zu jedem Winkel α gehört eine Bogenlänge x_{bog} auf dem Einheitskreis. Diese Bogenlänge ist für die Größenangabe des Winkel genauso gut geeignet wie eine Angabe in Winkelgraden.

Bemerkung 2: In Kürze – nämlich bereits ab Abschnitt 4.3 auf der nächsten Seite – werden wir statt x_{bog} nur noch x schreiben, weil das für Winkel im Bogenmass so üblich ist. So wird z.B. $\sin \alpha$ neu zu $\sin x$.

Solange wir aber noch bei der Betrachtung der Bogenlänge in einem x - y -Koordinatensystem sind, sollten wir klar zwischen x -Koordinaten und x_{bog} unterscheiden. In Abb. 19 ist x_{bog} ganz klar eine Bogenlänge auf dem Einheitskreis und eben kein Koordinatenwert auf der x -Achse!

4.2 Die Umrechnung zwischen Grad- und Bogenmass

Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Radius $r = 1$. Folglich beträgt sein Umfang:

$$U = 2\pi \cdot r = 2\pi$$

Diesen Umfang des Einheitskreises verstehen wir neuerdings als Bogenlänge zu einer 360° -Drehung. Zu $x_{\text{bog}} = 2\pi$ rad im Bogenmass gehört also $\alpha = 360^\circ$ im Gradmass. Wenn wir noch den Faktor 2 aus dieser Beziehung herauskürzen, sind wir bei der in der Einleitung zum Kapitel bereits herausgestrichenen Entsprechung:

$$\pi \hat{=} 180^\circ \quad \text{“Ein Winkel von } \pi \text{ (rad) im Bogenmass beträgt im Gradmass } 180^\circ \text{.”}$$

Meines Erachtens ist diese Zeile die einfachste Art sich die Umrechnung zwischen Bogen- und Gradmass zu merken. Damit sind kompliziert anmutende Umrechnungsgleichungen eigentlich überflüssig. Der Vollständigkeit halber seien sie hier aber dennoch angeführt:

$$x_{\text{bog}} = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \quad \text{und} \quad \alpha = x_{\text{bog}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Dabei ist mit x_{bog} die Winkelangabe im Bogenmass und mit α diejenige im Gradmass gemeint.

Es versteht sich von selber, dass wir die wichtigsten resp. die am häufigsten vorkommenden Winkel auch im Bogenmass im Kopf haben. Dazu eine Tabelle, die wir stets präsent haben sollten:

α (in Grad)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
x_{bog} (in Radiant)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Nochmals zu Radiant rad: Wie schon in der Bemerkung 1 im Abschnitt 4.1 festgehalten, ist Radiant nur eine Hilfseinheit zur Kennzeichnung einer Winkelangabe im Bogenmass. Damit würden die Angaben in obiger Tabelle $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad, $\frac{\pi}{3}$ rad, etc. lauten.

Aber eben: Wir werden auf diese Hilfseinheit rad in aller Regel verzichten. Sie macht die Rechnungen eher unübersichtlich und wir wissen jeweils auch ohne diese "Unterstützung", dass es sich um einen im Bogenmass angegebenen Winkel handelt. Die Grössenangabe eines Winkels im Bogenmass ist einfach eine einheitslose Zahl – genau das wollen wir!

Achtung – exakte Werte! Wo immer es geht, werden wir Winkel im Bogenmass nicht als Dezimalzahlen, sondern als exakte Werte, typischerweise unter Verwendung der Kreiszahl π angeben. Beispiele dafür sehen wir in der Tabelle oben.

4.3 Winkelfunktionen und Bogenmass

Selbstverständlich können nun alle Gleichungen und Graphen zu Winkelfunktionen ins Bogenmass "übersetzt" werden. Das soll hier in hinreichender Fülle, aber dennoch möglichst knapp passieren.

Ab diesem Moment schreiben wir für x_{bog} nur noch x . Die ständige Erinnerung daran, dass es sich dabei eigentlich um eine Bogenlänge auf dem Einheitskreis handelt, ist nicht mehr nötig. Bei Bedarf werden wir das schon wieder aus unserem Wissensspeicher hervorkramen.

Spezielle Werte:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	–

Periodizitäten: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $\tan(x + \pi) = \tan x$
 $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Hauptsymmetrien: $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan x$
 $\cos(-x) = \cos x$

Ersetzung: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Trigo. Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Zu den Periodizitäten: Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind **2π -periodisch**, die Tangensfunktion ist **π -periodisch**.

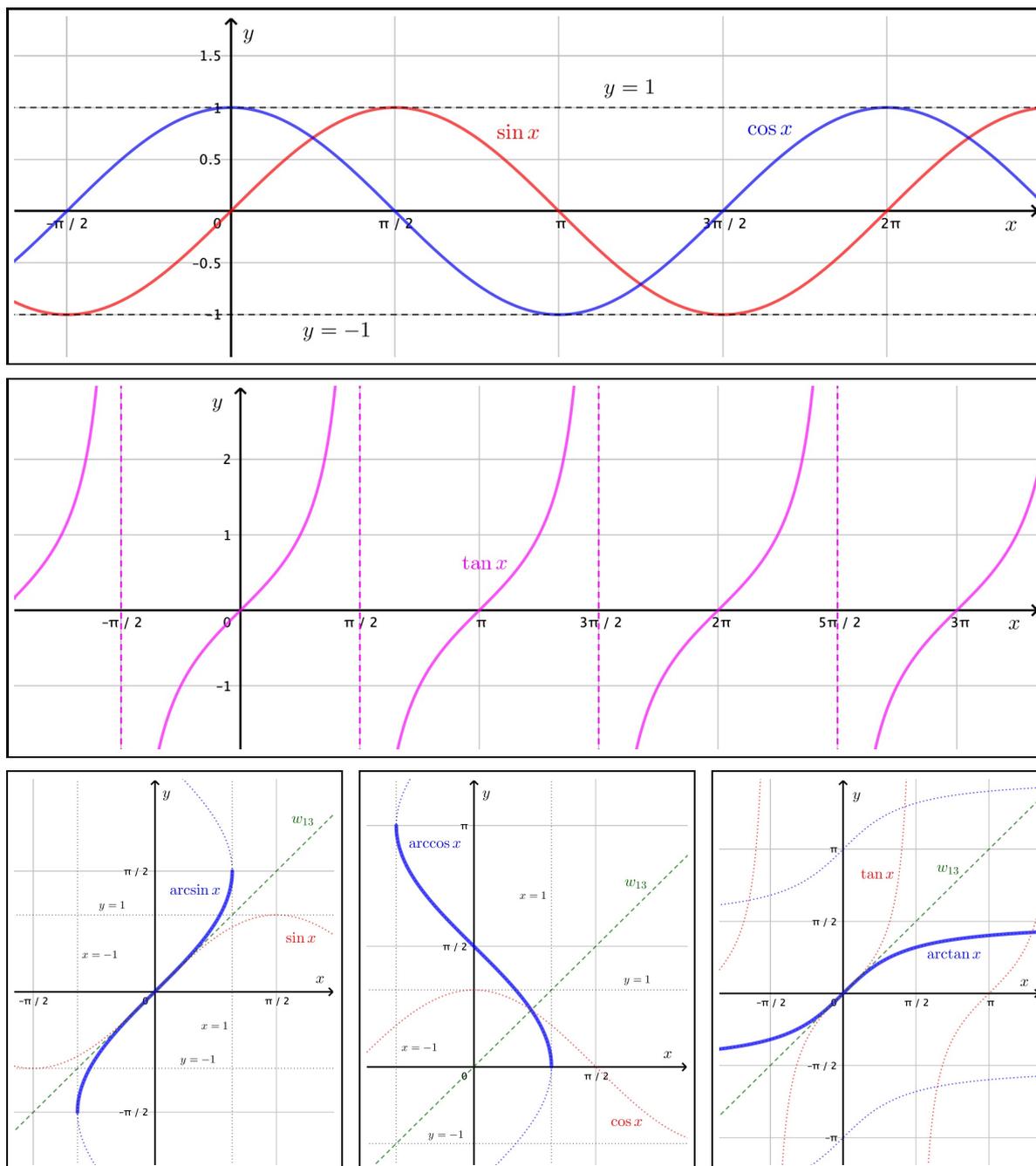


Abbildung 20: Die Graphen der Winkelfunktionen und der Arcusfunktionen mit dem Bogenmass.

Zu den Graphen in Abb. 20: Die horizontale Winkelachse im Bogenmass bildet nun die vertraute x -Achse – eine reelle Zahlenachse. Da jetzt wieder beide Achsen reelle Zahlenachsen sind, können wir sie auch gleich skalieren und machen dabei eine Beobachtung: Die Graphen aller Winkelfunktionen durchqueren die x -Achse stets mit Steigung 1 oder -1 (im 45° -Winkel ansteigend oder abfallend). Das ist eine gute Merkhilfe für das rasche Skizzieren dieser Kurven.

Der Name “Arcusfunktion”: Wir verstehen nun die Namen der Arcusfunktionen. Lat. *arcus* steht für Bogen! Somit fragt z.B. $\arcsin \frac{1}{2}$ nach der Bogenlänge auf dem Einheitskreis, zu der ein Sinuswert von $\frac{1}{2}$ gehört. Kurz: $\arcsin \frac{1}{2} =$ “Bogen, dessen Sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist”.

4.4 Grad- und Bogenmass im Taschenrechner

Bei Taschenrechnern lässt sich in aller Regel ein **Winkelmodus** einstellen. D.h., man kann wählen, ob Eingaben im Grad- oder im Bogenmass interpretiert werden sollen und wie Ausgaben erfolgen sollen. Typischerweise heissen diese Modi DEG für das Gradmass und RAD für das Bogenmass.⁹

Geben wir beispielsweise $\sin(30)$ ein, so erhalten wir verschiedene Resultate:

$$\text{Im DEG-Modus: } \sin(30) = 0.5 \quad \text{und im RAD-Modus: } \sin(30) = -0.988$$

Im DEG-Modus wird die Zahl 30 als 30° verstanden, während sie im RAD-Modus als Bogenlänge 30 auf dem Einheitskreis interpretiert wird. (Im Gradmass würde das etwa 1719° entsprechen.)

Praktische Hinweise: Im *TI-30X Pro MathPrint* wird der aktuelle Winkelmodus stets rechts oben im Display angezeigt und wechseln kann man ihn in der obersten Option des Modus-Menüs, das nach Drücken der Taste MODE erscheint. Insbesondere vor Prüfungen mit TR-Verwendung sollte man sich überlegen, welcher Modus eingestellt sein muss und diese Einstellung bewusst vornehmen. So vermeidet man ganz blöde Fehler aufgrund einer falschen Moduseinstellung.

4.5 Sinus und Tangens bei kleinen Winkeln

Betrachtung im Gradmass am rechtwinkligen Dreieck

Bereits aus der Definition von Sinus- und Tangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck geht hervor, dass diese beiden Winkelfunktionen für kleiner werdende Winkel $\alpha \searrow 0^\circ$ in ihren Werten immer identischer werden. Weshalb das so ist, illustriert Abb. 21. Wird die Gegenkathete g aufgrund des schrumpfenden Winkels α bei fixer Hypotenuse h immer kleiner, so gleicht sich die Ankathete a immer mehr der Hypotenuse h an. Somit rückt $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ immer näher an $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.

Für kleine Winkel $\alpha \approx 0^\circ$ ist somit $\sin \alpha \approx \tan \alpha$. Dabei bleibt der Tangenswert immer noch ein ganz klein wenig grösser als der Sinuswert, denn die Ankathete wird ja niemals ganz gleich lang wie die Hypotenuse. Das passiert erst, wenn $\alpha = 0^\circ$ wird.

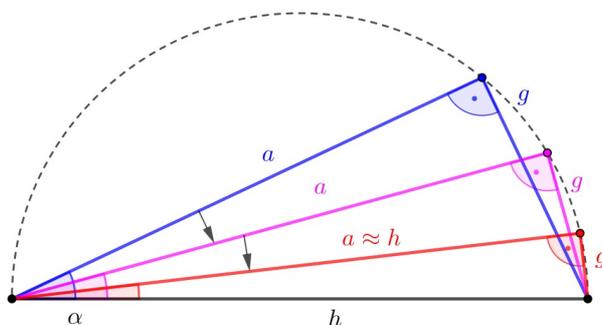


Abbildung 21: Sinus und Tangens bei kleinen Winkeln im rechtwinkligen Dreieck: Für immer kleinere Winkel α strebt die Länge der Ankathete immer mehr gegen die Länge der Hypotenuse, weshalb Sinus und Tangens für sehr kleine Winkel α praktisch identisch sind.

Die neue Betrachtung am Einheitskreis mit dem Bogenmass

Natürlich gilt für kleine Winkel x auch im Bogenmass die Beziehung $\sin x \approx \tan x$. Die Definitionen der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis stimmen ja überein.

⁹DEG für engl. *degree* = Grad. Meistens gibt es noch einen dritten Winkelangabemodus, der irritierenderweise unter dem Namen GRAD angezeigt wird. Dieses Winkelmass und somit diesen Modus werden wir allerdings nie verwenden.

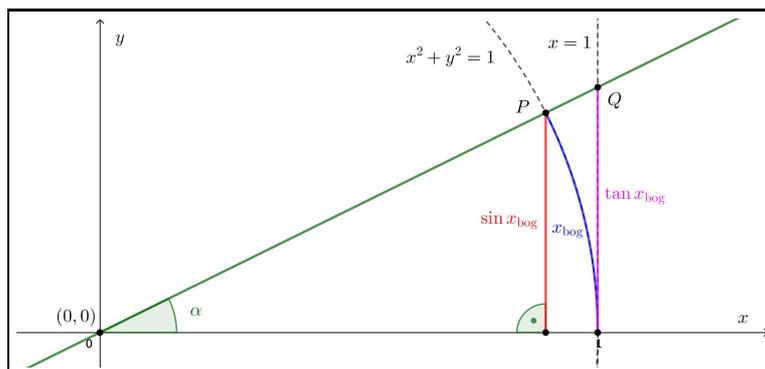


Abbildung 22: Sinus und Tangens bei kleinen Winkeln am Einheitskreis.

Mit dem Bogenmass kommt nun allerdings eine wertvolle Eigenschaft hinzu! Betrachten wir dazu Abb. 22. Wir sehen einen bereits relativ kleinen Winkel α resp. x_{bog} und können uns gut vorstellen, wie x_{bog} , $\sin x_{\text{bog}}$ und $\tan x_{\text{bog}}$ gemeinsam kleiner werden, wenn wir den Winkel noch spitzer werden lassen.¹⁰ Bei sehr spitzen Winkeln sind die drei Größen kaum mehr voneinander zu unterscheiden und es muss folglich gelten (jetzt wieder ohne bog notiert):

$$\sin x \approx x \approx \tan x \quad \text{für } x \text{ in der Nähe von } 0$$

Beim Übergang zu sehr kleinen Winkel ($x_{\text{bog}} \rightarrow 0$) dürfen wir die Werte von $\sin x$ und $\tan x$ durch die Variable x selber ersetzen. Das ist sehr praktisch! Diese Approximation (= Näherung) der Sinus- und der Tangensfunktion für $x \rightarrow 0$ wird uns zahlreiche Überlegungen vereinfachen. Sie funktioniert nur mit dem Winkel als Zahl – sprich: mit dem Bogenmass! – und ist dermassen gut resp. wünschenswert, dass in der höheren Mathematik fast ausschliesslich mit dem Bogenmass gearbeitet wird.

Eine Folge dieser Näherung sehen wir in Abb. 23, wo die Sinus- und die Tangenskurve in der Nähe des Ursprungs zu sehen sind. Weiter habe ich die Funktion $f(x) = x$, also eine Gerade mit Steigung 1 durch den Ursprung resp. die Winkelhalbierende w_{13} des 1. und 3. Quadranten, eingetragen. Offensichtlich verlaufen die drei Funktionsgraphen miteinander durch den Ursprung. In Ursprungsnähe sind also $\sin x$ und $\tan x$ ohne grossen Fehler gleich x und wir verstehen damit, weshalb die Graphen aller Winkelfunktionen mit Steigung 1 oder -1 durch die x -Achse gehen.

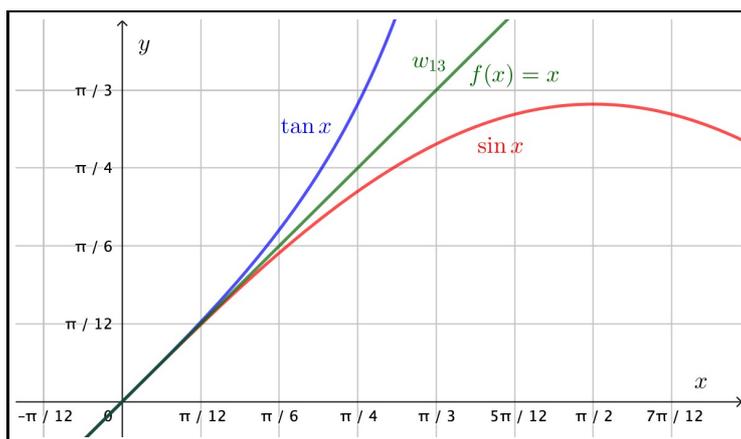


Abbildung 23: $\sin x$, $\tan x$ und $f(x) = x$ in der Nähe des Ursprungs. Es gilt: $\sin x \approx x \approx \tan x$.

¹⁰Damit es sicher keine Verwechslung mit Werten auf der x -Achse gibt, wird in Abb. 22 nochmals x_{bog} zur Kennzeichnung des Bogens verwendet.

5 Modifikationen der Sinusfunktion

Bevor wir im nächsten Kapitel mit der Beschreibung physikalischer Vorgänge beginnen, wollen wir zuerst betrachten, wie sich das Aussehen einer Sinuskurve durch das Einfügen zusätzlicher **Parameter** in die Funktionsgleichung verändern lässt. Dabei lernen wir zunächst nur wenig Neues kennen, denn wir hatten früher ja bereits gesehen, wie ein Funktionsgraph durch vier Parameter horizontal und vertikal gestreckt und verschoben werden kann. Mit der **Amplitude**, der **Periode** und der **Phase** kommen aber doch drei wichtige neue Begriffe ins Spiel.

Zur Beschreibung von Schwingungs- und Wellenphänomenen kann sowohl die Sinus-, wie auch die Cosinusfunktion verwendet werden. Wir benutzen aber fast ausschliesslich die Sinusfunktion, denn die Cosinuskurve lässt sich ja als eine um $\frac{\pi}{2}$ verschobene Sinuskurve auffassen: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

5.1 Rep.: Vier Funktionsparameter und ihre grafischen Auswirkungen

Mit vier Parametern $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ können wir den Graphen einer Funktion $f(x)$ gezielt strecken und verschieben, wenn wir sie folgendermassen in die Funktionsgleichung einbauen:

$$f(x) \longrightarrow f_{\text{neu}}(x) = A \cdot f(B(x - C)) + D$$

A = Vertikale Streckung
 B = Horizontale Streckung
 C = Horizontale Verschiebung
 D = Vertikale Verschiebung

Erläuterung zur horizontalen Verschiebung durch den Parameter C

Der ganze Ausdruck $B(x - C)$ wird in die alte Funktion $f(x)$ eingesetzt. Das Minuszeichen in $x - C$ sorgt dafür, dass der alte Funktionsgraph um C **nach rechts** verschoben wird.

Betrachten wir zur Repetition dieses besonders wichtigen Punktes die ausschliesslich mit dem Parameter C modifizierte Funktion (vgl. Abb. 24):

$$f_{\text{neu}}(x) = f(x - C)$$

Anstatt den Funktionswert $f(x)$ vertikal über der Stelle x abzutragen, nimmt $f_{\text{neu}}(x)$ die Stelle x als Ausgangswert, geht dann auf der x -Achse um C nach links (eben: $x - C$), ermittelt dort den Funktionswert der alten Funktion, also $f(x - C)$, und trägt diesen Funktionswert über der weiter rechts liegenden Stelle x ab. So wird der Funktionsgraph von $f(x)$ um C nach rechts verschoben.

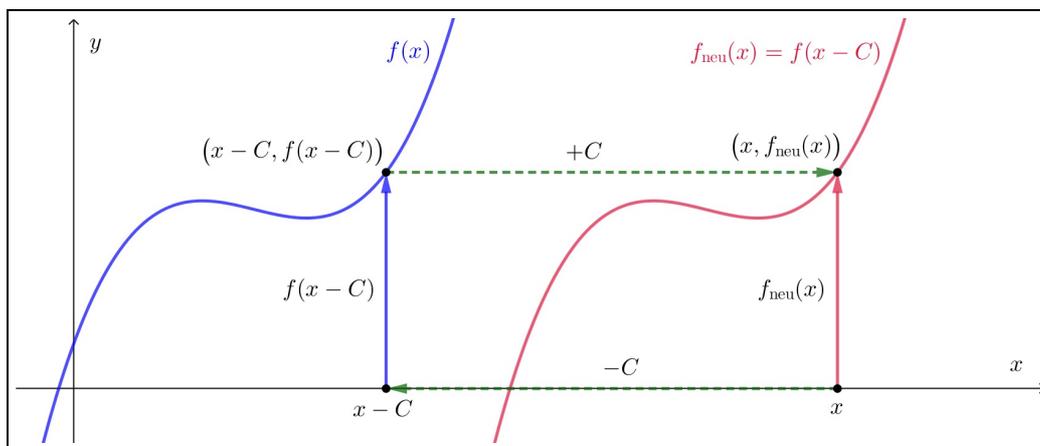


Abbildung 24: Der Graph von $f(x - C)$ ist der um C nach rechts verschobene Graph von $f(x)$.

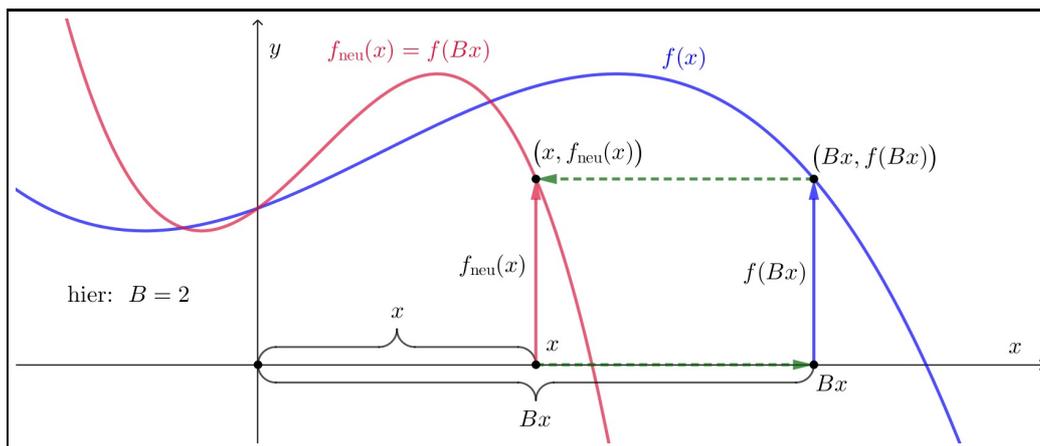


Abbildung 25: Der Graph von $f(Bx)$ ist der um den Faktor B horizontal zur y -Achse hin gestauchte Graph von $f(x)$. Im Beispiel ist $B = 2$. Der Graph von $f(x)$ wird mit Faktor 2 zur y -Achse hin gestaucht resp. mit Faktor $\frac{1}{2}$ horizontal gestreckt, sodass der Graph von $f_{\text{neu}}(x) = f(2x)$ entsteht.

Erläuterung zur horizontalen Streckung durch den Parameter B

Werfen wir auch nochmals einen genauen Blick auf die Wirkung des Parameters B . Dazu betrachten wir eine einzig mit diesem Parameter modifizierte Funktion (vgl. Abb. 25):

$$f_{\text{neu}}(x) = f(Bx)$$

Anstatt $f(x)$ direkt über x abzutragen, wird x zuerst mit dem Faktor B multipliziert. Ist $B > 1$, so führt diese Multiplikation zu einer Stelle Bx , die weiter von der y -Achse weg liegt als die Stelle x . Ein solches Beispiel sehen wir in Abb. 25. Bei Bx wird der Funktionswert der alten Funktion abgelesen, also eben $f(Bx)$. Diesen Funktionswert trägt man nun über der Stelle x ab, also für $B > 1$ näher an der y -Achse. Halten wir fest:

- Für $B > 1$ wird der Graph $f(x)$ zur y -Achse hin gestaucht.
- Ist hingegen $0 < B < 1$, so wird der Graph von der y -Achse weg gestreckt.
- Geben wir noch ein Minuszeichen zu B hinzu, so wird zusätzlich eine Spiegelung an der y -Achse vollzogen.

Vertikale Streckung (Parameter A) und vertikale Verschiebung (Parameter D)

Im Gegensatz zu horizontaler Verschiebung und Streckung sind die vertikalen Veränderungen einfacher. Wir verändern nichts am Argument der Funktion, also am Ausdruck, der in die Funktion eingesetzt wird, sondern nehmen an jeder Stelle x den alten Funktionswert $f(x)$ und modifizieren ihn durch eine Multiplikation und eine Addition mit je einem konstanten Wert. Halten wir fest:

- Der Graph der Funktion $f_{\text{neu}}(x) = A \cdot f(x)$ ist der um A vertikal gestreckte Funktionsgraph von $f(x)$. Der Parameter A streckt die Funktion von der x -Achse weg resp. staucht ihn zu dieser Achse hin, wenn $|A| < 1$.

Für negative A wird der Funktionsgraph ausserdem an der x -Achse gespiegelt.

- Schliesslich ist der Funktionsgraph von $f_{\text{neu}}(x) = f(x) + D$ der um D vertikal verschobene Graph von $f(x)$. Zu jedem Funktionswert von $f(x)$ wird einfach ein konstanter Wert D hinzu addiert. Für negative D ist das natürlich eine Verschiebung nach unten.

5.2 Anwendung der vier Parameter auf die Sinusfunktion

Mit den vier Parametern $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ wollen wir nun das Aussehen von Sinuskurven modifizieren und uns damit z.B. ermöglichen, die Mathematik der Sinuskurve auf reale, offensichtlich sinusartige Phänomene zu legen. Für unsere **verallgemeinerte Sinusfunktion** schreiben wir jetzt also:

$$f(x) = A \cdot \sin(B(x - C)) + D$$

Betrachten wir als Erstes gleich ein umfangreiches Beispiel:

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{4}{3}\left(x - \frac{5\pi}{8}\right)\right) + 4$$

Den Graphen sehen wir in Abb. 26, wo zum Vergleich auch die **unmodifizierte** oder Sinuskurve gezeigt wird. Gehen wir die Modifikationen Schritt für Schritt resp. Parameter für Parameter durch:

Vertikale Verschiebung → **Mittlere Höhe D** : Die unmodifizierte Sinuskurve "schwingt" um die x -Achse, also um $y = 0$. Mit dem Parameter D wird diese **mittlere Höhe** oder **Mittellage** einfach auf einen anderen y -Wert verlegt.

Im Beispiel ist die mittlere Höhe $D = 4$. Die modifizierte Sinuskurve schwingt also um die Horizontale $y = 4$.

Vertikale Streckung → **Amplitude A** : Die unmodifizierte Sinuskurve schlägt gegen oben und unten um maximal 1 von der mittleren Höhe (= x -Achse) aus. Dieser maximale Ausschlag wird durch A neu festgelegt. Man bezeichnet als ihn **Auslenkung** oder **Amplitude A** .

Im Beispiel beträgt die Amplitude der modifizierten Sinuskurve $A = \frac{3}{2}$.

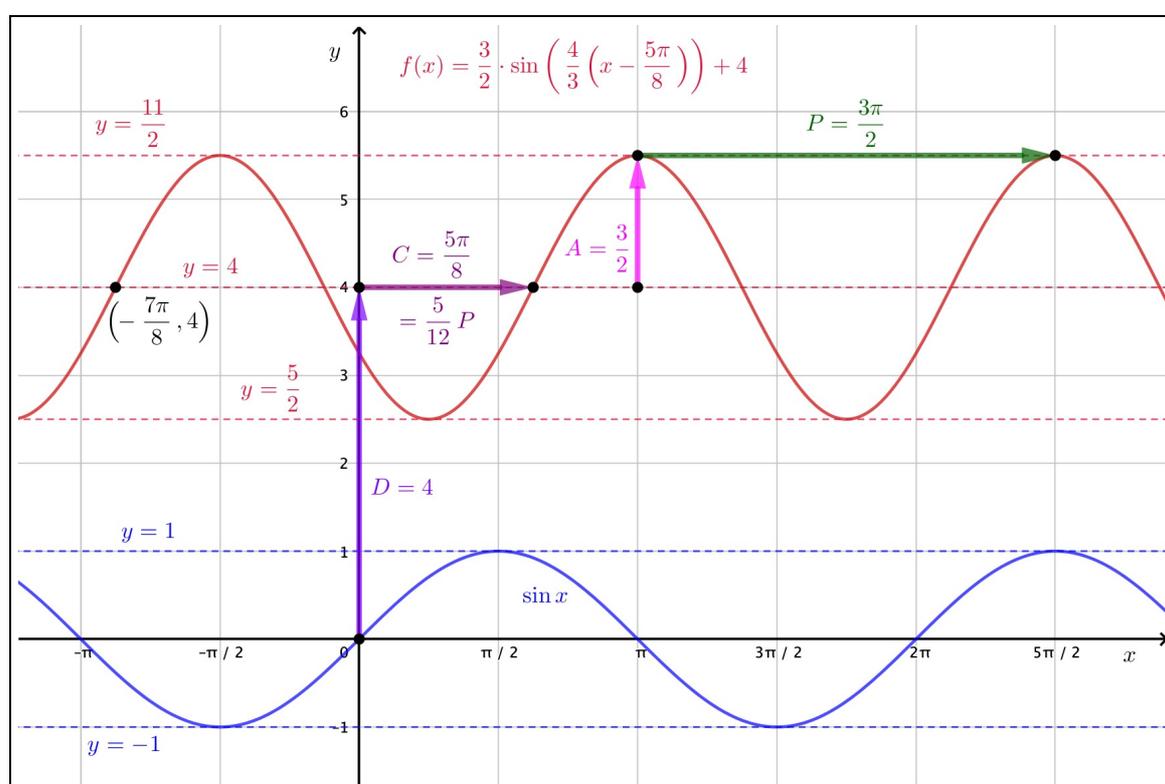


Abbildung 26: Eine modifizierten Sinusfunktion. Die Pfeile deuten die Veränderungen durch die vier Parameter $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{4}{3}$, $C = \frac{5\pi}{8}$ und $D = 4$ gegenüber der reinen Sinuskurve an.

Horizontale Streckung \rightarrow **Periode** $P = \frac{2\pi}{B}$: Bei der horizontalen Streckung wird es ein wenig schwieriger. Der Parameter B ist – im Gegensatz zu den anderen drei Parametern – nicht direkt am Graphen ablesbar. Es braucht einen Zwischenschritt, den es sich gut zu merken gilt!

In der Beispielfunktion ist $B = \frac{4}{3}$. Das ist ein Wert > 1 . Somit muss der Funktionsgraph gegenüber der unmodifizierten Sinuskurve horizontal gestaucht sein. Betrachten wir Abb. 26, so sehen wir, dass dies zutrifft. Der Graph von $f(x)$ hat eine **Periode** von $P = \frac{3\pi}{2}$, was $\frac{3}{4}$ der originalen Sinusperiode von 2π entspricht.

Damit haben wir auch den zahlenmässigen Zusammenhang aufgedeckt: Mit $B = \frac{4}{3}$ wird die modifizierte Sinusfunktion quasi $\frac{4}{3}$ -mal so schnell ausgeführt wie die unmodifizierte und die Periode ist deshalb mit dem Faktor $\frac{3}{4} = \frac{1}{B}$ verkleinert. Die Periode beträgt also statt 2π nur noch $P = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$. Für den Parameter B und die Periode P gilt offensichtlich:

$$P = \frac{2\pi}{B} \quad \text{resp.} \quad B = \frac{2\pi}{P} \quad \textbf{Merken!}$$

Die Periode P ist umgekehrt proportional zu B . Eine Vergrößerung von B führt eben zu einer horizontalen Stauchung der Sinuskurve.

Eine Vorbemerkung zur weiteren Verwendung der Periode: Im rein mathematischen Kontext bezeichnet man die Wiederholungslänge einer Sinusfunktion als **Periode**. Jede Sinuskurve weist eine Periodizität auf. Die Kurve im aktuellen Beispiel ist $\frac{3\pi}{2}$ -periodisch.

Im physikalischen Kontext werden wir in der Regel einen der folgenden beiden Fälle antreffen:

- **Horizontale Achse = Zeitachse** \rightarrow **Periode** T : Ist die horizontale Achse eine Zeitachse, so beschreibt eine Sinusfunktion typischerweise die **Schwingung** eines Objektes, z.B. eines Federpendels. In diesem Fall entspricht die Periode einer **Dauer** und trägt weiterhin den Namen **Periode**. Allerdings werden wir sie dann mit dem Buchstaben T bezeichnen.
- **Horizontale Achse = Ortsachse** \rightarrow **Wellenlänge** λ : Bei der Beschreibung von **Wellen** wird die horizontale Achse hingegen zu einer **Ortsachse**. Ein Abschnitt auf dieser Achse steht dann für eine Strecke oder Länge und so wird die Periode in diesem Fall dann eben als **Wellenlänge** bezeichnet und mit dem Symbol λ abgekürzt.¹¹

Horizontale Verschiebung C : Im Funktionsgraphen ist die Verschiebung um den Parameter C direkt sichtbar, so wie dies in Abb. 26 gezeigt wird.

Für ein- und dieselbe Funktion gibt es allerdings viele mögliche Werte von C , denn eine horizontale Verschiebung um eine Periode ergibt wieder dieselbe Sinuskurve. Im Beispiel könnte man also zu $C = \frac{5\pi}{8}$ eine oder mehrere Perioden $P = \frac{3\pi}{2}$ addieren oder subtrahieren und es ergäbe sich dieselbe Funktion. Hier zwei Alternativen für C :

$$C_1 = \frac{5\pi}{8} - \frac{3\pi}{2} = \frac{5 - 12\pi}{8} = -\frac{7\pi}{8} \quad \text{oder} \quad C_2 = \frac{5\pi}{8} + 2 \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{5 + 24\pi}{8} = \frac{29\pi}{8}$$

Ich zeige mit C_2 vor, dass sich dieselbe Sinusfunktion ergibt:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{4}{3}\left(x - \frac{29\pi}{8}\right)\right) &= \sin\left(\frac{4}{3}\left(x - \frac{5\pi}{8} - \frac{24\pi}{8}\right)\right) = \sin\left(\frac{4}{3}\left(x - \frac{5\pi}{8} - 3\pi\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{4}{3}\left(x - \frac{5\pi}{8}\right) - 4\pi\right) = \sin\left(\frac{4}{3}\left(x - \frac{5\pi}{8}\right)\right) \end{aligned}$$

Die Multiplikation von 3π mit $B = \frac{4}{3}$ ergibt 4π , also die doppelte Periode der unmodifizierten Sinusfunktion. Folglich kann man dieses Glied im Argument der Sinusfunktion weglassen.

¹¹ λ = gr. *lambda*. Ausgesprochen: "landa".

5.3 Die Phase φ – noch ein Verschiebungsparameter

Betrachten wir als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen die lediglich horizontal verschobene, ansonsten aber unmodifizierte Sinusfunktion:

$$f(x) = \sin(x - C)$$

Die Periode dieser Sinusfunktion ist immer noch $P = 2\pi$.

Jede horizontale Verschiebung C lässt sich auch als Bruchteil oder Vielfaches der Periode P angeben. So verschiebt beispielsweise $C = \frac{\pi}{2}$ die Sinusfunktion um eine Viertelperiode nach rechts:

$$\frac{C}{P} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4} \cdot P$$

Auf diese Weise lassen sich Verschiebungen durch verschiedene C 's gut in Worte fassen, z.B.:

$$C = -\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4} \cdot P \quad \hat{=} \text{ Linksverschiebung um eine Viertelperiode}$$

$$C = -\pi = -\frac{1}{2} \cdot P \quad \hat{=} \text{ Linksverschiebung um eine halbe Periode}$$

$$C = \frac{3\pi}{2} = \frac{3}{4} \cdot P \quad \hat{=} \text{ Rechtsverschiebung um eine Dreiviertelperiode}$$

$$C = 7\pi = \frac{7}{2} \cdot P \quad \hat{=} \text{ Rechtsverschiebung um dreieinhalb Perioden}$$

Wie sieht es mit diesen Verschiebungsangaben bei horizontal gestreckten Sinusfunktionen aus? Die Periode P ist dann nicht mehr gleich 2π . Vielmehr gilt (vgl. Seite 30 oben):

$$P = \frac{2\pi}{B}$$

Trotzdem können wir ganz genau gleich über die horizontale Verschiebung sprechen, wenn wir im Argument der Sinusfunktion die Klammer ausmultiplizieren.

Im Beispiel: Betrachten wir nochmals das Beispiel aus Abschnitt 5.2:

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{4}{3}\left(x - \frac{5\pi}{8}\right)\right) + 4 = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{4}{3}x - \underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{=\varphi}\right) + 4$$

In dieser ausmultiplizierten Form stehen die $\frac{5\pi}{6}$ nicht mehr für die absolute Verschiebung auf der x -Achse, wie wir sie in Abb. 26 gesehen haben. Vielmehr geht es um eine Art relative Verschiebung. Da die $\frac{5\pi}{6}$ nicht mehr mit dem Streckungsparameter B multipliziert werden, wird durch sie das Ausmass der Verschiebung bezogen auf die Periode einer unmodifizierten Sinusfunktion angegeben. Die $\frac{5\pi}{6}$ müssen also mit 2π verglichen werden:

$$\frac{\frac{5\pi}{6}}{2\pi} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{5}{12}$$

Unsere Sinusfunktion wird somit um $\frac{5}{12}$ einer Periode nach rechts verschoben. Das ist fast eine halbe Periode. Und genau diese Verschiebung um fast eine halbe Periode lässt sich nun wieder in Abb. 26 entdecken! Sie entspricht immer noch dem mit C angeschriebenen Pfeil. Die Periode ist $P = \frac{3\pi}{2}$ lang und die horizontale Verschiebung sind $\frac{5}{12}$ davon. Rechnerische Bestätigung dieser Aussage:

$$C = \frac{5}{12} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

Geben wir die horizontale Verschiebung in der ausmultiplizierten Form an (im Bsp.: $\frac{5\pi}{6}$), so bezeichnen wir sie als **Phasenverschiebung** oder kurz als **Phase** und schreiben dafür ein φ .¹²

¹² φ = gr. *phi*. Ausgesprochen: "fi".

5.4 Übersicht zu den Funktionsparametern der allgemeinen Sinusfunktion

Wir wollen nun nach unseren ersten Betrachtungen nochmals in Reinform festhalten, was wir über die mittels Parameter **verallgemeinerte Sinusfunktion** wissen:

Die allgemeine Sinusfunktion und ihre Parameter

Die **allgemeine Form der Sinusfunktion** ist gegeben durch die Funktionsgleichung

$$f(x) = A \cdot \sin(B(x - C)) + D \quad (17)$$

Dabei stehen die vier Parameter $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ für folgende Veränderungen des Funktionsgraphen:

$A =$ **Amplitude** = maximaler Ausschlag aus der Mittellage

$B =$ horizontale Streckung resp. Stauchung

$C =$ horizontale Verschiebung (positiv $\hat{=}$ nach rechts)

$D =$ **mittlere Höhe** = **Mittellage** = vertikale Verschiebung

Die Periode P

Die **Periode P** , also die horizontale Länge eines vollständigen Auf- und Ab-Zyklus der Sinuskurve, ist einzig vom Streckungsparameter B abhängig und es gilt:

$$P = \frac{2\pi}{B} \quad \text{resp.} \quad B = \frac{2\pi}{P}$$

Die Phasenverschiebung resp. Phase φ

Anstelle des Parameters C kann die horizontale Verschiebung auch durch die **Phase** oder **Phasenverschiebung** φ beschrieben werden. Damit schreiben wir für die Funktion:

$$f(x) = A \cdot \sin(Bx - \varphi) + D$$

Zum Verständnis der Phase muss sie mit der Periode der unmodifizierten Sinusfunktion, also mit 2π , verglichen werden. $\frac{\varphi}{2\pi}$ ist der Bruchteil einer Periode P , um die $f(x)$ gegenüber der unmodifizierten Sinusfunktion horizontal verschoben ist.

Für die Phase φ und die Parameter B und C gilt ausserdem:

$$\varphi = B \cdot C$$

denn die Phase φ erhält man als konstantes Glied beim Ausmultiplizieren des ursprünglichen Sinusargumentes $B(x - C) = Bx - \varphi$.

Bemerkung resp. Ausblick: Solange wir in einer physikalischen Anwendung nur die sinusartige Schwingung eines einzelnen Objektes oder eine einzelne Welle betrachten, kann man das Koordinatensystem in der Regel so legen, dass $\varphi = 0$ ist. Erst wenn man fragt, wie zwei Schwingungen gleicher Periode relativ zueinander verschoben sind, muss für die eine Sinuskurve eine Phase eingeführt werden. Die Phase der einen Kurve entspricht dann einer sogenannten **Phasendifferenz** $\Delta\varphi$ zwischen den beiden Schwingungen resp. Wellen.

6 Die mathematische Beschreibung des harmonischen Oszillators

In diesem Kapitel werden wir sehen, dass die Schwingung eines einfachen Federpendels fantastisch gut durch eine Sinusfunktion beschrieben werden kann.¹³ Jedes Objekt oder System, das auf diese Weise sinusförmig schwingt, wird in der Physik als **harmonischer Oszillator** bezeichnet.

6.1 Periode T und Frequenz f ($\hat{=}$ Drehzahl)

Bei periodischen, also sich ständig in gleicher Art wiederholenden Vorgängen lässt sich die Zeitspanne angeben, die eine einzelne Wiederholung in Anspruch nimmt. Diese Zeitspanne nennt man **Periode T** . Umgekehrt kann man aber auch angeben, wie viele Wiederholungen in einer bestimmten Zeitspanne stattfinden. Diese Angabe nennt man **Frequenz f** .

Die Frequenz f ist stets der Kehrwert der Periode T und umgekehrt:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{resp.} \quad T = \frac{1}{f} \quad (18)$$

SI-Einheit der Frequenz: 1 Hertz = 1 Hz := $\frac{1}{\text{s}}$, lies: **Wiederholungen pro Sekunde**.

Verdeutlichung: Dauert eine einzelne Wiederholung $T = 0.25 \text{ s}$, so finden pro Sekunde vier ganze Wiederholungen statt. Die Frequenz beträgt also $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.25 \text{ s}} = 4.0 \text{ Hz}$.

Bsp. Stimmgabelschwingung: $f = 440 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 0.00227 \text{ s} = 2.27 \text{ ms}$ (Millisekunden).

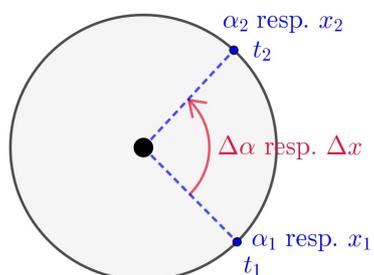
Betrachten wir eine **Drehbewegung (Rotation)**, z.B. von einem Rad oder einer Achse, so wird die Dauer einer einzelnen Umdrehung zur Periode T . In dieser Zeit dreht sich das Objekt einmal. Dazu gehört eine Drehfrequenz $f = \frac{1}{T}$, die in der Technik, beispielsweise bei Motoren, oft als **Drehzahl** bezeichnet wird. Sie beschreibt die *Anzahl Umdrehungen pro Zeitspanne*. Gerade bei Automotoren wird sie häufig in der Einheit *Umdrehungen pro Minute* $\text{U min}^{-1} = \frac{\text{U}}{\text{min}}$ angegeben.

6.2 Winkelgeschwindigkeit und Kreisfrequenz ω

Denken wir weiterhin an ein gleichförmig rotierendes Rad, so soll die **Winkelgeschwindigkeit ω** angeben, um welche Winkeldifferenz $\Delta\alpha$ (im Gradmass) resp. Δx (im Bogenmass) das Rad pro Zeitspanne Δt gedreht wird (vgl. Abb. 27):

$$\omega := \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} \quad \text{resp.} \quad \omega := \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (19)$$

Dabei ist das Symbol ω der letzte Kleinbuchstabe *omega* des griechischen Alphabets – also nicht der Buchstabe *w* des lateinischen Alphabets!



In der Zeitspanne Δt dreht sich die Scheibe um den Winkel $\Delta\alpha$ resp. Δx

\Rightarrow Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad \text{resp.} \quad \omega = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Abbildung 27: Das Verständnis der Winkelgeschwindigkeit.

¹³Weshalb die Schwingung so perfekt durch eine Sinusfunktion beschrieben wird, lassen wir momentan dahingestellt.

Betrachten wir in Abb. 27 eine ganze Umdrehung, so beträgt der Drehwinkel $\Delta\alpha = 360^\circ$ resp. $\Delta x = 2\pi$. Die dafür benötigte Zeit Δt ist gerade die **Umlaufzeit** resp. **Periode** T der Drehbewegung. Für die Winkelgeschwindigkeit im Gradmass gilt somit gemäss (18):

$$\omega = \frac{360^\circ}{T} = 360^\circ \cdot f \quad (20)$$

Und für dieselbe Angabe im Bogenmass erhalten wir:

$$\text{Kreisfrequenz: } \omega = \frac{\Delta x}{T} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (21)$$

Diese im Bogenmass notierte Winkelgeschwindigkeit ω bezeichnen wir als **Kreisfrequenz**. Für unsere weiteren Betrachtungen von Schwingungen und Wellen werden wir ausschliesslich diesen neuen Namen *Kreisfrequenz* verwenden. Sollten wir irgendwann mal vergessen, was mit diesem Ausdruck gemeint ist, so dürfen wir uns an die alternative Bezeichnung *Winkelgeschwindigkeit* (im Bogenmass!) erinnern, um wieder das richtige Bild vor Augen zu haben.

6.3 Ein Beispiel: Die Windturbine von calandawind.ch

Zur Veranschaulichung dieser neuen Grössen wollen wir ein Beispiel betrachten, nämlich die grosse Windturbine von *calandawind.ch* (vgl. Abb. 28) bei Haldenstein in der Nähe von Chur im Rheintal. Bei "anständigem" Wind beträgt die Dauer einer ganzen Umdrehung grademal $T = 4.2$ s.

Mit 18 berechnen wir die *Frequenz* der Drehbewegung:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4.2\text{ s}} \approx 0.238\text{ Hz}$$

In Worten: Die Anlage macht pro Sekunde 0.238 Umdrehungen, also eben 0.238 Hz. Das rechnen wir auf die Minute hoch:

$$f = 0.238\text{ Hz} = \frac{0.238}{\text{s}} = \frac{0.238}{\frac{1}{60}\text{ min}} \approx 14.3 \frac{\text{U}}{\text{min}}$$

14.3 Umdrehungen pro Minute – das ist keine besonders hohe *Drehzahl*, aber für eine solche Windturbine eben doch nicht ganz ohne.



Abbildung 28: Die grosse Windturbine bei Haldenstein im Rheintal.

Die *Winkelgeschwindigkeit* ω der Anlage beträgt gemäss (20) im Gradmass:

$$\omega = \frac{360^\circ}{T} = \frac{360^\circ}{4.2\text{ s}} \approx 85.7 \frac{^\circ}{\text{s}}$$

In Worten: Pro Sekunde dreht sich das Rad um 85.7° . Das ist fast eine Vierteldrehung (90°), sodass eine ganze Drehung eben ein bisschen mehr als vier Sekunden benötigt.

Weiter folgt gemäss (21) für die *Kreisfrequenz* ω , also für die mit dem Bogenmass notierte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4.2\text{ s}} \approx 1.50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Hier lohnt es sich allenfalls, die Einheit rad für Winkel im Bogenmass explizit anzugeben. Wir dürften auch nur $\omega = 1.50 \frac{1}{\text{s}}$ schreiben. Hier ist das rad aber doch aufschlussreich, denn wir sehen damit sofort, dass es sich um die Angabe der Kreisfrequenz resp. der Winkelgeschwindigkeit im Bogenmass handelt. Eine ganze Drehung würde $2\pi \text{ rad} \approx 6.3 \text{ rad}$ entsprechen. $\omega = 1.50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ bestätigt also, dass das Windrad eine knappe Vierteldrehung pro Sekunde ausführt.

In 4.2 s eine Umdrehung – das scheint keine allzu grosse Rotationsgeschwindigkeit zu sein. Zum Abschluss dieses Beispiels wollen wir aber noch kurz ausrechnen, wie schnell die Spitze eines Rotorblattes bei dieser Drehung unterwegs ist. Effektiv hat so ein Blatt eine Länge von $r = 56\text{ m}$. Für die **Bahngeschwindigkeit** der Blattspitze erhalten wir daher:

$$v = \frac{\text{Bahnumfang}}{\text{Umlaufzeit}} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 56\text{ m}}{4.2\text{ s}} \approx 83.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 302 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Das ist doch eine beträchtliche Geschwindigkeit, die wir da erhalten – 2.5- bis 3-mal so schnell wie die Autos auf der Autobahn nebenan (vgl. Abb. 28)!

Wir bemerken an dieser Stelle zudem, dass es einen ganz einfachen Zusammenhang zwischen der Bahngeschwindigkeit v und der Kreisfrequenz ω gibt. Offenbar gilt:

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot r = \omega \cdot r \quad (22)$$

Klar: Die Kreisfrequenz ω steht für die Winkelgeschwindigkeit im Bogenmass und somit für die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem sich mit der Frequenz f resp. der Periode T drehenden Einheitskreis. Diese Geschwindigkeit muss bei einem rotierenden Kreis mit Radius r eben mit r hochskaliert werden, um die Bahngeschwindigkeit v eines Punktes auf dem Kreisrand zu erhalten.

Bemerkung: Da wir uns mit Schwingungen und Wellen beschäftigen, ist (22), also $v = \omega r$, für uns kaum von Interesse. Würden wir hingegen die anspruchsvolle Mechanik von Kreis- und Rotationsbewegungen weiter untersuchen, so würden wir diese Gleichung die ganze Zeit verwenden.

6.4 Drehbewegung einer Scheibe und Sinusfunktion des Federpendels

Eine Scheibe mit Radius A drehe sich gleichförmig im Gegenuhrzeigersinn mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Wir betrachten einen Punkt P auf dem Scheibenrand und legen ein x - y -Koordinatensystem über die Scheibe, so wie das in Abb. 29 gezeigt wird. Durchquert der Punkt zum Zeitpunkt $t = 0$ die positive x -Achse, so beträgt der Drehwinkel zum Zeitpunkt t von dort aus gemessen ωt .

Wie verändert sich die y -Koordinate des Punktes P während der Drehung? Da der Winkel ωt gleichmässig anwächst, muss sich im t - y -Diagramm rechts in Abb. 29 eine Sinusfunktion ergeben, denn die y -Koordinate von P ist ja per Definition genau der Sinuswert des Winkels ωt , wobei dieser Wert noch mit dem Scheibenradius A gestreckt wird. Somit ist klar: Die Funktion, die die y -Koordinate des Punktes P in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt, ist gegeben durch:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t) \quad (23)$$

Der Punkt auf dem Scheibenrand geht sinusförmig auf und ab. Das ist lediglich eine direkte Konsequenz der Sinusdefinition am Einheitskreis (vgl. Abschnitt 2.3).

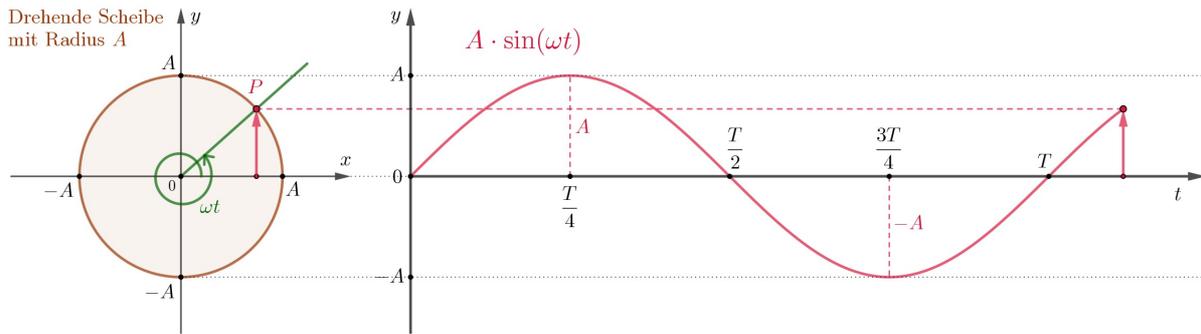


Abbildung 29: Die y -Koordinate des Punktes auf dem Rand der drehenden Scheibe generiert automatisch eine Sinusfunktion.

In Abb. 30 sehen wir ein **Federpendel**, das neben der gleichförmig rotierenden Scheibe aufgestellt ist. Am Rand der Scheibe ist ein Korkzapfen ($\hat{=}$ Punkt) befestigt. Eine helle Lampe beleuchtet Zapfen und Federpendel aus einer Richtung, sodass deren Schatten an der Wand dahinter beobachtet werden kann. Schwingt das Pendel mit der passenden Ausschlagsstärke (= **Amplitude** A), so kann der Motor durch Variation des Stromes genau so eingestellt werden, dass sich die beiden Schatten absolut parallel zueinander auf und ab bewegen.

Konsequenz: Offensichtlich schwingt das Federpendel genau sinusförmig auf und ab, denn seine Bewegung deckt sich mit derjenigen der y -Koordinate des Zapfens. Legen wir die Nullhöhe $h = 0$ in die **mittlere Lage** (= **Ruhelage**) des Pendels und starten wir die Zeitmessung genau dann, wenn das Pendel diese Mittellage in Aufwärtsrichtung durchquert, so muss die Schwingungsfunktion $h(t)$, also die Höhenlage h in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t , mit der Funktion $y(t)$ aus (23) für die y -Koordinate des Punktes auf dem Rand der Drehscheibe übereinstimmen:

$$h(t) = y(t) = A \cdot \sin(\omega t) \quad (24)$$

Wir verstehen nun gut, weshalb auch beim eindimensional schwingenden Federpendel der Faktor ω in der Sinusfunktion als *Kreisfrequenz* bezeichnet wird. Die Schwingung des Federpendels entspricht eben genau der auf eine Dimension reduzierten zweidimensionalen Kreisbewegung!



Abbildung 30: Drehende Scheibe und Federpendel nebeneinander: Der Schatten des Korkzapfens auf dem Scheibenrand und derjenige des Federpendels bewegen sich perfekt miteinander auf und ab.

6.5 Die ungedämpfte Schwingung eines Federpendels

Lenkt man ein **Federpendel** aus der **Ruhelage** aus und lässt dann los, so wird es eine Schwingung ausführen – auf und ab. Diese Bewegung verläuft über kurze Zeiträume hinweg in guter Näherung reibungsfrei. Wir sprechen von einer **ungedämpften Schwingung**. Langfristig wird das Pendel aufgrund von Reibung und Luftwiderstand natürlich irgendwann wieder zum Stillstand kommen.

Wie im vorigen Abschnitt bereits gesehen, fassen wir die aktuelle Höhenlage h des Pendels als Funktion der Zeit t auf. Abb. 31 zeigt neben der Versuchsanordnung die Messkurve, die sich bei der Erfassung des Pendels mittels eines darunter platzierten Distanzsensors ergibt. Der Sensor führt pro Sekunde 25 Höhenmessungen durch (Messfrequenz = 25 Hz). So ergeben sich im Diagramm in jeder Sekunde 25 Datenpunkte (rote Pünktchen).

In der Datenerhebungssoftware Logger Pro lässt sich eine mathematisch exakte Sinuskurve über die Datenpunkte legen. Man spricht von einem **Fit**.¹⁴ Wie schon erwartet, gelingt dieser Fit extrem gut.¹⁵ Alle Datenpunkte liegen ohne grossen Fehler auf der mathematisch exakten Sinuskurve (schwarz): "Federpendel schwingen sinusförmig."

Das Fensterchen in Abb. 31 gibt uns die Informationen zum Fit:

- Für den Fit habe ich die allgemeine Sinusfunktion

$$h(t) = A \cdot \sin(B \cdot (t - C)) + D \quad (25)$$

verwendet. Abgesehen davon, dass die horizontale Achse nun eine Zeitachse ist und somit anstelle von x eben t geschrieben wird, entspricht dies genau unserer mit Parametern versehenen Sinusfunktion (17) in der Form mit horizontaler Verschiebung C .

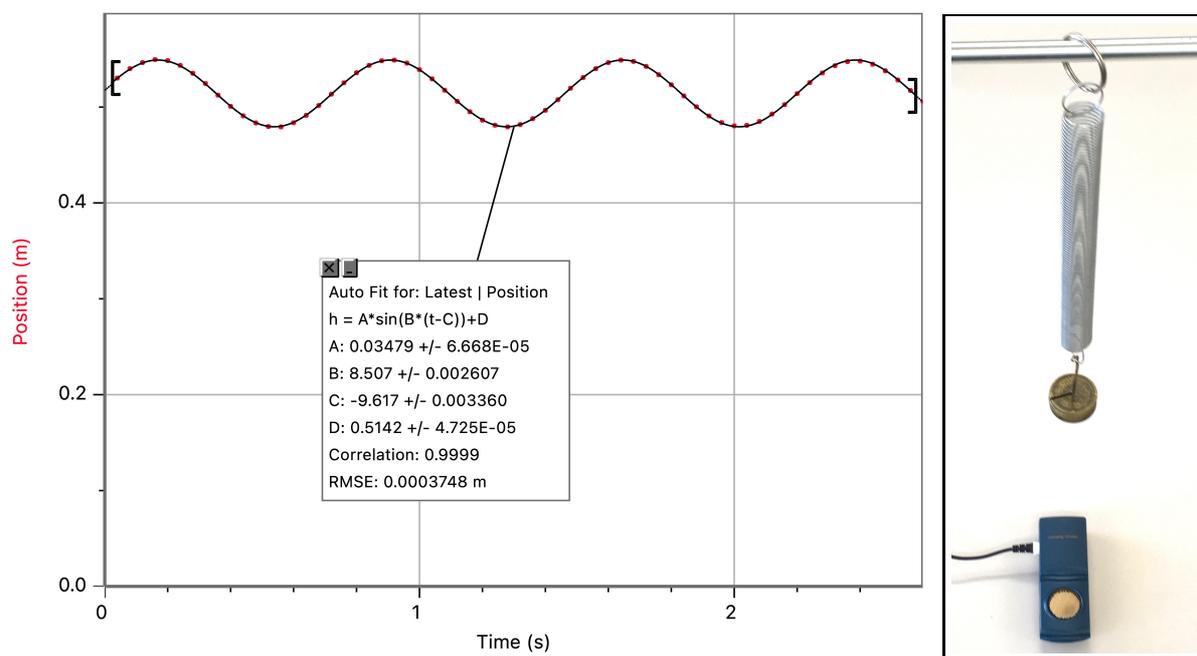


Abbildung 31: Die Schwingung eines Federpendels: Die mathematisch exakte Sinuskurve deckt sich unglaublich gut mit den Datenpunkten. Das Pendel schwingt offensichtlich sinusförmig.

¹⁴Logger Pro optimiert die vier Parameter für die Sinusfunktion so, dass die Abweichungen zu den Messpunkten insgesamt minimal sind. Mit dieser Optimierungsmathematik werden wir uns in der 3. Klasse im Thema Differentialrechnung ansatzweise auseinandersetzen.

¹⁵Correlation = 0.9999. Ein Wert von 1 würde einer vollständigen Gleichheit entsprechen.

- Logger Pro zeigt uns die zum Fit gehörenden Werte für die Parameter A , B , C und D an:¹⁶

Mittlere Lage $D = 0.5142$: Diese Angabe entspricht der Ruhelage des Pendels. Sie liegt $0.5142\text{ m} \approx 51.4\text{ cm}$ über dem Sensor. Um diese Höhe schwingt das Pendel.

Amplitude $A = 0.03479$: Der vertikale Ausschlag beträgt 0.03479 m , also etwa 3.5 cm .

Horizontale (= zeitliche) Verschiebung $C = -9.617$: Die Sinuskurve "startet" nicht bei $t = 0$, sondern ist horizontal, also auf der Zeitachse, um -9.617 s nach links verschoben.

Horizontale (= zeitliche) Streckung $B = 8.507$: Diesen Parameter identifizieren wir gemäss unseren Betrachtungen in den Abschnitten 6.2 bis 6.4 sofort mit der Kreisfrequenz ω , also $\omega = B = \frac{2\pi}{T}$. Er hat im Prinzip die Einheit $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, also $B = 8.507 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Für die Schwingungsperiode erhalten wir: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi (\text{rad})}{8.507 \frac{(\text{rad})}{\text{s}}} = 0.7386\text{ s}$.

Und aebenso folgt für die Schwingungsfrequenz: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8.507 \frac{(\text{rad})}{\text{s}}}{2\pi (\text{rad})} = 1.354\text{ Hz}$.

6.6 Reduktion auf das Wesentliche dank freier Wahl des Koordinatensystems

Am Pendel interessiert uns vor allem, wie schnell es schwingt und wie stark sein Ausschlag ist. Diese Informationen stecken vollständig in den beiden Parametern ω und A . Die Parameter C und D haben nichts mit der eigentlichen Schwingung des Pendels zu tun:

- Die durch C beschriebene zeitliche Verschiebung hängt ja lediglich davon ab, zu welchem Zeitpunkt die Messung gestartet wird. Dieser Startzeitpunkt entspricht dann $t = 0$.
- Und die durch D beschriebene mittlere Lage hängt nur davon ab, wie weit unterhalb des Pendels der Sensor platziert ist. Diese Sensorhöhe legt für die Messung das Nullniveau fest.

Die "Physik des Federpendels" hängt also nicht von den Parametern C und D ab. Im Prinzip dürfen wir sie deshalb frei wählen und somit den zeitlichen und den örtlichen Nullpunkt meines Koordinatensystems nach Belieben festlegen. Es ist klar, wie wir diese Wahl vornehmen, wenn wir die Mathematik möglichst einfach haben wollen: Es seien $C = D = 0$! Wir legen also das Nullniveau der Höhe in die Ruhelage des Pendels und starten die Messung genau dann, wenn das Pendel diese Ruhelage in Aufwärtsrichtung durchquert. Damit landen wir wieder bei Gleichung (24) von Seite 36:

Die Beschreibung einer ungedämpften, harmonischen Schwingung

Nach geeigneter Wahl des zeitlichen und des örtlichen Nullpunktes lässt sich die ungedämpfte Schwingung eines **harmonischen Oszillators**, z.B. eines reibungsfreien Federpendels, beschreiben durch die Funktion

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (26)$$

Dabei stehen die Parameter A , ω , T und f für folgende Grössen:

$A =$ **Amplitude** = maximaler Ausschlag aus der Mittellage

$\omega =$ **Kreisfrequenz = Winkelgeschwindigkeit** = pro Zeitabschnitt abgefahrter Winkel im Argument der Sinusfunktion (Bogenmass!)

$T =$ **Periode** = Zeitspanne einer einzelnen, vollständigen Schwingung

$f =$ **Frequenz** = Anzahl vollständiger Schwingungen pro Zeitspanne

¹⁶Hinter den Parameterwerten wird jeweils die zugehörige **Standardabweichung** (\pm -Wert) angegeben. Damit brauchen wir uns im Moment aber nicht auseinanderzusetzen.

7 Resonanz – das Grundphänomen der Schwingungslehre

7.1 Eigenschwingungen und -frequenzen

Die meisten Körper oder Systeme von Körpern besitzen selber die Möglichkeit zu schwingen. In der Regel gehört zu einer solchen **Eigenschwingung** eine ganz bestimmte Frequenz, die wir als **Eigenfrequenz** des Körpers resp. Systems bezeichnen.

Je nach Art des Körpers oder Systems sind ganz unterschiedlich viele **Eigenschwingungsmodi** und somit auch Eigenfrequenzen möglich. Hier ein paar Beispiele:

- Jedes Federpendel schwingt von sich aus mit einer ganz bestimmten Frequenz f auf und ab. Diese Frequenz tritt direkt sichtbar in der mathematischen Beschreibung der Pendelschwingung auf (vgl. Kapitel 6). Möchte ich an dieser Eigenfrequenz des Pendels etwas ändern, so muss ich schon am Pendel selber etwas verändern. Beispielsweise könnte ich eine stärkere Spiralfeder verwenden oder mehr Masse anhängen.
- Die eingespannte Saite eines Musikinstrumentes besitzt im Prinzip unendlich viele Eigenschwingungsmodi. Die zugehörigen Frequenzwerte sind allerdings nicht beliebig! Vielmehr sind alle Eigenfrequenzen natürliche Vielfache ein- und derselben Frequenz, die wir als **Grundtonfrequenz** f_0 bezeichnen (vgl. Kapitel 8).

Das im Unterricht verwendete **Monochord** (vgl. Abb. 32) zeigt natürlich ebenfalls diese Eigenfrequenzcharakteristik.

- Gebäude, Türme, Brücken und sonstige tragende Konstruktionen sollten idealerweise gar keine Eigenschwingungen resp. -frequenzen aufweisen. Umgekehrt sollten die **Resonanzkörper** von Musikinstrumenten über möglichst viele Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen verfügen.

Warum denn das? Genau hier kommt der Begriff **Resonanz** ins Spiel, den wir nun gut verstehen können und sogleich beleuchten werden.

7.2 Anregung und Resonanz

Versucht man ein System zum Schwingen zu bringen, so sprechen wir von einer **Anregung**. Erfolgt diese Anregung mit einer Eigenfrequenz des Systems, so wird sie von diesem sehr gut aufgenommen. Das wird als **Resonanz** bezeichnet. Die Eigenfrequenzen des Körpers resp. Systems sind also gleichzeitig seine **Resonanzfrequenzen**! Bei Anregung mit diesen Frequenzen reagiert das System deutlich. Die Anregungsenergie wird als Schwingung aufgenommen und kann so über lange Zeit im System erhalten bleiben.

Regt man einen Körper hingegen mit irgendeiner Nicht-Resonanzfrequenz an, so kann er kaum etwas damit anfangen – ausser einem leichten Zittern selber wird nichts zu beobachten sein. Die Anregungsenergie "verpufft" sofort in Form von Wärme (Reibung).



Abbildung 32: Das Monochord aus dem Unterricht.

7.3 Frequenzselektion bzw. Tonhöherzeugung bei Musikinstrumenten

Wird die Saite eines Klaviers angeschlagen, so sind in dieser Art der Anregung (eben ein Schlag) alle möglichen Frequenzen vorhanden, wovon wir uns später noch überzeugen werden.

Die Saite kann aber nur diejenigen Frequenzen aufnehmen, die zu Eigenschwingungen gehören. Auf ihr "überleben" ausschliesslich Eigenfrequenzen. In kürzester Zeit – wenige Millisekunden nach dem Anschlagen! – werden auf der Saite nur noch die Resonanzschwingungen, also die angeregten Eigenschwingungen zu beobachten sein. Die restlichen Schwingungen wurden "vernichtet".

Die Saite trifft also eine **Frequenzselektion**: Nur die Resonanz- resp. die Eigenfrequenzen werden für das Weiterschwingen "zugelassen". Genau dadurch legt die Saite ihre Tonhöhe fest. Ganz ähnliche Selektionsvorgänge finden bei allen Musikinstrumenten statt, die Töne mit klar hörbaren Tonhöhen erzeugen. Dazu gehören z.B. Gitarren, Streichinstrumente, Holz- und Blechbläser, aber auch die menschliche Stimme. Im letzteren Fall übernehmen die Stimmbänder in gewisser Weise die Rolle einer Saite.

7.4 Tonverstärkung durch Resonanzkörper

Würde eine Klaviersaite für sich alleine schwingen, so würde man ihren Ton nur ganz leise hören. Ausserdem hätte er gar nicht die klare Klangfarbe, die wir uns von einem Klavier gewohnt sind.

Um die Schwingung einer Saite gut hörbar zu machen, braucht es eine Art Verstärker, der dann aber auch bezüglich der Klangfarbe "mitbestimmend" wirkt. Dieser Verstärker ist der sogenannte **Resonanzkörper**. Typischerweise befindet er sich in direktem physischen Kontakt mit der Saite. Er muss so gebaut sein, dass er möglichst alle Frequenzen in sich aufnehmen kann. D.h., im Idealfall sind alle möglichen Frequenzen Eigenfrequenzen des Resonanzkörpers. Ein idealer Resonanzkörper trifft keine Selektion, sondern zeigt bei beliebigen Schwingungen Resonanz.

Der Resonanzkörper kann die von der Saite abgegebene Schwingungsenergie in sich aufnehmen und akkumulieren (= ansammeln). So entsteht der Verstärkungseffekt. Dabei wird er die Frequenzen allerdings untereinander neu gewichtet. Es gibt nämlich kaum einen Resonanzkörper, der alle Frequenzen ganz genau gleich gut aufnehmen kann. Das ist aber auch gar nicht wünschenswert, denn gerade durch diese Neugewichtung wird der Resonanzkörper eben entscheidend für die Klangfarbe, sodass wir ein Klavier eben als Klavier zu erkennen vermögen (vgl. Kapitel 8).

Fast alle Saiteninstrumente verfügen über einen Resonanzkörper. In ihm widerspiegelt sich in der Regel die eigentliche Qualität des Instrumentes. Die Konstruktion eines richtig guten Resonanzkörpers ist die grosse Herausforderung der Instrumentenbauers*in! Ein grosser Teil des Klavier- und praktisch der gesamte Geigen- und Gitarrenbau dreht sich um diese Kunst.



Abbildung 33: Grossartige Musikinstrumente verfügen über hervorragende Resonanzkörper! (V.l.n.r.: Vladimir Horowitz (1903 – 1989), Jacqueline du Pré (1945 – 1987), Paco de Lucía (1947 – 2014).)

7.5 Die Resonanzkatastrophe

Regt man ein System über längere Zeit mit einer seiner Resonanzfrequenzen an, so wird dieses immer mehr Energie aufnehmen. Seine Schwingung wird immer intensiver, was zur sogenannten **Resonanzkatastrophe** führen kann. Das System hält die Schwingung resp. Energiemenge nicht mehr aus und geht kaputt.

Typischstes Beispiel hierfür ist das weitherum bekannte Zersingen eines Glases. Trifft man mit einem Ton resp. mit der Frequenz einer Schallwelle die Resonanzfrequenz des Glases, so nimmt dieses die Schallenergie immer mehr auf und wird schliesslich zerstört, weil die Flexibilität des Glases überschritten wird. Es ist allerdings zu sagen, dass dieses Zersingen mit einer menschlichen Stimme kaum möglich ist, da diese gerade bei grosser Intensität in der Regel ein Vibrato beinhaltet. D.h., die Tonfrequenz schwankt ständig ein wenig und es wird nicht kontinuierlich die Resonanzfrequenz des Glases getroffen. Mit einem Frequenzgenerator, der eine Frequenz ohne Fehler beibehalten kann, ist das "Zersingen" aber durchaus möglich.

Mehr aus Unwissenheit, denn aus Unvorsicht wurde in der Vergangenheit immer wieder vergessen, die Eigenschwingungen resp. die Resonanzfähigkeit eines Systems bei der Konstruktion zu berücksichtigen. So kam es beispielsweise vor, dass Brücken durch den Gleichschritt einer Militärkompanie zur Resonanzkatastrophe gebracht wurden.

Ein anderes sehr bekanntes Beispiel ist die Zerstörung der **Tacoma Narrows Bridge** in der Nähe von Seattle im Jahre 1940 (vgl. Abb. 34). Der Wind brachte diese Hängebrücke zum Einstürzen. Allerdings handelte es sich hierbei nicht um eine Resonanzschwingung im eigentlichen Sinn, denn es gab keine Windböen, die die Brücke mit einer entsprechenden Böen-Frequenz zum Schwingen angeregt hätten. Vielmehr haben Windturbulenzen an der Brücke diese in Schwingung versetzt. Voraussetzung dafür war ein relativ starker, kontinuierlicher Wind. Nichtsdestotrotz war an der Brücke vor allem die erste Oberschwingung der Torsionsschwingung (= Verdrehungsschwingung) zu beobachten. Offenbar konnte sie durch diese Windturbulenzen angeregt und weiter verstärkt werden, sodass es in gewisser Weise eben doch zu einer Resonanzkatastrophe kam.

Der Einsturz der Tacoma Narrows Bridge hatte auf jeden Fall seine Konsequenzen in der Bauphysik. Ab sofort wurden Gebäude aller Art nicht mehr nur statisch, sondern auch dynamisch durchgerechnet, um im Voraus Informationen über mögliche Eigenschwingungen zu haben und entsprechende versteifende oder ausgleichende Elemente anzubringen.

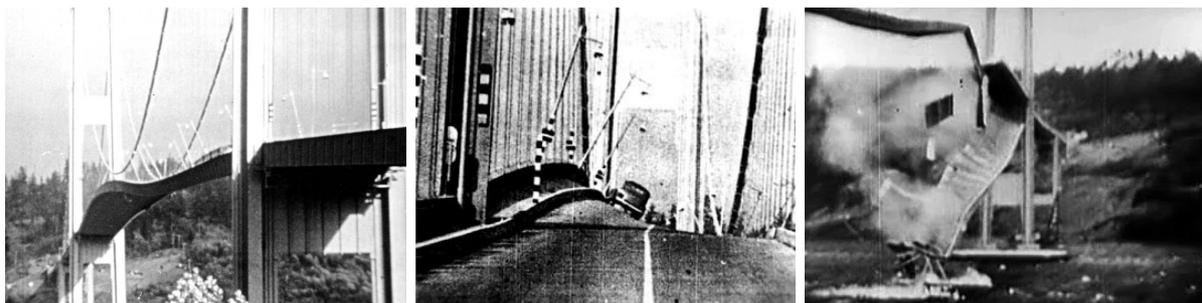


Abbildung 34: Der Einsturz der Tacoma Narrows Bridge: Windturbulenzen regten die Brücke zum Schwingen in ihrer ersten Oberfrequenz der Torsionsschwingung (1 Knotenpunkt in der Mitte) an.

8 Was ist ein Ton? – eine Antwort mittels Frequenzanalyse

Singt jemand oder wird auf einem Instrument eine Note gespielt, so hören wir einen Ton **mit einer ganz bestimmten Tonhöhe und einer bestimmten Klangfarbe**. Warum eigentlich? Wie erklären wir uns, dass diese Art der Tonerzeugung bei uns diese Wahrnehmung hervorruft?

Um dieser Frage nachzugehen, wollen wir klären, was für eine Art von **Schallwelle** denn bei unserem Ohr ankommt, wenn unser Gehirn diese akustische Information als Ton interpretiert.

Schallwellen sind **Dichte-** resp. **Druckschwankungen der Luft**, die sich wellenartig in dieser ausbreiten (**Schallgeschwindigkeit** $c \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Kommt die Schallwelle bei einem Ohr oder bei einem **Mikrofon** (= "künstliches Ohr") an, so erfasst dieses die Schwankungen des Luftdrucks. Das Mikrofon zeichnet in Abhängigkeit der Zeit t eine **Schalldruckfunktion** $p(t)$ auf, die sich in einem **Schalldruckdiagramm** darstellen lässt.

Auf den nächsten Seiten sind in den Abb. 35, 36 und 37 drei Beispiele von Schalldruckdiagrammen zu sehen (jeweils das linke der beiden nebeneinander abgebildeten Diagramme). Sie stammen von verschiedenen Schallquellen resp. gehören zu verschiedenen Klangwahrnehmungen (Stimmgabel mit Tonhöhe A, Flügelton mit Tonhöhe A, Zischlaut "Sch").

8.1 Das Schalldruckdiagramm des Stimmgabeltons und sein Frequenzspektrum

Das Schalldruckdiagramm der **Stimmgabel** (Abb. 35) zeigt eine **reine Sinusschwingung**. Der Schalldruck $p(t)$ (engl. *sound pressure*) schwankt sinusförmig zwischen Maximal- und Minimalwert hin und her. D.h., die Schalldruckfunktion $p(t)$ ist vergleichbar mit der aus Abschnitt 6.5 bekannten Schwingungsfunktion $h(t)$ eines Federpendels. Dort hatten wir implizit¹⁷ festgestellt:

Zu jeder reinen Sinusschwingung gehört eine ganz bestimmte Frequenz f .

Im Fall der Stimmgabel beträgt diese Frequenz $f = 440$ Hz. Die Periode der Schalldruckschwankung $p(t)$ beträgt $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{440} \text{ s} \approx 2.27 \text{ ms}$.

Nun gibt es ein mathematisches Verfahren, mit dem sich ermitteln lässt, aus welchen reinen Sinusschwingungen sich eine beliebige Schalldruckfunktion $p(t)$ zusammensetzt. Dieses Verfahren heisst **Frequenzanalyse**, denn wenn man herausfindet, aus welchen reinen Sinusschwingungen sich $p(t)$ zusammensetzt, dann weiss man eben, welche Frequenzen f in dieser Funktion enthalten sind.¹⁸

Diese Information stellt man in einem sogenannten **Frequenzspektrum** dar. Dies ist ein Diagramm mit liegender Frequenzachse, in welchem über jeder Frequenz f die **Amplitude** A abgetragen wird, mit welcher diese Frequenz in der ursprünglichen Funktion $p(t)$ auftritt. Im Frequenzspektrum liest man also ab, welche Frequenzen f in $p(t)$ wie stark, d.h. mit welchen Amplituden A , vertreten sind. Da das Schalldruckmuster $p(t)$ des Stimmgabeltons eine reine Sinusschwingung ist, zeigt das Frequenzspektrum nur bei einer einzigen Frequenz einen Ausschlag. Erwartungsgemäss erscheint dieser **Peak** (= Spitze) bei $f = 440$ Hz.

Tonhöhen- und Klangfarbenwahrnehmung beim Stimmgabelton

Der Stimmgabelton ist eine Art hoher Summton. Auch ein Pfeifen oder das Summen mit der Stimme wird vom Mikrofon ohne grossen Fehler als reine Sinusschwingung registriert – Töne, deren Höreindruck wir vielleicht mit Worten wie "farblos", "leer", "gerade" oder "rund" beschreiben würden.

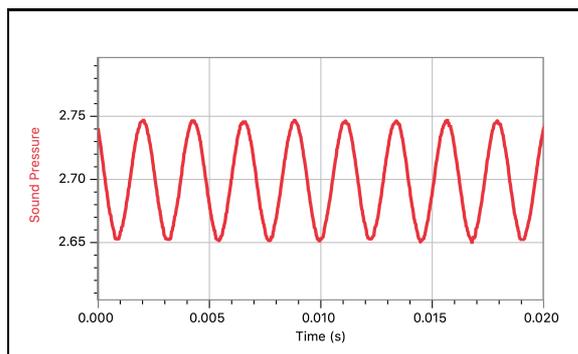
Die empfundene Tonhöhe wird durch die Frequenz der Schwingung vorgegeben. Eine schnellere Schwingung, also eine höhere Frequenz, wird von unserem Hirn als höherer Ton interpretiert. Im Fall der Stimmgabel hören wir die zur Frequenz 440 Hz gehörende Tonhöhe A.

¹⁷Implizit bedeutet "indirekt" oder "ohne speziell darauf hinzuweisen".

¹⁸Frequenzanalysen sind mathematisch anspruchsvoll. Wir überlassen sie deshalb dem Computer. Übrigens wird das Verfahren nach ihrem Erfinder auch als **Fourier-Transformation** bezeichnet. In Programmen mit Frequenzanalysefunktion findet man sie deshalb häufig unter dem Kürzel **FFT** für **Fast Fourier-Transformation**.

Stimmgabelton A

Schalldruckdiagramm $p(t)$



Frequenzspektrum

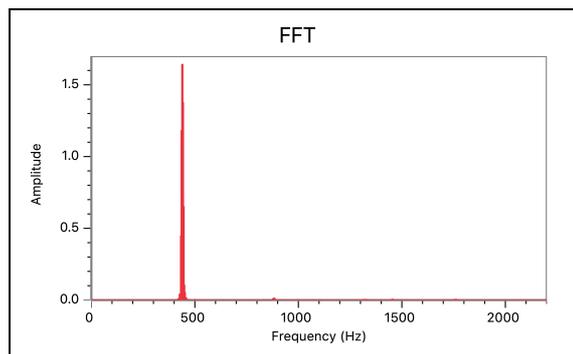


Abbildung 35: Schalldruckkurve und Frequenzanalyse eines Stimmgabeltons. Der Ton enthält eine einzige Frequenz. Das Schalldruckdiagramm entspricht deshalb aus einer reinen Sinuskurve.

8.2 Grundton und Obertöne am Beispiel eines Flügeltons

Durch das Drücken einer einzelnen Taste auf einem Flügel wird eine Saite angeschlagen.¹⁹ Dies erzeugt eine Schallwelle, die wir mit dem Mikrofon aufnehmen. Das daraus hervorgehende Schalldruckdiagramm zeigt ein komplizierteres, sich ständig wiederholendes Muster (Abb. 36).

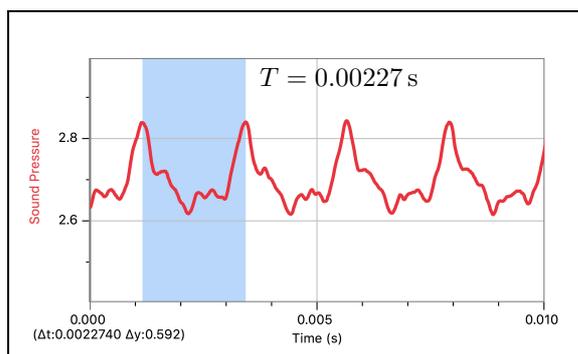
Die Frequenzanalyse deckt auf, was sich dahinter verbirgt: Im Frequenzspektrum treten mehrere Frequenzen in **regelmässigen Frequenzabständen** auf. D.h., das komplizierte, periodische Muster im Schalldruckdiagramm setzt sich aus mehreren, perfekt aufeinander abgestimmten, reinen Sinusschwingungen zusammen! Die tiefste im Spektrum auftretende Frequenz bezeichnet man als die **Grundtonfrequenz** f_0 . Die weiteren Frequenzen f_n mit $n \geq 1$ nennt man **Obertonfrequenzen**.

Aus der Regelmässigkeit im Frequenzspektrum folgern wir: Alle im Schalldruckmuster $p(t)$ enthaltenen Frequenzen sind **natürliche Vielfache der Grundtonfrequenz** f_0 , also:

$$f_n = (n + 1) \cdot f_0 \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Flügelton A

Schalldruckdiagramm $p(t)$



Frequenzspektrum

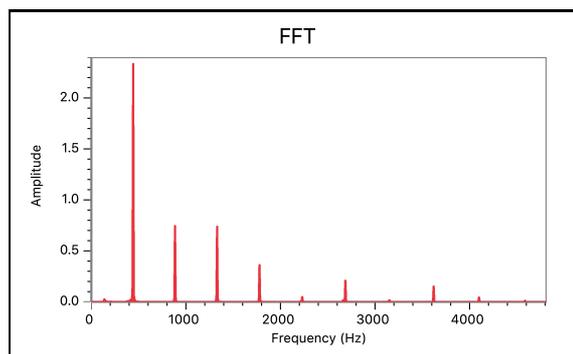


Abbildung 36: Schalldruckkurve und Frequenzanalyse eines Flügeltons. Der Ton enthält mehrere Frequenzen, die allesamt natürliche Vielfache einer Grundtonfrequenz f_0 sind. Aus diesem Grund zeigt das Schalldruckdiagramm immer noch ein periodisches, wenn auch komplizierteres Muster.

¹⁹Tatsächlich werden durch das Drücken einer Taste mehrere, im Wesentlichen identische Saiten angeschlagen.

Tonhöhen- und Klangfarbenwahrnehmung beim Klavierton

Das komplizierte Muster im Schalldruckdiagramm wiederholt sich offenbar mit einer Periode von 2.27 ms. Wir nennen dies die **Grundperiode** T_0 . Und genau zu dieser Grundperiode gehört auch die tiefste Frequenz im Frequenzspektrum, also die Grundtonfrequenz $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0.00227\text{s}} \approx 440\text{ Hz}$. Aus dieser Grundperiodizität leitet unser Gehirn offenbar die gehörte Tonhöhe ab. Der Ton des Flügels und der Stimmgabel sind in unserer Wahrnehmung gleich hoch (Tonhöhe A). Wir können also sagen:

Die Höhe eines Tons wird durch die Grundperiode T_0 des Schalldruckmusters vorgegeben. Da diese Grundperiode via $f_0 = \frac{1}{T_0}$ der Grundtonfrequenz f_0 im Frequenzspektrum entspricht, können wir auch sagen: Die Grundtonfrequenz f_0 legt die Tonhöhe fest.

Die Obertonfrequenzen haben also keinen Einfluss auf die Tonhöhenempfindung. Dafür wird durch ihre Zusammensetzung die **Klangfarbe** definiert. Je nachdem, wie stark Grund- und Obertonfrequenzen im Schalldruckmuster vorhanden sind, ergibt sich eine andere Klangfarbe. Deshalb tönt der Klavierton auch ganz anders und insbesondere reichhaltiger als der Ton der Stimmgabel, auch wenn er dieselbe Tonhöhe aufweist.

Die Klangfarbe eines Tons wird durch seine Zusammensetzung aus Grund- und Obertönen festgelegt.

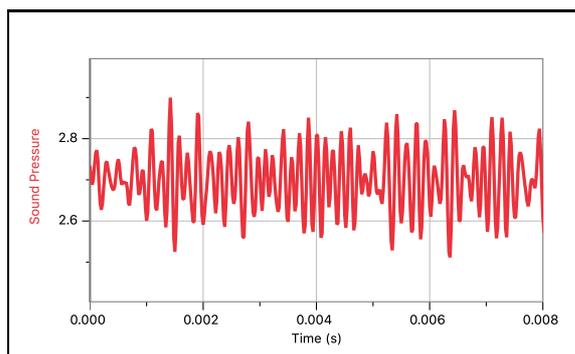
8.3 Rauschen und Geräusche ohne Tonhöhe

Enthält das Schalldruckmuster $p(t)$ einer Schallwelle keine sich ständig gleich wiederholenden Muster, so ergibt sich in der Frequenzanalyse keine Regelmässigkeit. Das Frequenzspektrum zeigt eine Vielzahl nicht aufeinander abgestimmter Frequenzen mit unterschiedlichen Amplituden (vgl. Abb. 37). Daraus kann unser Gehirn keine Tonhöhe extrahieren. Wir erhalten den Eindruck eines **Geräusches**.

Alle akustischen Wahrnehmungen ohne Tonhöhe weisen unregelmässige chaotisch anmutende Schalldruckmuster und unregelmässige Frequenzspektren auf. Dazu gehören z.B. Rauschen, Zischen, Klatschen, ein Knall, aber auch die Laute, welche wir in der Sprache als Konsonanten bezeichnen.

Zischlaut "Sch" (= Rauschen)

Schalldruckdiagramm $p(t)$



Frequenzspektrum

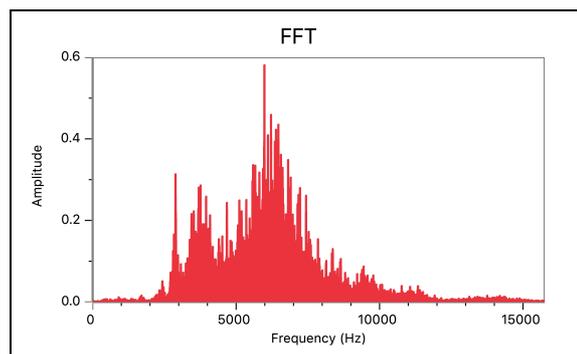


Abbildung 37: Schalldruckkurve und Frequenzanalyse eines Zischlautes. Der Ton enthält mehrere Frequenzen, die allesamt natürliche Vielfache einer Grundtonfrequenz f_0 sind. Aus diesem Grund zeigt das Schalldruckdiagramm immer noch ein periodisches, wenn auch komplizierteres Muster.

8.4 Zusammenfassung von und Folgerungen aus Kapitel 8

Ton- und Tonhöhenempfindung

Eine beim Ohr ankommende Schallwelle wird als Ton mit einer ganz bestimmten Tonhöhe wahrgenommen, wenn die darin enthaltenen Frequenzen **natürliche Vielfache einer Grundtonfrequenz f_0** sind. Die Frequenzen f_n werden also in ihrer Gesamtheit als **ein Ton** wahrgenommen, wenn gilt:

$$f_n = (n + 1) \cdot f_0 \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Die Frequenzen f_n mit $n \geq 1$ werden als **Obertonfrequenzen** bezeichnet.

Die wahrgenommene **Tonhöhe** ist dieselbe wie die einer Schallwelle, welche ausschliesslich die Grundtonfrequenz f_0 enthält. Einfach gesagt:

“Die Tonhöhe wird durch den Grundton vorgegeben.”

Klangfarbenempfindung

Die **Klangfarbe** eines Tones wird durch seine relative Zusammensetzung aus den Grund- und Obertonfrequenzen vorgegeben. Die in einem Ton enthaltenen Frequenzen bestimmen also gemeinsam, wie sich dieser Ton für uns anhört. Kurz:

“Die Grund- und Obertonzusammensetzung bestimmt, wie sich ein ein Ton anhört (Klangfarbe).”

Folgerungen für die Tonerzeugung

Die Quelle eines Tones muss stets ein **schwingendes System** sein, das **Frequenzen mit regelmässigen Frequenzabständen und ganz bestimmter Zusammensetzung** erzeugt.

Das gilt für klingende Instrumente jeglicher Art, aber auch für die menschliche Singstimme oder Tiergesänge.

9 Klangsynthese durch Aufsummierung von Sinusschwingungen

In Kapitel 8 haben wir verschiedene akustische Ereignisse analysiert und festgestellt, dass wir einem solchen Ereignis genau dann eine Tonhöhe zuordnen können, wenn das Schalldruckmuster eine Periodizität aufweist. Dem entspricht, dass im Frequenzspektrum nicht beliebige Frequenzen auftreten, sondern dass nur natürliche Vielfache ein- und derselben Grundfrequenz f_0 vorkommen.

Das bedeutet: Ein Ton mit bestimmter Tonhöhe und Klangfarbe ist die Summe aus mehreren sinusartigen Schalldruckschwankungen, die unterschiedlich gewichtet in diesem Ton vorhanden sind. Wahrgenommen werden nicht die einzelnen Sinusschwingungen, die je einem Pfeif- oder Summton mit bestimmter Frequenz entsprechen würden, sondern eben der Ton (mit Tonhöhe und Klangfarbe).

Diese Erkenntnis lässt sich umgekehrt dazu nutzen Klänge zu **synthetisieren**.²⁰ Genau dies ist die Idee eines elektronischen **Synthesizers**. Mit **elektronischen Schwingkreisen** lassen sich sinusartige Spannungsschwankungen herstellen, die dann zu einem Gesamtsignal aufaddiert werden können.

Wir wollen uns in diesem Kapitel aber nicht mit der Elektronik, sondern vielmehr mit der zugehörigen Mathematik beschäftigen.

9.1 Die Beschreibung der einzelnen Oberschwingung

Jede Frequenz f steuert eine sinusförmige Schwankung zur Gesamtschalldruckfunktion $p(t)$ bei. Wir wissen, wie eine solche Schwankungsfunktion $p_n(t)$ für die Obertonfrequenz f_n auszusehen hat:

$$p_n(t) = A_n \cdot \sin(\omega_n t - \varphi_n) \quad \text{mit} \quad \omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \cdot (n + 1) \cdot f_0$$

Der Index n zeigt an, dass es sich um die n -te Oberschwingung handeln soll. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ kann ein $p_n(t)$ angegeben werden.

Dabei beschreibt die Amplitude A_n , wie stark diese Schwankung in der Gesamtschalldruckfunktion $p(t)$ vertreten ist. Falls eine Obertonfrequenz f_n gar nicht in der Gesamtfunktion $p(t)$ vertreten sein soll, können wir einfach $A_n = 0$ setzen.

φ_n steht für die Phasenverschiebung der n -ten Oberschwingung. Diese Phasenverschiebung bräuhete es zur Beschreibung der einzelnen Sinusschwingung nicht, wie wir beim Federpendel gesehen hatten (Stichwort: "freie Wahl des zeitlichen Nullpunktes"). Wenn wir nun aber mehrere Schwingungen anschauen, so können diese relativ zueinander zeitlich verschoben sein, was sich mathematisch durch die Phase φ_n ausdrücken lässt. Im nächsten Abschnitt wird auf diese Phase noch weiter eingegangen.

9.2 Aufsummierung der Einzelschwingungen zur Gesamtschwingung

Für die Zusammensetzung der Gesamtschalldruckfunktion $p(t)$ brauchen wir (fast) nur noch die einzelnen $p_n(t)$ aufzusummieren:

$$p(t) = p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + \dots =: \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)$$

Wir sehen hier die **Summenschreibweise** mit dem **Summenzeichen** Σ (= gr. *Sigma*). Dabei wird unterhalb von Σ ein **Startwert** für den **Laufindex** deklariert. Oberhalb von Σ wird der **Endwert** angegeben. Dahinter folgt der vom Laufindex abhängige Term. Das Summenzeichen sagt, dass alle ganzzahligen Werte von n vom Startwert bis zum Endwert in diesen Term eingesetzt und anschließend alle diese Ausdrücke aufsummiert werden sollen.

²⁰**Analyse** $\hat{=}$ Zerlegung einer Sache in ihre einzelnen Bestandteile. Gegenteil: **Synthese** $\hat{=}$ Zusammensetzung einer Sache aus mehreren Einzelteilen.

Hier drei Beispiele zur Schreibweise mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}$$

Weshalb die zweite Summe gerade $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und die unendlich lange Summe über alle natürlichen Potenzen von $\frac{1}{4}$ ausgerechnet $\frac{1}{3}$ ergibt, ist eine Frage, die wir hier nicht beantworten wollen. Dazu wirst du im Thema **Folgen und Reihen** mehr erfahren.

Zurück zur Aufsummierung der einzelnen Sinusschwingungen zur Schalldruckfunktion $p(t)$: Der Laufindex n startet bei $n = 0$ und es gibt keinen Endwert resp. der Endwert ist ∞ , denn im Prinzip gibt es unendlich viele Oberschwingungsfunktionen $p_n(t)$. Wir bilden also eine unendlich lange Summe.

9.3 Die Summenbildung ohne Phasenverschiebungen

Wenn wir annehmen, es gäbe unter den einzelnen Sinusschwingungen $p_n(t)$ keine Phasenverschiebungen ($\varphi_n = 0$), so ist $p_n(t) = A_n \cdot \sin(\omega_n t)$. Jedes dieser $p_n(t)$ wird jeweils beim "Start" einer neuen **Grundperiode** (= Periode von $p_0(t)$) den Wert 0 annehmen, was dann folglich auch für die Summe $p(t)$ gilt. Abb. 38 zeigt dazu ein Beispiel.

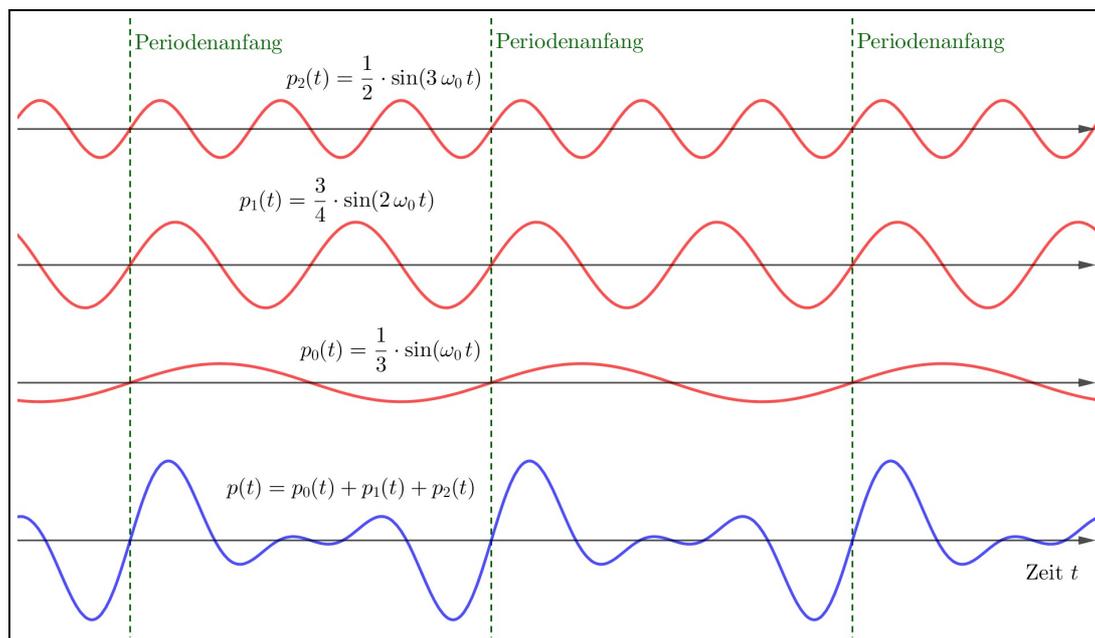


Abbildung 38: Klangsynthese ohne Phasenverschiebung. Zu sehen sind eine Grundschwingung $p_0(t)$, sowie eine 1. und eine 2. Oberschwingung $p_1(t)$ und $p_2(t)$. Sie haben verschiedene Amplituden und werden unten zum Schalldruckmuster $p(t)$ aufsummiert. Da $p_0(t)$, $p_1(t)$ und $p_2(t)$ relativ zueinander nicht phasenverschoben sind, stechen alle gleichzeitig, nämlich jeweils zu Beginn einer Grundperiode durch die Nullachse, was folglich auch für ihre Summe $p(t)$ gilt. Ausserdem weist $p(t)$ gleich hinter diesem Nulldurchgang zu Beginn der Grundperiode einen hohen Ausschlag auf, denn $p_0(t)$, $p_1(t)$ und $p_2(t)$ steigen beim Nulldurchgang ja alle an.

9.4 Der reale Fall: Die Summe mit Phasenverschiebungen

In der Realität besteht das Schalldruckmuster $p(t)$ eines Tones aus zueinander phasenverschobenen Sinusfunktionen $p_n(t)$. Diese Eigenschaft beeinflusst unseren Höreindruck des Tones allerdings kaum, denn in unserem Ohr wird im Wesentlichen eine Frequenzanalyse vorgenommen, bei der die Phasenverschiebungen keine Rolle spielen. Unser Gehör registriert, wie stark die Amplituden A_n der in einem Ton enthaltenen Einzelschwingungen sind, aber die Phasen φ_n werden nicht ermittelt.

Zur korrekten mathematischen Beschreibung der Schalldruckfunktion $p(t)$ sind diese Phasen aber sicher notwendig. Dabei haben wir nach wie vor die Freiheit den zeitlichen Nullpunkt nach unserem Belieben zu setzen. Wir dürfen daher die Phase einer Schwingung auf Null setzen. Typischerweise wählen wir dafür die Grundschwingung: $\varphi_0 = 0$.

Um den kleinen Unterschied zwischen dem Fall ohne und dem Fall mit Phasenverschiebung zu demonstrieren, nehme ich in Abb. 39 die gleichen Amplituden wie in Abb. 38, baue aber bei der 1. und der 2. Oberschwingung je eine Phase ein. Auch wenn die beiden Schalldruckkurven nun offensichtlich nicht mehr ganz dieselben sind, darf man feststellen, dass ihre Formen gar nicht so verschieden ausschauen. Und effektiv würden sich diese beiden Schalldruckmuster gleich anhören!

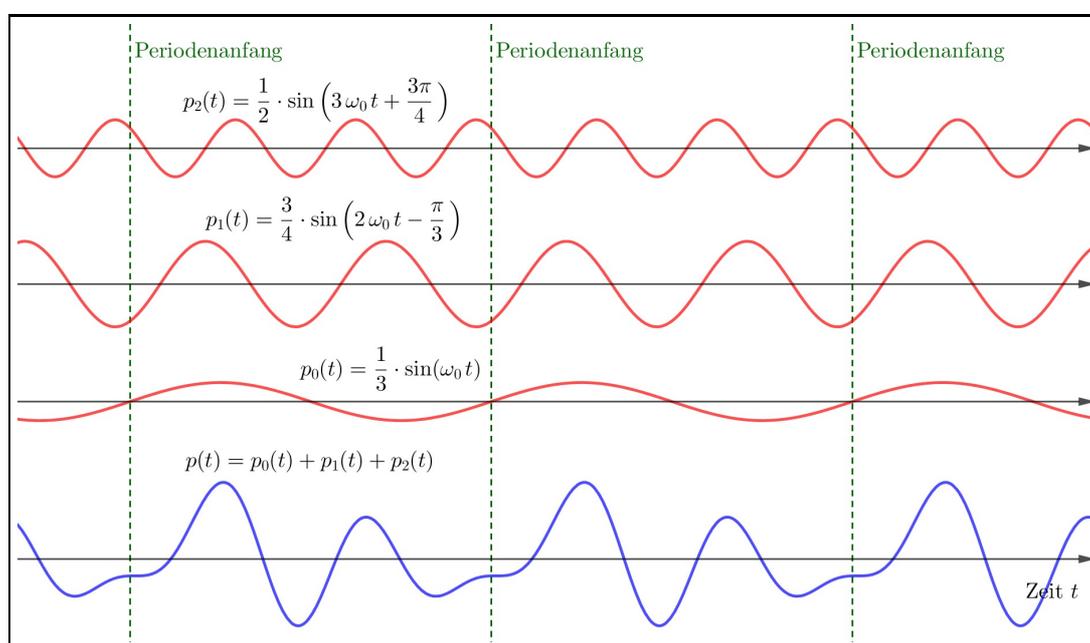


Abbildung 39: Klangsynthese mit Phasenverschiebung. $p_1(t)$ und $p_2(t)$ sind gegenüber $p_0(t)$ um $\frac{\pi}{3}$ resp. um $-\frac{3\pi}{4}$ phasenverschoben. Dadurch verläuft nun das Schalldruckmuster $p(t)$ beim Anfang der Grundperiode nicht mehr durch die Nullachse. Ausserdem wurde die Punktsymmetrie gebrochen, die bei der Schalldruckkurve in Abb. 38 noch zu entdecken war.

9.5 Kurzzusammenfassung – die Mathematik eines einzelnen Tons

Das Schalldruckmuster eines Tones mit bestimmter Tonhöhe und Klangfarbe wird mathematisch beschrieben durch eine Summe von Sinusschwingungen mit aufeinander abgestimmten Frequenzen:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \sin(\omega_n t - \varphi_n) \\
 &= A_0 \cdot \sin(\omega_0 t - \varphi_0) + A_1 \cdot \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t - \varphi_2) + \dots
 \end{aligned}$$

wobei: $\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \cdot (n + 1) \cdot f_0$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$

10 Die Envelope am Beispiel des gedämpften Federpendels

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir gesehen, dass die **Addition von Funktionen** bedeutsam sein kann. Das komplizierte Schalldruckmuster $p(t)$ eines Tones hat sich als Summe einzelner, wohl aufeinander abgestimmter Sinusfunktionen $p_n(t)$ herausgestellt. Bald werden wir weitere Situationen kennenlernen, in denen wir akustische Phänomene durch die Aufsummierung von Sinusfunktionen besser verstehen können.

In diesem Kapitel werden wir uns nun aber zuerst mit der **Multiplikation von Funktionen** beschäftigen. Dass wir auch damit neue Erkenntnisse über und Möglichkeiten zur Beschreibung von realen Phänomenen erhalten, wird sich sehr rasch zeigen. Unser Anschauungsbeispiel dazu wird das **gedämpfte Federpendel** sein, also das reale Federpendel, das aufgrund eines Dämpfungseffektes (Reibung resp. Luftwiderstand) nach und nach immer weniger stark ausschlägt und schliesslich zur Ruhe kommt.

10.1 Allgemeines zur Multiplikation von Funktionen

Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ können miteinander multipliziert werden und so eine neue Funktion

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (27)$$

bilden. Natürlich sind die Eigenschaften von $h(x)$ von den Eigenschaften von $f(x)$ und $g(x)$ abhängig. Dazu wollen wir an dieser Stelle ein paar wenige Aussagen machen.

Bemerkung vorneweg: Miteinander multiplizierte Funktionen sind in der höheren Mathematik und in der Naturwissenschaft ganz alltäglich. Das trifft für uns momentan noch nicht zu, denn wir sind in der Mathematik bis dato damit beschäftigt, die verschiedenen elementaren Funktionstypen einzeln kennenzulernen: die lineare Funktion, die quadratischen Funktionen, die Wurzelfunktion, die Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion, die Sinusfunktion, etc.

Aussagen über die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

- $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ bedeutet, an jeder Stelle x werden die Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ im Prinzip zuerst separat berechnet und erst danach miteinander multipliziert.
- Der **Definitionsbereich** von h ist die Schnittmenge der Definitionsbereiche von f und g :

$$\mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$$

Klar: In $h(x)$ darf ich nur ein x einsetzen, das sowohl in $f(x)$, als auch in $g(x)$ eingesetzt werden kann.

Beispiel: Es seien $f(x) = \sqrt{1+x}$ und $g(x) = \sqrt{1-x}$. Dann sind $\mathbb{D}_f = [-1; +\infty[$ und $\mathbb{D}_g =]-\infty; 1]$. Die Schnittmenge davon und somit der Definitionsbereich von $h(x)$ ist das Intervall $\mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g = [-1; 1]$.

Abb. 40 zeigt die zugehörigen Graphen. Derjenige von $f(x)$ ist eine nach rechts geöffnete Wurzelfunktion, die links nur bis $x = -1$ definiert ist, derjenige von $g(x)$ ist das nach links geöffnete Gegenstück. Das Produkt von f und g ist folglich nur auf $[-1; 1]$ definiert und als Graph ergibt sich interessanterweise ein Halbkreis. Das können wir sogar verstehen, denn:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{(1+x)(1-x)} = \sqrt{1-x^2}$$

Das ist genau die Funktion für den Halbkreis mit Radius 1, denn aus der Gleichung für den Einheitskreis können wir ableiten:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$h(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist die positive Variante dieser Gleichung.

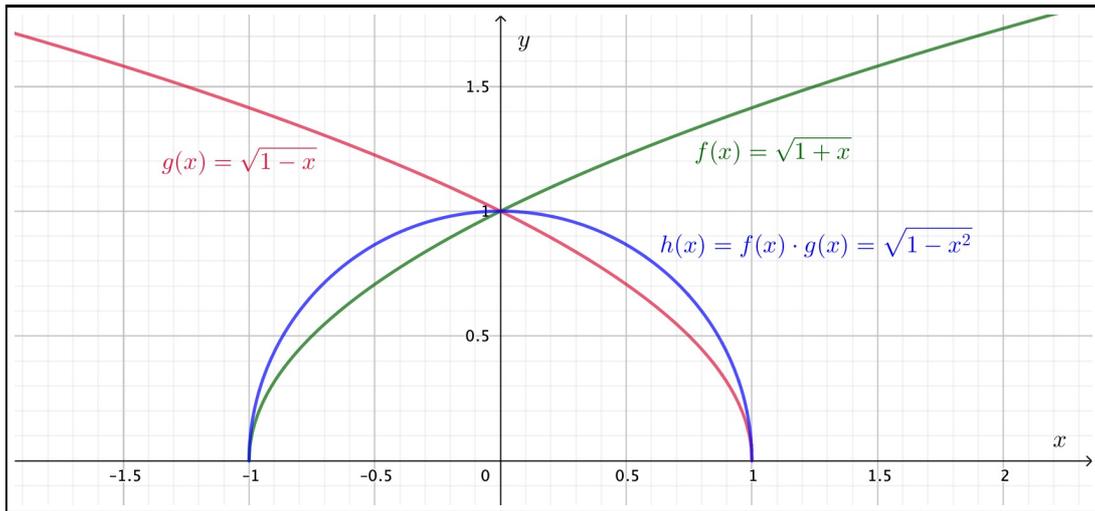


Abbildung 40: Die Multiplikation einer nach links und einer nach rechts geöffneten Wurzelfunktion hat einen stark eingeschränkten Definitionsbereich. Als Funktionsgraph ergibt sich ein Halbkreis.

- Das Produkt zweier symmetrischer Funktionen hat auch eine **Symmetrie!**

Zur Erinnerung: Sogenannt **gerade** Funktionen (g) sind **achsensymmetrisch** bezüglich der y -Achse, **ungerade** Funktionen (u) sind **punktsymmetrisch** bezüglich des Ursprungs $(0, 0)$.

Für die Multiplikation zweier Funktionen gilt nun:

•	g	u
g	→ g	→ u
u	→ u	→ g

Beispiel: Ich multipliziere die ungerade Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ mit der geraden Cosinusfunktion $g(x) = \cos(2x)$. Die daraus resultierende Funktion $h(x) = \sin x \cdot \cos(2x)$ ist immer noch ungerade, wie wir in Abb. 41 gut erkennen können.

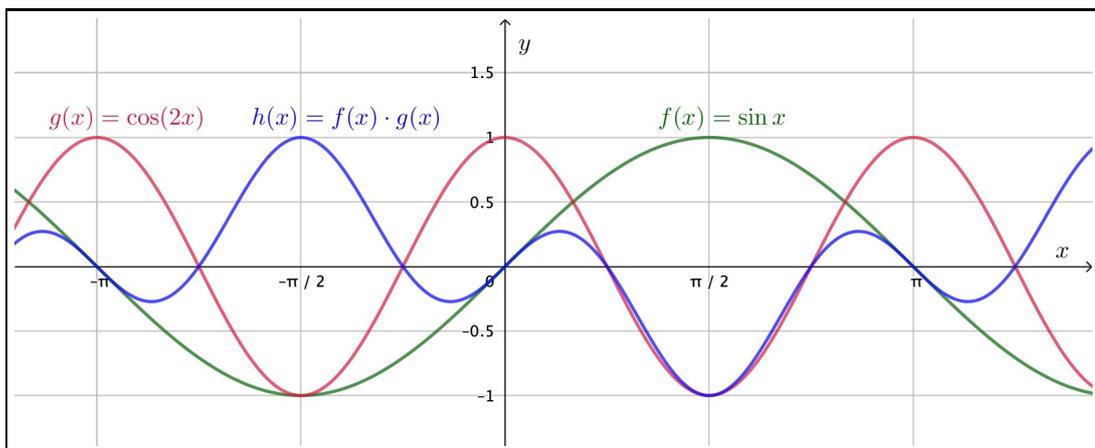


Abbildung 41: Die Multiplikation der punktsymmetrischen Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ mit der achsensymmetrischen Cosinusfunktion $g(x) = \cos(2x)$ ergibt eine punktsymmetrische Funktion $h(x)$.

10.2 Das gedämpfte Federpendel

Kehren wir zum Federpendel zurück. Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, darf man den Luftwiderstand resp. die Reibung über kurze Zeiträume hinweg ohne grossen Fehler vernachlässigen. Das hat zur Folge, dass die Schwingung des Pendels extrem genau einer Sinusfunktion mit gleich bleibender Amplitude folgt. Wir bezeichnen dies als **ungedämpfte Schwingung**.

Natürlich wissen wir alle, dass diese Schwingung über längere Zeiträume hinweg geringer wird. Die Amplitude der Pendelschwingung nimmt ab und irgendwann – erst nach ziemlich langer Zeit! – ruht das Pendel in seiner mittleren Lage. In der Realität führt unser Pendel also eine **gedämpfte Schwingung** aus. Dafür sorgt vor allem der Luftwiderstand.

Abb. 42 zeigt eine Langzeitmessung mit unserem Federpendel. Wir sehen den Rückgang der Amplitude und stellen sofort fest, dass er nicht linear erfolgt! Vielmehr schreitet die Abnahme der Amplitude anfänglich schneller voran. Bemerkenswert ist aber auch, dass das Pendel trotz Abnahme der Amplitude offenbar stets mit der gleichen Frequenz f schwingt. Der Takt des Pendels bleibt trotz Verringerung der Ausschlagsstärke der gleiche.

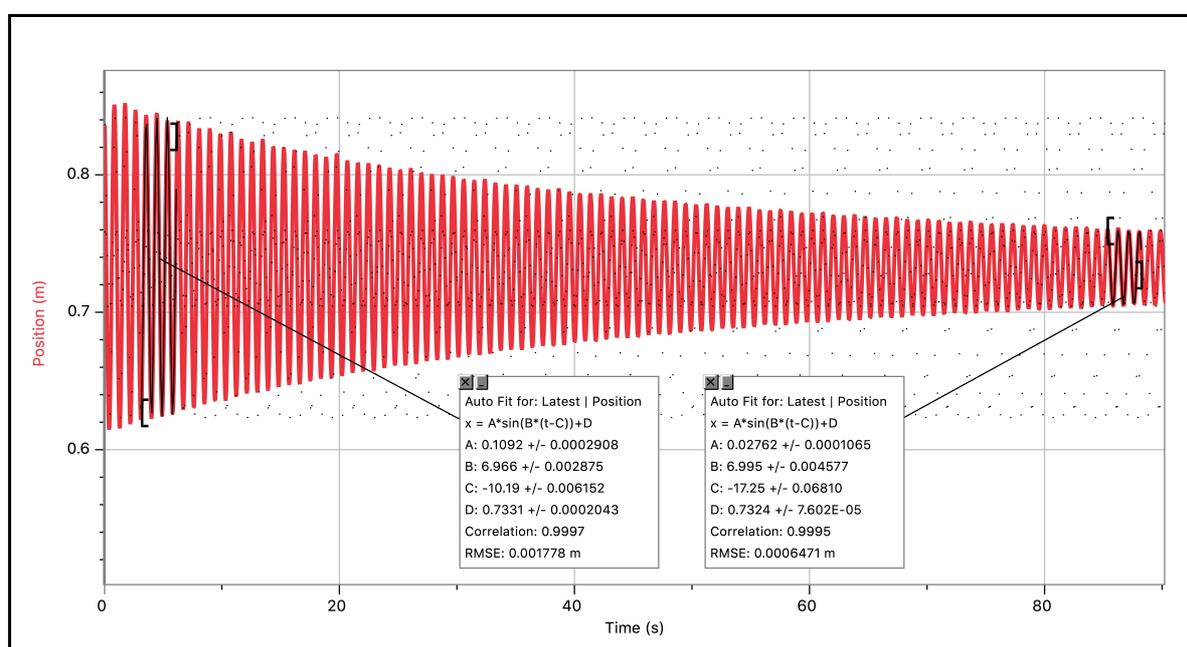


Abbildung 42: Trotz des Amplitudenrückgang während der Schwingung des gedämpften Pendels bleibt die Schwingungsfrequenz gleich, was an den in etwa identischen B -Werten in den beiden Messbereichen erkennbar ist ($\omega = B \approx 7.0 \frac{1}{s} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1.1 \text{ Hz}$).

Wie kann die Abnahme der Pendelschwingung mathematisch korrekt beschrieben werden? Die entscheidende Idee ist, dass die Schwingungsamplitude A selber als Funktion der Zeit t aufgefasst werden muss. Wir sprechen von einer **zeitabhängigen Amplitude** $A(t)$. Für die Pendelschwingung schreiben wir damit:

$$f(t) = A(t) \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi f \quad (28)$$

Wir bemerken, dass hier zwei von der Zeit t abhängige Funktionen miteinander multipliziert werden: $A(t)$ und $\sin(\omega t)$. Das gedämpfte Pendel ist also ein gutes Anschauungsbeispiel für die Multiplikation zweier Funktionen.

Weiter überlegen wir uns, dass $\sin(\omega t)$ maximal den Wert 1 annimmt. Das bedeutet, dass $A(t)$ in Abb. 42 den oberen Rand der Sinusschwingung vorgibt – gerechnet ab der Mittellage.

Die Amplitudenfunktion des gedämpften Federpendels

Nun drängt sich die Frage auf, um was für eine Funktion es sich denn bei $A(t)$ handeln könnte. Mit etwas mathematischer Intuition kommt man bald auf die Idee einer **abnehmenden Exponentialfunktion** – sofern man mit diesem Funktionstyp bereits vertraut ist. Dafür sprechen insbesondere zwei Überlegungen:

- Die Amplitudenfunktion $A(t)$ strebt mit fortschreitender Zeit gegen den Endwert 0, denn die Schwingung wird ja immer kleiner. Die t -Achse ist also eine **Asymptote** unserer Schwingungsfunktion $f(t)$. Eine solche horizontale Asymptote ist aber eben ganz charakteristisch für eine exponentielle Abnahme.
- Die Abnahme ist zu Beginn am schnellsten und wird dann immer langsamer. Beim realen Pendel können wir dieses Verhalten sehr gut nachvollziehen. Schliesslich erfolgt die Dämpfung vor allem durch den Luftwiderstand. Dieser ist umso grösser, je grösser die Geschwindigkeit des Pendels ist. Bei grösserer Amplitude ist das Pendel aber eben auch mit grösserer Geschwindigkeit unterwegs. D.h., die Abnahme der Pendelschwingung aufgrund des Luftwiderstandes erfolgt bei grösserer Amplitude eben schneller.

Eine exakte Exponentialfunktion ergibt sich immer dann, wenn die Veränderung Δf einer Grösse f pro Zeitabschnitt Δt proportional zum aktuellen Wert von f ist. So oder zumindest so ähnlich dürfte das bei unserem gedämpften Federpendel sein. Deshalb ist die Annahme einer exponentiellen Abnahme recht gut.

Für eine abnehmende Exponentialfunktion setzen wir beispielsweise an:²¹

$$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad (29)$$

Dabei treten mit A_0 und $T_{1/2}$ zwei neue Parameter auf:

- A_0 steht für den **Anfangswert** der Amplitude. Im Beispiel von Abb. 42 können wir für die doppelte Anfangsamplitude ungefähr einen Wert von $0.86 \text{ m} - 0.61 \text{ m} = 0.25 \text{ m}$ ablesen. D.h. die Startamplitude dieser Messung betrug etwa $A_0 \approx \frac{0.25 \text{ m}}{2} = 0.125 \text{ m} = 12.5 \text{ cm}$.
- Mit der Basis $\frac{1}{2}$ in der Exponentialfunktion wird $T_{1/2}$ zur sogenannten **Halbwertszeit**. Damit meint man die Zeitspanne, in der sich der Wert der Amplitude jeweils halbiert. Im Beispiel von Abb. 42 finden wir dafür ungefähr $T_{1/2} \approx 30 \text{ s}$.

Im Exponenten steht mit $\frac{t}{T_{1/2}}$ der Bruch, der uns angibt, wie oft die Halbwertszeit $T_{1/2}$ in der Zeit t enthalten ist.²²

Nehmen wir z.B. $t = 75 \text{ s}$, so ergibt $\frac{t}{T_{1/2}}$ den Wert 2.5. D.h., in 75 s verstreichen zweieinhalb Halbwertszeiten, woraus folgt, dass unsere Amplitude in 75 s zweieinhalb mal halbiert wird – der Faktor $\frac{1}{2}$ wird bis zum Zeitpunkt $t = 75 \text{ s}$ zweieinhalb mal auf die Anfangsamplitude A_0 angewendet. Genau dafür sorgt der Exponent $\frac{t}{T_{1/2}} = 2.5$.

²¹ **Bemerkung:** Exponentialfunktionen heissen so, weil die Variable im Exponenten einer Potenz auftritt!

²² $\frac{35}{7}$ sagt uns, wie oft 7 in 35 enthalten ist, nämlich fünfmal. Entsprechend sagt uns $\frac{t}{T_{1/2}}$, wie oft die Halbwertszeit $T_{1/2}$ in der Zeit t enthalten ist. "Wie oft ist etwas in etwas anderem enthalten?" ist die Grundfrage, die durch die Division beantwortet wird.

10.3 Gesamte Schwingungsfunktion $f(t)$ des Federpendels und Envelope $A(t)$

Nun können wir alles zusammensetzen und erhalten für das gedämpfte Federpendel die Funktion:

$$f(t) = A_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}}_{= A(t)} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega = 2\pi f \quad (30)$$

Abb. 43 zeigt diese Funktion in GeoGebra, wobei ich $A_0 = 12.5 \text{ cm}$, $T_{1/2} = 30 \text{ s}$ und $f = 1.1 \text{ Hz}$ resp. $\omega = 7.0 \frac{1}{2}$ gesetzt habe. Sie entspricht sehr gut unserer Versuchsaufzeichnung in Abb. 42. Der Unterschied besteht vor allem darin, dass die mittlere Höhe nun auf Null liegt.

Extra zusätzlich eingetragen habe ich den Verlauf der zeitabhängigen Amplitudenfunktion $A(t)$. Sie bildet den oberen Rand der Sinusschwingung. Zeichne ich gleichzeitig auch noch $-A(t)$, also den unteren Rand, ein, so wird klar, weshalb die zeitabhängige Amplitude $A(t)$ auch als **Einhüllende (Kurve)**, **Hüllkurve** oder **Envelope** bezeichnet wird. Ihr Graph hüllt die Sinusschwingung ein.

Solche einhüllenden Kurven werden wir noch mehrmals antreffen. In der Akustik stehen sie z.B. oft für die Lautstärkeentwicklung eines Tons.

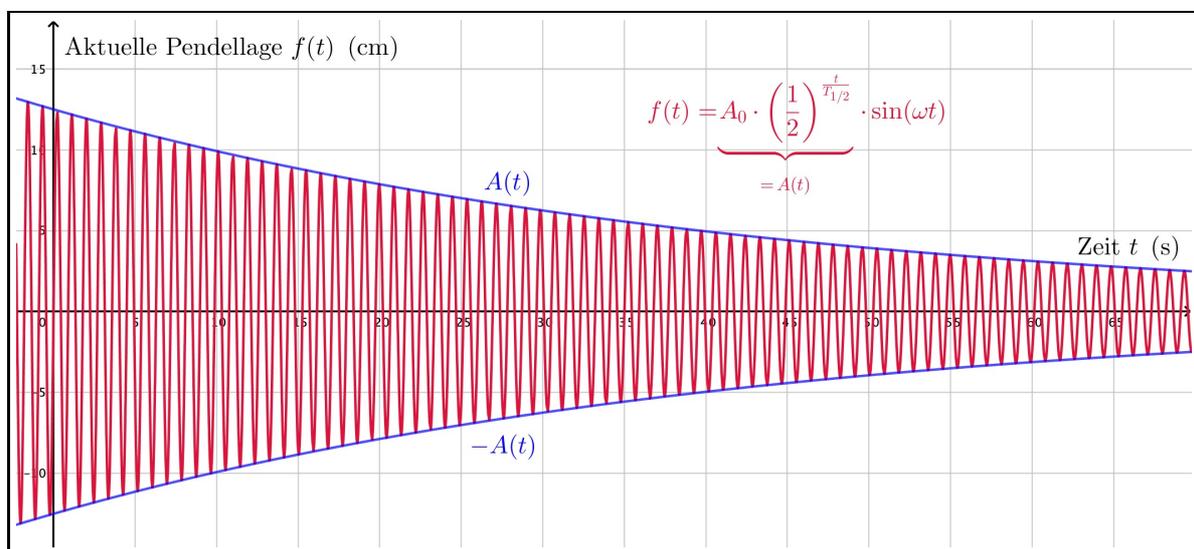


Abbildung 43: Der Schwingungsrückgang des gedämpften Pendels in GeoGebra. Zusätzlich eingetragen ist der Graph der zeitabhängigen Amplitudenfunktion $A(t)$, also die einhüllende Kurve der Pendelschwingung, inkl. ihrem Negativen.

11 Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Manche akustische Phänomene lassen sich offenbar durch Aufaddierung mehrerer Sinusschwingungen verstehen. So haben wir z.B. in den Kapiteln 8 und 9 verstanden, dass sich das Schalldruckmuster $p(t)$ eines Tones aus der Summe über mehrere sinusartige Schalldruckschwankungen $p_n(t)$ mit wohl aufeinander abgestimmten Frequenzen f_n ergibt. In den folgenden Kapiteln werden wir weitere Phänomene kennenlernen, deren Erklärung jeweils auf der Addition mehrerer Sinusfunktionen beruht. Dazu gehören z.B. **Schwebungen**, aber auch **stehende Wellen** auf eingespannten Saiten.

Zunächst benötigen wir allerdings nochmals einen trigonometrischen Input. Es geht um die sogenannten **Additionstheoreme** für die Sinus- und die Cosinusfunktion. Erst mit Hilfe dieser Additionstheoreme wird es uns möglich sein die oben genannten Phänomene in den weiteren Kapiteln zufriedenstellend, also auch mathematisch wirklich gut zu verstehen und zu erklären.

Dieses Kapitel ist relativ kurz. Es beschränkt sich darauf die Additionstheoreme vorzustellen und ihre Verwendung an ein paar Beispielen zu demonstrieren. Die Herleitung der Additionstheoreme verlege ich in den separaten Anhang A, denn sie ist mit der uns momentan zur Verfügung stehenden Mathematik ein wenig umständlich und derzeit nicht sonderlich Gewinn bringend.²³

11.1 Vorstellung der Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

Ich beginne gleich mit dem Merkkasten. Wer mathematisch etwas auf sich hält, kann die hier vorgestellten Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln **auswendig!**

Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Unter den **Additionstheoremen** für die Sinus- und die Cosinusfunktion versteht man die folgenden vier Gleichungen, die für beliebige Winkel α und β gültig sind:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Aussage: Sinus/Cosinus einer Summe oder Differenz zweier Winkel α und β können stets auf eine Kombination aus Sinus und Cosinus von α und β selber zurückgeführt werden!

Oftmals werden diese vier Additionstheoreme mit den Zeichen \pm und \mp zu zwei lediglich Gleichungen zusammengefasst. In der Notation mit Winkeln im Bogenmass, für welche die Additionstheoreme natürlich in gleicher Weise gelten, sieht das folgendermassen aus:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Die Doppelwinkelformeln für Sinus und Cosinus

Aus den Additionstheoremen lassen sich sofort die beiden **Doppelwinkelformeln** für Sinus und Cosinus ableiten. Sie gelten wiederum für beliebige Winkel α (resp. x):

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

²³Wenn wir uns irgendwann in der 4. Klasse, z.B. im physikalischen Ergänzungsfach, ein paar "elegantere" mathematische Methoden erarbeitet haben werden – dabei wären z.B. die **Matrizenrechnung** oder die **komplexen Zahlen** zu nennen – ergeben sich diese Additionstheoreme fast wie von selbst. Die Herleitung wird quasi zum Einzeiler.

11.3 Doppelwinkelformeln – Herleitungen, etc.

Zur Abwechslung benutze ich in diesem Abschnitt mal wieder die Winkelbezeichnungen x und y für Winkel im Bogenmass. Aber natürlich gelten alle Aussagen auch für Winkel α und β im Gradmass.

Oftmals von Nutzen sind die einfacheren Gleichungen, die sich aus den Additionstheoremen für den Fall $y = x$ ergeben. Es ist dann $x + y = 2x$, weshalb man diese neuen Gleichungen als **Doppelwinkelformeln** für Sinus und Cosinus bezeichnet. Rasch leiten wir her:

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Die Formel für den Cosinus lässt sich unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{resp.} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{resp.} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

in zwei manchmal praktischere Varianten umformen:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\text{oder: } \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \cos^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Damit wird aber klar, dass die Funktionen $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ als modifizierte Sinus- resp. Cosinusfunktionen aufgefasst werden können – eine Erkenntnis, die uns später in anderen Bereichen der Mathematik punktuell sehr nützlich sein wird! Betrachten wir zunächst $\sin^2 x$:

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

Nun ist eine negative Cosinusfunktion dasselbe wie eine um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts phasenverschobene Sinusfunktion: $-\cos y = \sin(y - \frac{\pi}{2})$. Daraus folgt aus dem Ausdruck oben:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin^2 x$ ist also eine modifizierte Sinusfunktion mit Parametern $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $D = \frac{1}{2}$.

Ganz analog finden wir für $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ sind "doppelt so schnelle Sinuskurven" ($B = 2$), wie Abb. 45 zeigt.

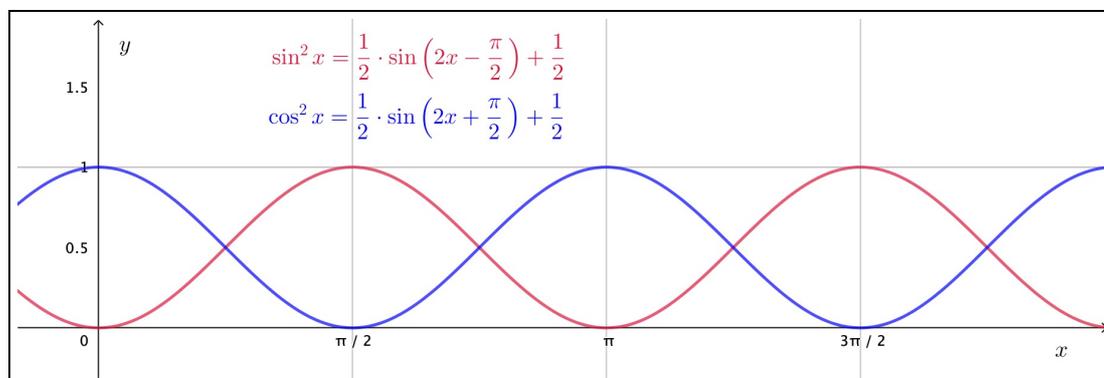


Abbildung 45: Die Graphen von $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ – nichts anderes als modifizierte Sinuskurven.

12 Schwebungen – ein erstes Interferenzphänomen

Abb. 46 zeigt folgenden Versuch: Zwei Lautsprecher erzeugen je einen Sinuston, wobei ihre Frequenzen so nahe beieinander liegen, dass wir zwischen den beiden Tonhöhen beim einzelnen Anhören der Töne nur einen minimalen Unterschied bemerken – z.B. $f_1 = 146 \text{ Hz}$ und $f_2 = 154 \text{ Hz}$.

Tönt es aus beiden Lautsprechern gleichzeitig, so erleben wir eine Überraschung! Anstatt der beiden separaten Töne nehmen wir nun einen rasch an- und abschwellenden Summton (“Wah-Wah“-Effekt) wahr, dessen Tonhöhe resp. Frequenz zwischen den beiden Einzeltönen zu liegen scheint. Dieses akustische Phänomen bezeichnet man als **Schwebung**. In diesem Kapitel wollen wir mathematisch verstehen, wie eine derartige Schwebung entsteht. Mit den Additionstheoremen aus Kapitel 11 ist das gar nicht so schwierig.



Abbildung 46: Das Versuchssetting zur Schwebungsmessung: Zwei Lautsprecher erzeugen je einen Sinuston. Das Mikrofon registriert die Überlagerung beider Wellen.

Mit der Schwebung erleben wir ein erstes Mal, dass bei der Überlagerung von Wellen neue und unerwartete Effekte entstehen können, die wir mit dem Oberbegriff **Interferenz** bezeichnen. Damit meint man die Tatsache, dass sich mehrere Wellen gegenseitig verstärken oder umgekehrt auslöschen können. Die Fachbegriffe hierfür sind die **konstruktive** und die **destruktive Interferenz**. Im Falle der Schwebung wechseln sich konstruktive und destruktive Interferenz der beiden Schallwellen ab, was den “Wah-Wah-Effekt” erzeugt.

Interferenz ist für Wellenphänomene charakteristisch! D.h., wenn ich irgendwo ein Interferenzphänomen beobachte, darf ich daraus schliessen, dass es durch eine Art von Wellen hervorgerufen oder zumindest erklärt werden kann resp. werden muss.

12.1 Der mathematische Ansatz

Wir stellen uns die Frage, welche Gesamtschwingung sich ergibt, wenn sich zwei gleich starke Schwingungsfunktionen $p_1(t)$ und $p_2(t)$ mit unterschiedlichen Frequenzen f_1 und f_2 **überlagern**. Dabei bedeutet der Ausdruck “gleich stark”, dass wir von gleich grossen Amplituden $A = A_1 = A_2$ ausgehen wollen. Es sind also:

$$p_1(t) = A \sin(\omega_1 t) \quad \text{und} \quad p_2(t) = A \sin(\omega_2 t) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = 2\pi f_1 \quad \text{und} \quad \omega_2 = 2\pi f_2$$

Zur Verdeutlichung: $p_1(t)$ und $p_2(t)$ stehen für die beiden Schalldruckschwankungen, die in den Lautsprechern erzeugt und gleichzeitig in unserem Ohr resp. bei einem Mikrofon ankommen.

Die Überlagerung – im Fachjargon: die **Superposition** – entspricht der Summe beider Einzelschwingungen:

$$p_{\text{total}}(t) = p_1(t) + p_2(t) = A \sin(\omega_1 t) + A \sin(\omega_2 t) = A \cdot [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$$

Zur weiteren mathematischen Behandlung dieses Ausdrucks definieren wir als Erstes zwei neue Frequenzwerte, nämlich die **mittlere Frequenz** \bar{f} und die **Frequenzdifferenz** Δf . Dabei wollen wir annehmen, dass $f_2 > f_1$ ist.

$$\bar{f} := \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{und} \quad \Delta f := f_2 - f_1$$

Im Beispiel mit $f_1 = 146 \text{ Hz}$ und $f_2 = 154 \text{ Hz}$ sind $\bar{f} = 150 \text{ Hz}$ und $\Delta f = 8 \text{ Hz}$. Damit lassen sich die beiden ursprünglichen Frequenzen neu schreiben:

$$f_1 = \bar{f} - \frac{\Delta f}{2} \quad \text{und} \quad f_2 = \bar{f} + \frac{\Delta f}{2}$$

Klar: Die tiefere Frequenz f_1 entspricht der mittleren Frequenz \bar{f} abzüglich der halben Frequenzdifferenz $\frac{\Delta f}{2}$ und die höhere Frequenz f_2 entspricht dem Frequenzmittelwert \bar{f} zuzüglich der halben Frequenzdifferenz $\frac{\Delta f}{2}$.

Entsprechend definieren wir eine **mittlere Kreisfrequenz** $\bar{\omega}$ und eine **Kreisfrequenzdifferenz** $\Delta\omega$, mit denen sich dann die beiden Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 neu schreiben lassen:

$$\bar{\omega} := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \Delta\omega := \omega_2 - \omega_1 \quad \text{wobei} \quad \bar{\omega} = 2\pi\bar{f} \quad \text{und} \quad \Delta\omega = 2\pi\Delta f$$

Für die einzelnen Kreisfrequenzen schreiben wir damit:

$$\omega_1 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}$$

Mit diesen Ausdrücken für ω_1 und ω_2 und unter Anwendung der Additionstheoreme können wir nun die Superposition $p_{\text{total}}(t)$ elegant weiterbearbeiten:

$$\begin{aligned} p_{\text{total}}(t) &= p_1(t) + p_2(t) \\ &= A \cdot [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)] \\ &= A \cdot \left[\sin\left(\left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right) \cdot t\right) + \sin\left(\left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right) \cdot t\right) \right] \\ &= A \cdot \left[\sin\left(\bar{\omega} t - \frac{\Delta\omega}{2} t\right) + \sin\left(\bar{\omega} t + \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \right] \\ &= A \cdot \left[\sin(\bar{\omega} t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) - \cos(\bar{\omega} t) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin(\bar{\omega} t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) + \cos(\bar{\omega} t) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \right] \\ &= 2A \cdot \sin(\bar{\omega} t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \end{aligned}$$

Dieses Resultat schreibe ich nochmals neu:

$$p_{\text{total}}(t) = \underbrace{2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)}_{=A(t)} \cdot \sin(\bar{\omega} t) = \underbrace{2A \cos\left(2\pi \frac{\Delta f}{2} t\right)}_{=A(t)} \cdot \sin(2\pi \bar{f} t)$$

Interpretation

- Tatsächlich ist es uns dank der Additionstheoreme für die Sinusfunktion gelungen die ursprüngliche Summe in ein Produkt umzuschreiben. Darin taucht hinten die erwartete Sinusschwingung in Form des Faktors $\sin(2\pi \bar{f} t)$ auf.

Die Gesamtschwingung enthält also tatsächlich die Frequenz \bar{f} , die dem Mittelwert der beiden ursprünglichen Frequenzen f_1 und f_2 entspricht. Diese mittlere Frequenz \bar{f} gibt die Tonhöhe des Schwebungstones vor.

- Allerdings hat die Gesamtschwingung $p_{\text{total}}(t)$ nun eine von der Zeit t abhängige Amplitude $A(t)$ erhalten. Dass dabei eine Cosinusfunktion herausgekommen ist, spielt keine Rolle. Entscheidend ist, dass sich diese zeitabhängige Amplitude mit der Frequenz $\frac{\Delta f}{2}$ verändert.

Liegen die beiden Frequenzen f_1 und f_2 relativ nahe beieinander, so ist Δf klein und die Amplitude verändert sich im Vergleich zur mittleren Frequenz \bar{f} nur sehr langsam. Damit wird $A(t)$ zur einhüllenden Kurve für die rasche Schwingung $\sin(2\pi \bar{f} t)$. D.h., $A(t)$ steuert das lauter und leiser Werden des Sinustones und ist somit verantwortlich für den "Wah-Wah-Effekt"

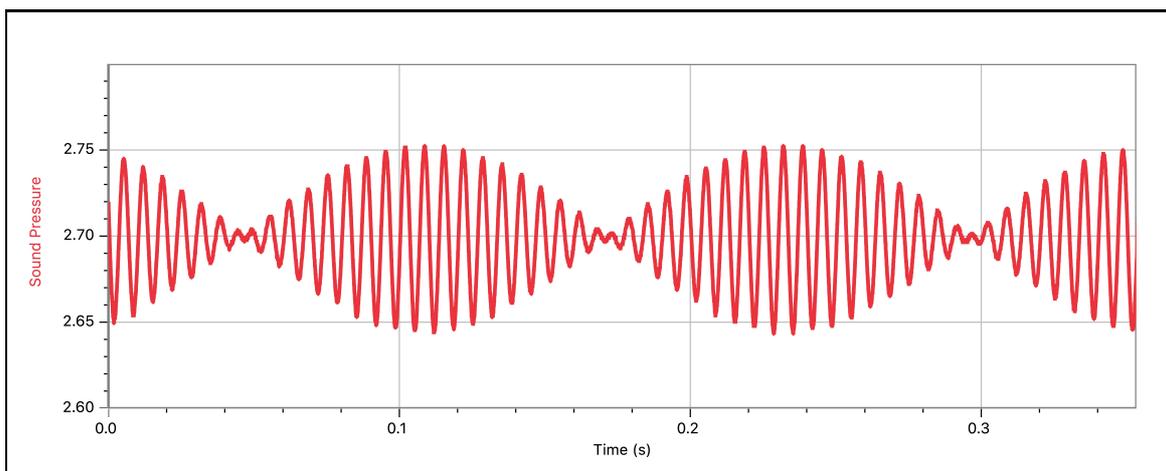


Abbildung 47: Die Messung der Schwebung: Eine schnelle Sinusschwingung wird durch eine selber sinusartige Envelope eingehüllt. Dies entspricht dem an- und abschwelenden Sinuston.

In Abb. 47 sehen wir die reale Messung des Mikrofons. Es ist offensichtlich: Der Schwebungston ist eine in eine Envelope eingehüllte Sinusschwingung. Die einhüllende Funktion entspricht selber einer langsameren Sinusschwingung, deren Frequenz sich gut ablesen lässt: Zwei Bäuche – also eine ganze Periode der Einhüllendenfunktion $A(t)$ – haben eine Länge von 0.25 s. Das ergibt eine Frequenz von 4.0 Hz, was genau unseren Berechnungen entspricht, denn es muss ja $f_{\text{Env}} = \frac{\Delta f}{2}$ sein.

Die **Schwebungsfrequenz**, also die Frequenz des "Wah-Wahs", ist mit 8 Hz aber doppelt so gross wie die Frequenz in $A(t)$, denn bei jedem einzelnen Bauch ist der Ton laut und bei jeder Engstelle ist er leise. Die Schwebungsfrequenz entspricht also genau dem Frequenzunterschied Δf .

Abb. 48 zeigt die mathematische Reproduktion der Schwebung in GeoGebra. Aufsummiert werden ebenfalls zwei Schwingungen $p_1(t)$ und $p_2(t)$ mit $f_1 = 146$ Hz und $f_2 = 154$ Hz, die oberhalb des Schwebungsmusters $p_{\text{total}}(t)$ einzeln gezeigt werden.

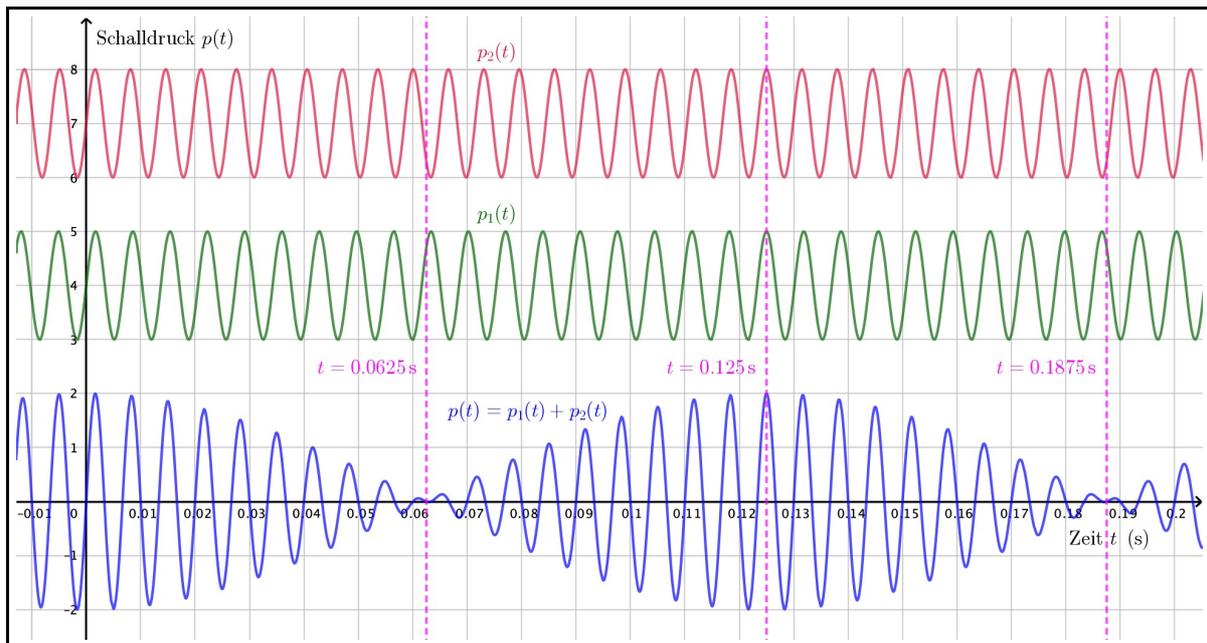


Abbildung 48: Die Simulation der Schwebung mit GeoGebra. Oben die zwei einzelnen Sinusschwingungen $p_1(t)$ und $p_2(t)$. Unten die Summe $p_{\text{total}}(t)$, also das Schalldruckmuster der Schwebung.

12.2 Interferenz – ein Grundphänomen bei der Überlagerung von Wellen

In Abb. 48 sehen wir sehr gut, wie die Schwebung zustande kommt: Bei $t = 0$ schwingen die beiden Funktionen $p_1(t)$ und $p_2(t)$ im Gleichtakt. Sie addieren sich zur doppelten Amplitude der Einzelschwingung. Dieses sich gegenseitig Verstärken bezeichnet man als **konstruktive Interferenz** der beiden Schalldruckschwankungen resp. beim Mikrophon ankommenden Schallwellen.

Da $p_2(t)$ etwas schneller als $p_1(t)$ schwingt, hält der Gleichtakt nicht lange an. 0.0625 s später hat die schnellere Schwingung $p_2(t)$ ein halbe Periode mehr hinter sich gebracht als $p_1(t)$. Dann schwingen die beiden Funktionen gegeneinander. Sie addieren sich zu 0 auf und der Ton ist kurzzeitig nicht mehr hörbar. Dieses sich gegenseitige Auslöschen nennt man **destruktive Interferenz**.

Die Abwechslung zwischen konstruktiver und destruktiver Interferenz werden wir bei wellenartigen Phänomenen immer wieder antreffen. Sie ist ganz charakteristisch für solche Phänomene. Abb. 49 zeigt nochmals die allgemeine Idee.

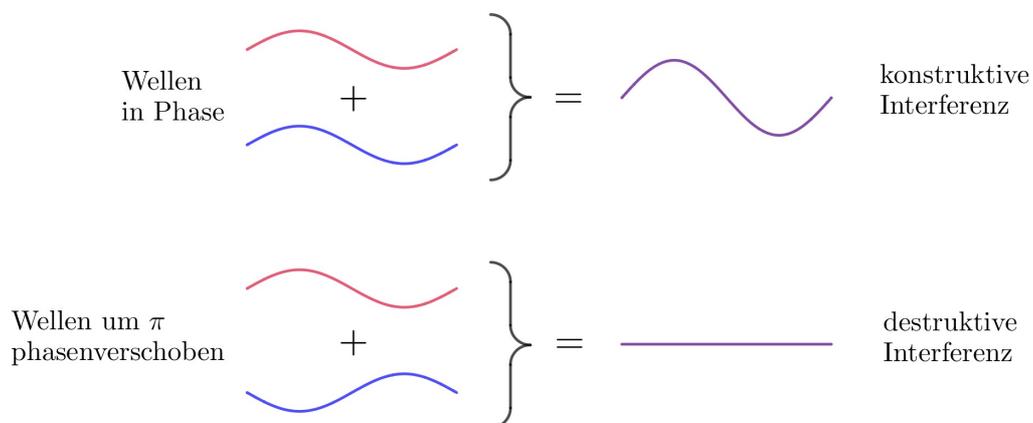


Abbildung 49: Interferenz bei der Superposition von zwei Wellen resp. Schwingungen.

13 Laufende Wellen

Schallwellen bewegen sich durch die Luft, in einem gespannten Seil kann man Wellenberge und -täler laufen lassen, Licht hat offenbar auch etwas mit sich ausbreitenden Wellen zu tun, etc.

In diesem Kapitel soll nun die mathematische Beschreibung einer solchen **laufenden Welle** erfolgen. Mit der **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c , der **Wellenlänge** λ und der **Wellenzahl** k lernen wir dabei drei durchaus greifbare neue Größen kennen.

13.1 Das Ablösen eines einzelnen Wellenberges

Wir denken uns die folgende Situation (vgl. Abb. 50):

- Aus dem obersten Stock eines hohen Hauses lassen wir, am Fenster stehend, ein relativ langes Seil aussen am Haus herunterhängen. Der Einfachheit halber wird es in Abb. 50 allerdings horizontal gezeichnet.
- Führen wir mit der Hand eine kurze seitliche Auslenkung aus, so nimmt das Seil diese in sich auf und leitet sie weiter.
- In der Folge sehen wir, wie sich ein **Wellenberg** im Seil fortpflanzt. Dies macht er mit einer bestimmten **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c .

Bemerkung 1: Alle Arten von Signalen werden im Seil mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c weitergegeben, so auch Wellen. Deshalb spricht man auch von der **Signal-** oder **Wellengeschwindigkeit**. Sie hängt vor allem von der Beschaffenheit des Seils (Dicke, Material) und von dessen Spannung ab, hingegen praktisch überhaupt nicht von der Anregungsfrequenz f .

Bemerkung 2: Nicht das Seil bewegt sich längs der Ausbreitungsrichtung, sondern nur der Wellenberg. Jede Stelle im Seil gibt ihre seitliche Auslenkung an die nächste Stelle weiter.

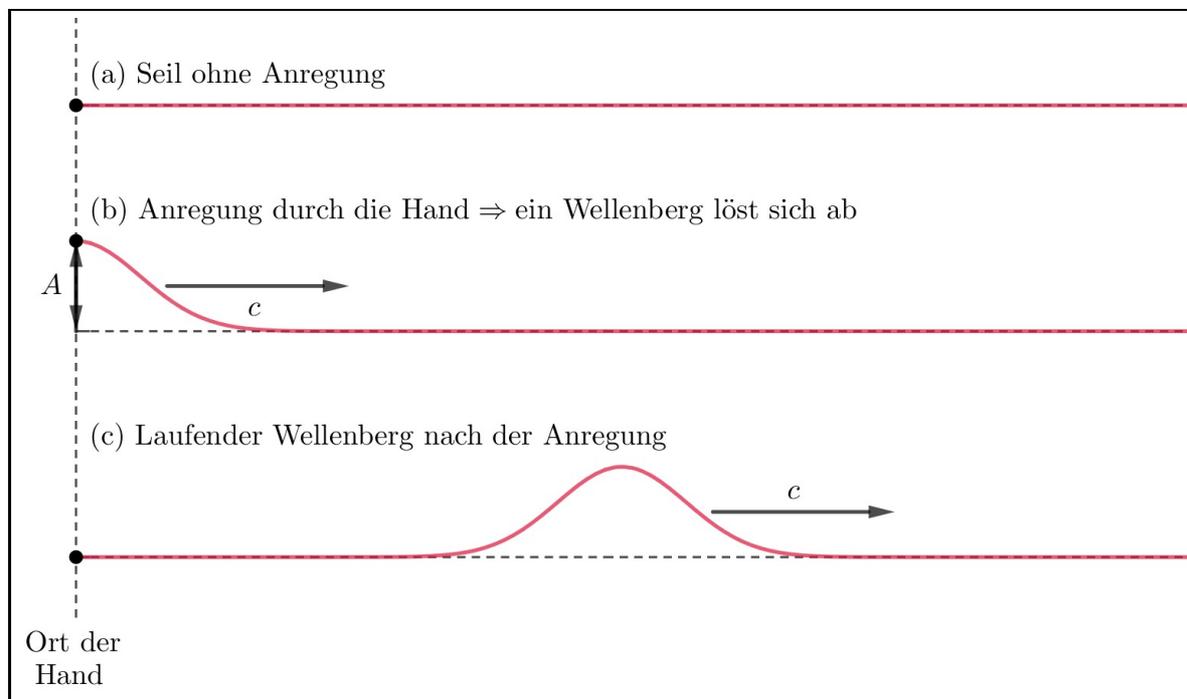


Abbildung 50: Das Loslösen eines Wellenberges vom Ort der Anregung. Ein von der Hand gegebener Impuls wird im Seil mit der Wellengeschwindigkeit c weitergegeben.

13.2 Die Anregung einer laufenden Welle

Natürlich können wir mit der Anregung des Seils fortfahren. Schütteln wir es weiter sinusartig hin und her, so lösen sich ständig Wellenberge und Wellentäler von der Hand ab und es entsteht eine sinusförmige, **laufende Welle** (vgl. Abb. 51). Dabei bezeichnen wir die Distanz zwischen zwei benachbarten Wellenbergen (oder -tälern) als **Wellenlänge** λ .

Pro Periode T der Anregungsschwingung löst sich genau eine Wellenlänge λ von der Hand. Oder anders: Pro Periode T geht die Welle um die Strecke λ vorwärts. Daraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen Wellenlänge λ , Periode T und Ausbreitungsgeschwindigkeit c :

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad \text{resp.} \quad \lambda = c \cdot T \quad (\text{vgl. } s = v \cdot t \text{ bei einer gleichförmigen Bewegung}) \quad (31)$$

Nochmals ganz konkret: Regt die Hand das Seil mit einer langsamen Schwingung an, so ergeben sich grosse Abstände zwischen zwei Wellenbergen. Eine grosse Schwingungsperiode T erzeugt also eine grosse Wellenlänge λ . Umgekehrt erzeugt eine kleine Periode T eine kleine Wellenlänge λ .

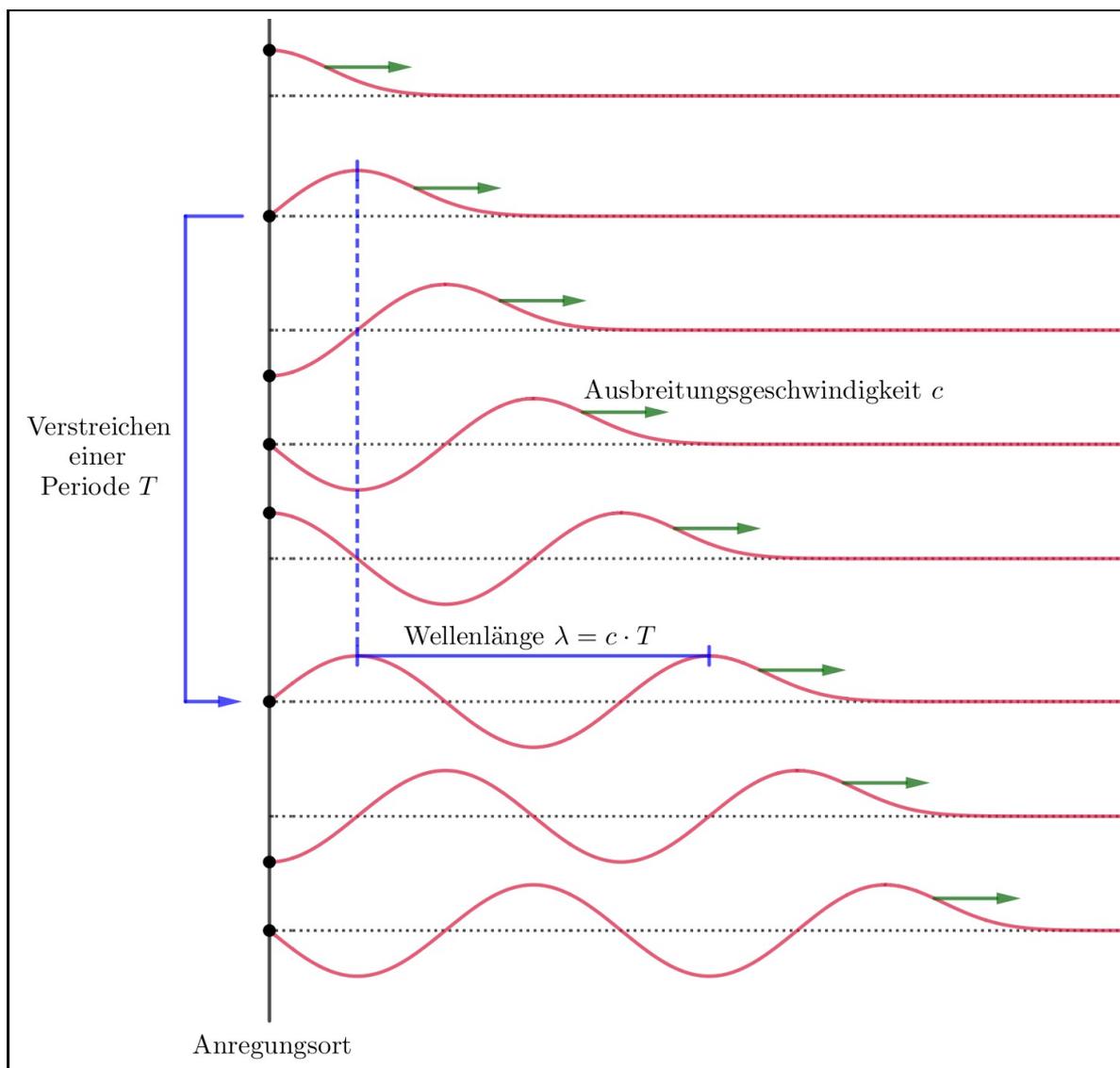


Abbildung 51: Die Anregung einer laufenden Sinuswelle. Pro Periode T der Anregungsschwingung löst sich genau eine Wellenlänge λ ab.

Die Periode T der Anregungsschwingung lässt sich wie immer durch das Inverse ihrer Frequenz f ausdrücken: $T = \frac{1}{f}$. Ersetzen wir damit in der Gleichung (31) ($c = \frac{\lambda}{T}$) die Periode T durch die Frequenz f ($f = \frac{1}{T}$), so erhalten wir die folgende, wichtige Gleichung:

$$c = \lambda \cdot f \quad (32)$$

Dieser rechnerische Zusammenhang gilt für beliebige Arten von Wellen in beliebigen Medien: Das Produkt aus Frequenz und Wellenlänge ist stets gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Das wollen wir uns unbedingt merken!

13.3 Die mathematische Beschreibung der laufenden Welle

Wird das Seil in Abb. 50 von einer Sinusschwingung mit Amplitude A und Frequenz f angeregt, so hat die laufende Welle automatisch die Form einer Sinuskurve. Deren Wellenlänge folgt direkt aus der durch das Seil vorgegebenen Ausbreitungsgeschwindigkeit c :

$$c = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad (33)$$

Rep.: In unseren Betrachtungen zur modifizierten Sinusfunktion im Kapitel 5 haben wir gesehen, dass die Information über die horizontale Streckung im Parameter B enthalten ist. So beschreibt

$$f(x) = A \sin(B(x - C)) \quad \text{mit} \quad B = \frac{2\pi}{P} \quad (34)$$

eine Sinusfunktion mit Amplitude A und Periode P , die zudem um die Strecke C nach rechts verschoben ist.

Achtung! In dieser Formulierung hat die Periode nichts mit einer Zeitspanne zu tun. Wir befinden uns in einem rein mathematischen x - y -Koordinatensystem und die Periode P steht einfach für die horizontale Länge einer einzelnen, ganzen Sinusschwingung (= Distanz von Wellenberg zu Wellenberg).

Bei der Seilwelle in Abb. 50 handelt es sich nun aber bei der horizontalen Achse tatsächlich um eine **Ortsachse**. Sie wird in der Regel auch mit x bezeichnet, steht nun aber wirklich für einen realen Ort – eben eine Stelle x längs des realen Seils – und muss im Prinzip mit der Einheit Meter versehen werden. Dem entsprechend wird die mathematische Periode P bei der Beschreibung einer solchen laufenden Welle zur Wellenlänge λ . Ausserdem erhält der Parameter B einen neuen Namen. Wir bezeichnen ihn als **Wellenzahl** k . Damit schreiben wir für eine um die Strecke C nach rechts verschobene Welle:

$$h(x) = A \sin(k(x - C)) \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (35)$$

Wofür steht die Wellenzahl k ? Gegeben ist sie ja durch $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. In Worten: “ 2π pro Wellenlänge” oder eben “eine Runde auf dem Einheitskreis pro eine bestimmte Strecke λ ”. Ihre Einheit muss die Dimension “Zahl durch Länge” aufweisen. Sie muss also $\frac{1}{\text{m}}$ lauten. Würden wir beim Winkel 2π zudem die Hilfseinheit rad notieren, so wäre die k -Einheit $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$. Dies mag hier für das Verständnis von k effektiv hilfreich sein, wie wir uns an einem Beispiel überlegen wollen.

Beispiel: Beträgt z.B. die Wellenlänge unserer Seilwelle $\lambda = 0.5 \text{ m}$, so beträgt die Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{0.5 \text{ m}} = 4\pi \frac{1}{\text{m}}$ resp. $k = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$. Das bedeutet: “Pro Meter Seillänge wird im Einheitskreis ein Winkel von 4π (rad) abgefahren.” Das entspricht zwei vollen Umdrehungen im Einheitskreis und somit eben zwei vollen Wellenlängen pro Meter.

Die Wellenzahl k steht also für die pro Meter abgefahrte Bogenlänge auf dem Einheitskreis.

Zurück zur Beschreibung der laufenden Welle: Soll die Welle mit der konstanten Geschwindigkeit c nach rechts laufen, so müssen wir dafür die Rechtsverschiebung C gleichförmig mit der Zeit t anwachsen lassen. D.h., wir schreiben für C einfach $C = c \cdot t$,²⁴ sodass folgt:

$$h(x, t) = A \sin(k(x - ct)) \quad (36)$$

Beachte: $h(x, t)$ ist nun eine Funktion, die vom Konzept her von zwei Variablen abhängig ist. Jeder Stelle x auf dem Seil wird zu jedem Zeitpunkt t eine Auslenkung $h(x, t)$ zugeordnet.

Die Funktion $h(x, t)$ kann nach ein paar Umformungen unter Verwendung der Beziehungen $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $c = \lambda f$ und $\omega = 2\pi f$ noch etwas einfacher notiert werden:

$$\begin{aligned} h(x, t) &= A \sin(k(x - ct)) && | \text{ausmultiplizieren} \\ &= A \sin(kx - kct) && | k = \frac{2\pi}{\lambda}, c = \lambda f \\ &= A \sin(kx - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \lambda f \cdot t) && | \lambda \text{ kürzen} \\ &= A \sin(kx - 2\pi f t) && | \omega = 2\pi f \\ &= A \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Damit haben wir die Beschreibung der nach rechts laufenden Sinuswelle kompakt beieinander. Die nach links laufende Welle unterscheidet sich davon nur im Vorzeichen von ωt , denn für die Geschwindigkeit würden wir einfach den negativen Wert $-c$ einsetzen. Halten wir fest:

Sinusfunktionen für laufende Wellen

Auf der x -Achse (= Ortsachse längs der Ausbreitungsrichtung der Welle) **nach rechts resp. nach links laufenden Sinuswellen** werden beschrieben durch die Funktionen:

$$h_{\rightarrow}(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{resp.} \quad h_{\leftarrow}(x, t) = A \sin(kx + \omega t) \quad (37)$$

Diese Funktionen hängen von den beiden Variablen x und t ab: Sie weisen jeder Stelle x auf der x -Achse zu jedem Zeitpunkt t eine Auslenkung $h_{\rightarrow}(x, t)$ resp. $h_{\leftarrow}(x, t)$ zu.

Die in den Funktionsgleichungen enthaltenen Parameter sind:

$A =$ **Amplitude** = maximale Auslenkung der Welle

$k = \frac{2\pi}{\lambda} =$ **Wellenzahl** = Winkel (im Bogenmass) pro Meter

$\lambda =$ **Wellenlänge** = Distanz vom einen zum nächsten Wellenberg

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} =$ **Kreisfrequenz** = Winkel (im Bogenmass) pro Sekunde

$f = \frac{1}{T} =$ **Frequenz** der Anregung

$T = \frac{1}{f} =$ **Periode** der Anregung

Weiter gilt, wie für jede Art von Welle, die folgende Beziehung für die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c innerhalb des Mediums:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

²⁴Dies ist die Bewegungsgleichung für die nach der Zeit t zurückgelegte Strecke bei einer gleichförmigen Bewegung, $s = v \cdot t$, nur dass die Geschwindigkeit jetzt mit c und der Ort mit C notiert wurde.

14 Stehende Wellen

Im Kapitel 13 hatten wir die in einem Seil laufenden Wellen beobachtet, wenn dieses am einen Ende angeregt wird und in die andere Richtung quasi unendlich lange ist. Bei Saiteninstrumenten ist die eingespannte Saite mit einem Seil vergleichbar. Allerdings ist sie auf beiden Seiten eingespannt. Dies führt dazu, dass eine in der Saite laufende Welle jeweils an den Saitenenden reflektiert (= Zurückgeworfen) wird. Wir haben dann also die Situation, dass in der Saite gleichzeitig Wellen nach links und nach rechts laufen. Diese Wellen überlagern sich (Superposition!) und müssen in der mathematischen Beschreibung der Saite wohl aufaddiert werden. Das wollen wir in diesem Kapitel mathematisch angehen.

Gleichzeitig wissen wir aber von der Beobachtung eines zweiseitig eingespannten Gummiseils – das eine “langsam schwingende Version” einer Instrumentensaite darstellt – was bei dieser Addition herauskommen muss: Rege ich das Gummiseil mit einer beliebigen Frequenz an, so zittert es ein bisschen, aber eine ausgeprägte Reaktion ist nicht zu beobachten. Bei ganz bestimmten Frequenzen hingegen wird Resonanz sichtbar. Das Gummiseil reagiert ganz deutlich mit der Ausbildung einer **stehenden Welle**, also einer sinusartigen Welle, die sich längs des Seils nicht mehr verschiebt. Auf die Beschreibung dieser stehenden Welle wollen wir in diesem Kapitel zuerst eingehen, bevor am Ende des Kapitel zu den zwei entgegengesetzt laufenden Wellen zurückkehren und mittels der Additionstheoreme aufzeigen, dass daraus effektiv eine stehende Welle resultieren muss.

14.1 Stehende Wellen auf zweiseitig eingespannten Seilen

Betrachten wir das schwingende Gummiseil unter Stroboskoplicht, so können wir es durch passende Frequenzeinstellung des Lichts scheinbar zum Stillstand bringen. Abb. 52 zeigt einen Versuch, bei dem die Lichtfrequenz gerade doppelt so gross ist wie die Schwingungsfrequenz des Seils (= Anregungsfrequenz des Vibrators). Diese Anregungsfrequenz entspricht offenbar einer Eigenfrequenz des Seils. Sie wird vom Seil gut aufgenommen und zwar in Form dieser Eigenschwingung.

Im Seil sind fünf sogenannte **Knotenpunkte** erkennbar. Das sind Stellen, wo sich das Seil nicht bewegt. Zwischen diesen Knotenpunkten schwingt das Seil in **Wellenbäuchen** auf und ab. So sieht eine reale **stehende Welle** aus.

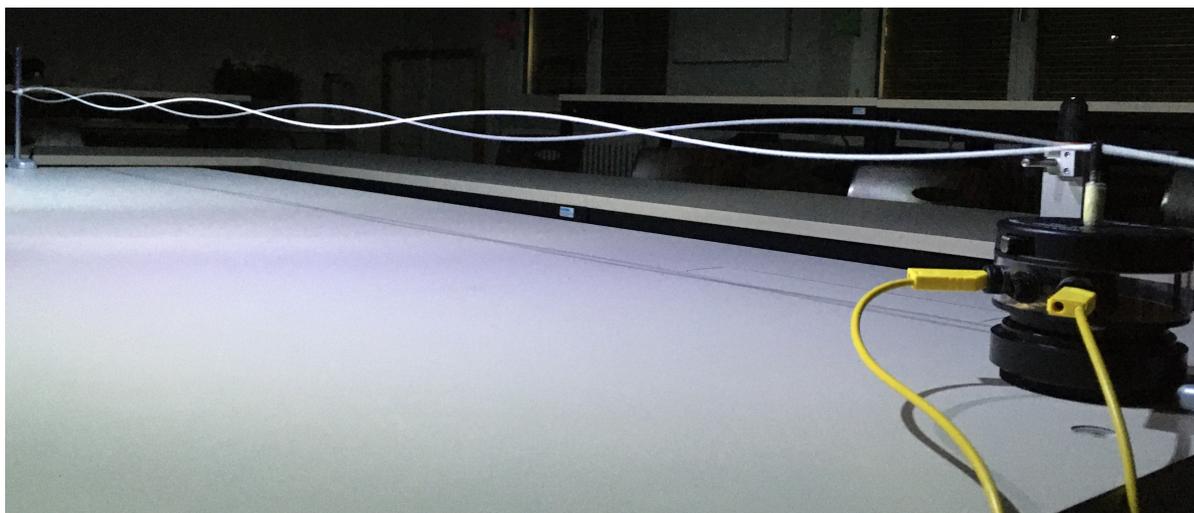


Abbildung 52: Eine stehende Welle auf dem beidseitig eingespannten Seil im Licht des Stroboskops. Der Vibrator im Vordergrund trifft genau eine Resonanz- resp. Eigenfrequenz des Gummiseils. Es schwingt in seiner 5. Oberschwingung (5 Knotenpunkte und 6 Wellenbäuche). Das Stroboskoplicht blitzt mit der doppelten Frequenz des Seils, sodass wir das Seil in zwei Positionen sehen.

Die Anzahl der Knotenpunkte kann zur Durchnummerierung der verschiedenen stehenden Wellen verwendet werden. Betrachten wir dazu Abb. 53. Wir beginnen bei $n = 0$, denn die sogenannte **Grundschwingung** (= Eigenschwingung mit der tiefsten Frequenz) hat keine Knotenpunkte, sondern nur einen Wellenbauch zwischen den Seilenden. Die stehende Welle mit zwei Wellenbäuchen und 1 Knotenpunkt ist die **1. Oberschwingung**. Die **2. Oberschwingung** hat schon 2 Knotenpunkte und drei Wellenbäuche. Bei n Knotenpunkten sprechen wir von der **n -ten Oberschwingung**.

Im Versuch mit dem Gummiseil lässt sich weiter beobachten, dass die **Eigenfrequenzen** f_n der Oberschwingungen allesamt **natürliche Vielfache der Grundfrequenz** f_0 . Es gilt also:

$$f_n = (n + 1) \cdot f_0 \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

Diese Beobachtung werden wir in Abschnitt 14.6 genau verstehen. Sie macht das Seil (resp. eine Saite) zu einem tönenden Musikinstrument! Erinnern wir uns dazu an die wichtigste Aussage aus Kapitel 8: *“Eine beim Ohr ankommende Schallwelle wird als Ton mit einer ganz bestimmten Tonhöhe wahrgenommen, wenn die darin enthaltenen Frequenzen natürliche Vielfache einer Grundtonfrequenz f_0 sind.”* Und nun sind wir gerade dabei zu entdecken, dass unser eingespanntes Seil nur derart aufeinander abgestimmte Frequenzen zulässt!

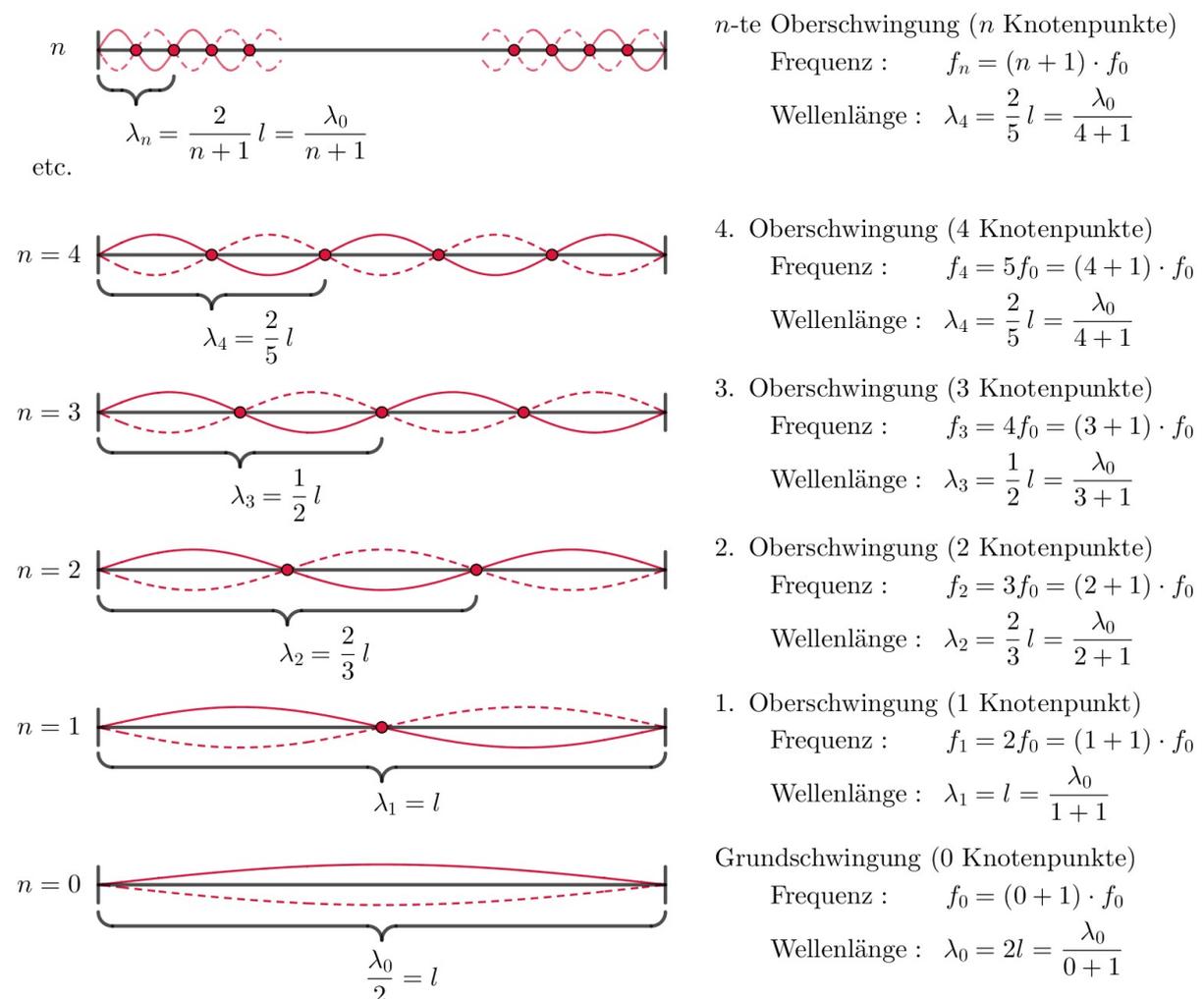


Abbildung 53: Stehende Wellen auf einem zweiseitig eingespannten Seil der Länge l . Aus den Grafiken lassen sich die zugehörigen Wellenlängen λ_n ablesen. Dabei besteht eine Wellenlänge λ aus einem Wellenberg und einem Wellental – sie ist also jeweils zwei Wellenbäuche lang.

14.2 Die Wellenlängen von stehenden Wellen auf eingespannten Seilen

Betrachten wir nochmals Abb. 52, so bemerken wir, dass die Form der stehenden Welle auf dem Seil offenbar durch eine **Sinuskurve** beschrieben wird.

Wenn wir zudem auf Abb. 53 blicken, wird rasch klar, dass sich die Wellenlängen λ_n der verschiedenen stehenden Wellen dort direkt ablesen lassen: Eine Wellenlänge λ ist bekanntlich die Distanz vom einen zum nächsten Wellenberg. Sie umfasst also einen Wellenberg und ein Wellental resp. bei unseren stehenden Wellen eben **zwei** Wellenbäuche! Somit folgern wir für die Wellenlängen λ_n der Eigenschwingungen auf dem Seil mit Länge l :

Schwingungsindex n	0	1	2	3	4	5	...	n
Wellenlänge λ_n	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	...	λ_n
	$= 2l$	$= l$	$= \frac{2}{3} l$	$= \frac{1}{2} l$	$= \frac{2}{5} l$	$= \frac{1}{3} l$...	$= \frac{2}{n+1} l$
		$= \frac{\lambda_0}{2}$	$= \frac{\lambda_0}{3}$	$= \frac{\lambda_0}{4}$	$= \frac{\lambda_0}{5}$	$= \frac{\lambda_0}{6}$		$= \frac{\lambda_0}{n+1}$

In der Grundschiwingung liegt nur ein Wellenbauch zwischen den beiden Seilenden. Ihre Wellenlänge λ_0 entspricht folglich der doppelten Seillänge l . Die Wellenlängen λ_n aller weiteren Eigenschwingungen sind natürliche Bruchteile dieser **Grundwellenlänge**. Es gilt also:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n+1} \quad \text{mit} \quad \lambda_0 = 2l \quad \text{und} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

14.3 Die mathematische Beschreibung der stehenden Welle

Nun sind wir bereits in der Lage die Eigenschwingungen des eingespannten Seils resp. einer Instrumentensaite als Funktion zu beschreiben. Die n -te Eigenschwingung besitzt die Wellenlänge λ_n und schwingt mit der Frequenz f_n . Sie ist als Funktion gegeben durch:

$$h_n(x, t) = \underbrace{A_n \sin(k_n x)}_{= A_n(x)} \cdot \sin(\omega_n t) \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad \text{und} \quad \omega_n = 2\pi f_n \quad (40)$$

Bemerkungen zur stehenden Wellenfunktion $h_n(x, t)$

- Wir legen unsere Ortsachse so, dass der örtliche Nullpunkt $x = 0$ am einen und die Stelle $x = l$ beim anderen Seilende liegt.
- Wie schon bei der laufenden Welle, so handelt es sich auch bei der stehenden Welle wieder um eine Funktion, die von zwei Variablen abhängt: Jeder Stelle x auf dem Seil wird zu jedem Zeitpunkt t eine Auslenkung $h_n(x, t)$ zugeordnet.
- Die stehende Wellenfunktion $h_n(x, t)$ ist das Produkt aus zwei Teilfunktionen:

Ortsabhängige Amplitude $A_n(x) = A_n \sin(k_n x)$: Diese Funktion hängt nur vom Ort x ab. Sie entspricht der Sinuswelle, die das Seil zu einem Zeitpunkt maximaler Auslenkung beschreibt. Wir sehen diese Funktion im Stroboskopbild von Abb. 52, aber auch die Graphen in Abb. 53 zeigen eigentlich diese Ortsamplituden (und das Negative davon).

Die in $A_n(x)$ enthaltene **Maximalamplitude** A_n sagt, wie ausgeprägt die stehende Welle insgesamt ist. A_n steht für die maximale Auslenkung des Seils in der Mitte eines Wellenbauches.

Zeitabhängige Schwingung $\sin(\omega_n t)$: Dieser Teil beschreibt die zeitliche Schwingung. Alle Stellen im Seil schwingen mit derselben Frequenz f_n auf und ab.

Zusammen können wir sagen: An jeder Stelle x schwingt das Seil auf und ab, und zwar mit der Frequenz f_n , die in ω_n enthalten ist. Wie stark die Amplitude dieser Schwingung an einer bestimmten Stelle x ist, wird durch die sinusförmige Ortsamplitude $A_n(x)$ beschrieben.

- Der zeitliche Nullpunkt $t = 0$ ist so gesetzt, dass das Seil in diesem Moment komplett gerade ist. An allen Stellen x beträgt die Auslenkung zu diesem Zeitpunkt $h(x, 0) = 0$, weil die zeitabhängige Schwingung $\sin(k_n t)$ für $t = 0$ eben gleich 0 ist.
- Dass das Seil wirklich an beiden Enden fixiert ist und dort gar nicht schwingen kann, ist als Information in der ortsabhängigen Amplitude enthalten, denn $A_n(x)$ ist an beiden Seilenden stets gleich 0. Für $x = 0$ ist das ganz einfach nachvollziehbar:

$$h_n(0, t) = A_n(0) \sin(\omega_n t) = A_n \sin 0 \cdot \sin(\omega_n t) = 0 \quad (41)$$

Etwas interessanter ist die Stelle $x = l$. Wir betrachten nur die ortsabhängige Amplitude $A_n(l)$ und verwenden, dass $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n+1} = \frac{2l}{n+1}$ ist:

$$\begin{aligned} A_n(l) &= A_n \cdot \sin(k_n l) = A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} l\right) = A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{2l}{n+1}} l\right) \\ &= A_n \sin\left(\frac{2(n+1)\pi l}{2l}\right) = A_n \sin((n+1)\pi) = 0 \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\sin((n+1)\pi)$ ist deshalb gleich Null, weil n und somit auch $(n+1)$ eine natürliche Zahl ist. Dann ist nämlich $(n+1)\pi$ ein natürliches Vielfaches von π und wie wir wissen resp. im Graphen in Abb. 20 auf Seite 24 nachschauen können, werden dadurch gerade die Nullstellen der Sinusfunktion abgedeckt:

$$\sin(n\pi) = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z} \quad (42)$$

Auf dieselbe Art ist $A_n(x)$ an allen Knotenpunkten gleich 0. Bei der n -ten Eigenschwingung ist die Stelle x_m des m -ten Knotenpunktes gegeben durch:

$$x_m = m \cdot \frac{l}{n+1} = \frac{ml}{n+1} \quad (43)$$

$\frac{l}{n+1}$ ist die Länge eines Wellenbauches, von denen es auf dem Seil der Länge l bei der n -ten Eigenschwingung ja $(n+1)$ Stück gibt. Der m -te Knotenpunkt befindet sich dann eben gleich hinter dem m -ten Wellenbauch, also eben an der Stelle $x_m = m \cdot \frac{l}{n+1}$.

Für die ortsabhängige Amplitude an der Stelle x_m folgt damit:

$$\begin{aligned} A_n(x_m) &= A_n \cdot \sin(k_n x_m) = A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot \frac{ml}{n+1}\right) = A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{2l}{n+1}} \cdot \frac{ml}{n+1}\right) \\ &= A_n \sin\left(\frac{2(n+1)\pi ml}{2l(n+1)}\right) = A_n \sin(m\pi) = 0 \quad \text{weil } m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

14.4 Stehende Welle als Superposition zweier entgegengesetzt laufender Wellen

Auf dem eingespannten Seil wird eine laufende Welle jeweils am Ende reflektiert. D.h., ein- und dieselbe Welle ist in beide Richtungen unterwegs. Die Schwingung des Seils müsste sich somit aus der Summe zweier gegenläufiger Einzelwellen ergeben. Was ergibt sich rechnerisch für diese Summe?

Gegeben seien also zwei laufende Wellen mit gleicher Amplitude A , Wellenlänge λ und Frequenz f . D.h., auch die Wellenzahl k und die Kreisfrequenz ω sind identisch. Allerdings sind die beiden Wellen in entgegengesetzter Richtung unterwegs. Wir notieren ihre Summe und verwenden die Additionstheoreme zur weiteren Bearbeitung:

$$\begin{aligned} h(x, t) &= h_{\rightarrow}(x, t) + h_{\leftarrow}(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \cdot \sin(kx + \omega t) \\ &= A \left(\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \right) \\ &= A \left(\sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t) + \sin(kx) \cos(\omega t) + \cos(kx) \sin(\omega t) \right) \\ &= \underbrace{2A \sin(kx)}_{= A(x)} \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck beschreibt tatsächlich eine stehende Welle. Wenn wir – was wir diskussionslos dürfen – den zeitlichen Nullpunkt ein wenig verschieben, so wird aus der Cosinusfunktion $\cos(\omega t)$ die Sinusfunktion $\sin(\omega t)$ und wir haben den Ausdruck von Seite 67 für die stehende Welle vor uns:

$$h(x, t) = \underbrace{2A \sin(kx)}_{= A(x)} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad \omega = 2\pi f \quad (44)$$

Stehende Wellen ergeben sich also aus zwei entgegengesetzt laufenden Wellen mit gleichen Parametern A , λ , f und c . Das lässt sich in Abb. 54 grafisch nachvollziehen. Oben laufen die beiden Wellen in die angezeigten Richtungen weiter und für beliebige Zeitpunkte t gilt:

- Die beiden Wellen sind zu jedem beliebigen Zeitpunkt t achsensymmetrisch bezüglich allen Vertikalen V . Damit haben $h_{\rightarrow}(x, t)$ und $h_{\leftarrow}(x, t)$ an diesen Stellen x stets die gleichen Funktionswerte, die sich aufaddieren. Dort gibt sich also eine **konstruktive Interferenz**.
- Die beiden Wellen sind zu jedem beliebigen Zeitpunkt t punktsymmetrisch bezüglich allen Punkten P . Damit hat $h_{\leftarrow}(x, t)$ an diesen Stellen x zu allen Zeitpunkten t den negativen Funktionswert von $h_{\rightarrow}(x, t)$. Die beiden Funktionswerte ergeben zusammen 0. An allen diesen Stellen beobachten wir somit eine **destruktive Interferenz**.

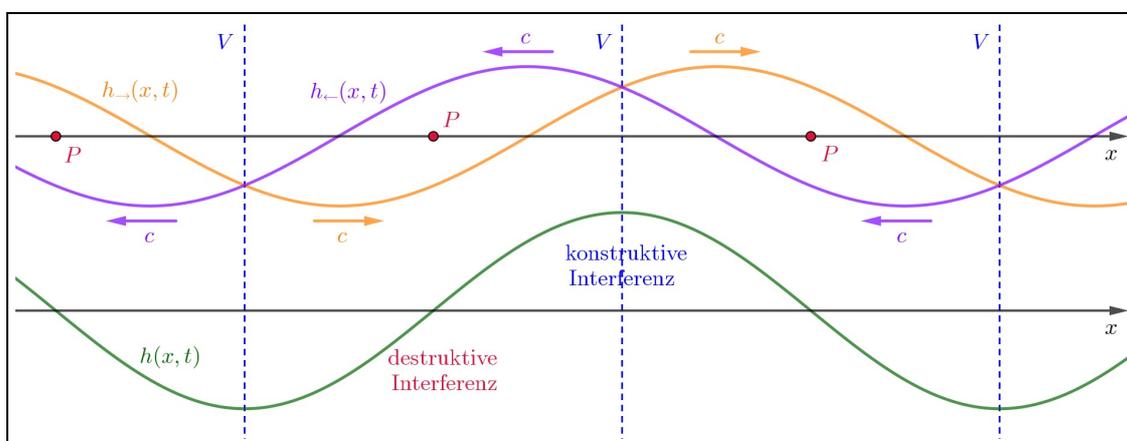


Abbildung 54: Die stehende Welle als Superposition zweier gegenläufiger Wellen.

14.5 Die Selektion der möglichen Wellenlängen

Aber halt! Irgendetwas ist noch nicht befriedigend, wenn wir die Abschnitte 14.3 und 14.4 miteinander vergleichen. Bei der Betrachtung der stehenden Wellen in Abschnitt 14.3 hatten wir festgestellt, dass nur ganz bestimmte Wellenlängen in Frage kommen. Bei einem eingespannten Seil der Länge l hatten wir gefunden, dass

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n+1} = \frac{2l}{n+1} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

sein muss. In Abschnitt 14.4 sind wir auf keine solche Einschränkung gestossen. Wir haben lediglich festgestellt, dass beliebige zwei gegeneinander laufende Wellen eine stehende Welle bilden, solange ihre Parameter A , λ , f und c übereinstimmen. Haben wir da etwas vergessen oder übersehen?

Nein, aber wir haben einfach nicht fertig gedacht! Die gegeneinander laufenden Wellen kommen ja durch die Reflektion bei den eingespannten Seilenden zustande. Das bedeutet aber, dass ein- und dieselbe Welle mehrmals hin und her läuft, weil sie ja ständig wieder reflektiert wird. Und dies wiederum hat zur Folge, dass am Ende auf dem eingespannten Seil nicht nur eine laufende Welle in die eine und eine in die andere Richtung vorhanden sind. Vielmehr gibt es quasi unzählige Wellen, die in die eine oder in die andere Richtung laufen. Alle diese Wellen müssen gemäss dem Superpositionsprinzip aufaddiert werden, um zu ermitteln, was das Seil insgesamt für eine Schwingung ausführt. Das könnte vielleicht etwas kompliziert werden. . .

Ja und nein! Klar, auf der einen Seite dürfte es schon anspruchsvoll sein die Summe über im Prinzip unendlich viele Sinusfunktionen zu bilden. Andererseits können wir uns aber sehr leicht einen Fall überlegen, bei dem sich alle diese Wellen zu einer stehenden Welle aufaddieren.

Stellen wir uns einfach mal einen Wellenberg vor, der zum Zeitpunkt $t = 0$ am Seilanfang startet. Er wird am Seilende reflektiert, kommt zurück und wird am Seilanfang wieder reflektiert. Bis zu diesem Zeitpunkt hat er genau zwei Seillängen, also die Strecke $2l$ zurückgelegt. Startet zum gleichen Zeitpunkt ein zweiter Wellenberg beim Seilanfang, so werden diese beiden Wellenberge koordiniert miteinander loslaufen und sich sicher nicht gegenseitig auslöschen.

Wie gross ist der "Vorsprung", den der erste Wellenberg auf dem Seil gegenüber dem zweiten hat? Darauf haben wir zwei Antworten:

Antwort 1: Wie gerade überlegt, hat der erste Wellenberg bereits die doppelte Seillänge zurückgelegt, bis der zweite Wellenberg losgeschickt wird. Sein Vorsprung beträgt also $2l$.

Antwort 2: Die beiden Wellenberge gehören ja eigentlich zur selben laufenden Welle. Somit muss die Distanz zwischen ihnen ein natürliches Vielfaches der Wellenlänge λ sein. Der Vorsprung muss also $m \cdot \lambda$ mit $m = 1, 2, 3, \dots$ betragen.

Die beiden Antworten beantworten dieselbe Frage und müssen folglich übereinstimmen. Das bedeutet, dass folgende Beziehung gelten muss, wenn sich ein Wellenberg nach zwei Reflektionen mit einem weiteren Wellenberg derselben laufenden Welle aufaddieren soll:

$$2l = m \cdot \lambda \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

Damit haben wir aber eine Einschränkung für die möglichen Wellenlängen gefunden. Nur bei bestimmten Wellenlängen λ_m läuft ein Wellenberg nach zwei Reflektionen beim Seilanfang gerade zusammen mit einem weiteren Wellenberg derselben Welle los und löscht diesen somit nicht aus.

Stellen wir nach λ_m um und substituieren wir m durch $n+1$, so erhalten wir die bereits bekannten, möglichen Wellenlängen für die stehenden Wellen auf dem eingespannten Seil:

$$\lambda_m = \frac{2l}{m} \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{resp.} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n+1} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Mit etwas weiterführender Mathematik kann man zeigen, dass sich laufende Wellen mit anderen Wellenlängen beim hin und her gehen auf dem Seil insgesamt auslöschen. Auf dem Seil überleben also effektiv nur Wellen mit diesen ausgewählten Wellenlängen λ_n .

14.6 Die Frequenzselektion

Nachdem nach den Abschnitten 14.3 und 14.5 nun doppelt klar ist, dass auf dem zweiseitig eingespannten Seil nur die Wellen mit den durch

$$\lambda_n = \frac{2l}{n+1} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

gegebenen Wellenlängen λ_n überleben, können wir uns schliesslich überlegen, dass damit auch nur ganz bestimmte Frequenzen f_n auf dem Seil schwingen können. Schliesslich gehört zu jeder Wellenlänge genau eine bestimmte Frequenz f_n , die gegeben ist durch:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{\frac{2l}{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot c}{2l} = (n+1) \cdot f_0 \quad \text{mit } f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2l} \quad \text{und } n = 0, 1, 2, \dots$$

Auf dem Seil schwingen also nur stehende Wellen, deren Frequenzen allesamt natürliche Vielfache ein- und derselben Grundfrequenz f_0 sind.

Die Saite als Tonerzeuger

Damit verstehen wir nun endlich ganz präzise, weshalb eine Saite einen Ton mit bestimmter Tonhöhe und Klangfarbe erzeugt: Die Saite – eben ein zweiseitig eingespanntes Seil – lässt ein Frequenzspektrum erklingen, das ausschliesslich aus natürlichen Vielfachen einer Grundtonfrequenz f_0 besteht. Der mit ihr verbundene Resonanzkörper nimmt diese Schwingungen resp. Frequenzen auf und sendet eine Schallwelle aus, die immer noch genau diese Frequenzen enthält – und nichts anderes. Damit ist sie eine Schallwelle, die wir als Ton mit bestimmter Tonhöhe und Klangfarbe wahrnehmen, wie wir in Kapitel 8 festgestellt hatten.

Bei der Stimmung eines Saiteninstrumentes verändern wir die Spannungen der eingespannten Saiten. Dies hat einen Effekt auf die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c auf der jeweiligen Saite. Die Saitenlänge l bleibt dabei unverändert. Das bedeutet aber, dass wir damit die Grundtonfrequenz f_0 verändern, denn es ist ja $f_0 = \frac{c}{2l}$.

Zupfen wir eine Saite an, so werden im Prinzip alle möglichen Arten von Wellen angeregt, es überleben aber nur die stehenden Wellen. Nach sehr kurzer Zeit wird die Bewegung der Saite alleine durch eine Summe stehender Wellen von ein- und derselben Grundfrequenz f_0 beschrieben.

A Die Herleitung der Additionstheoreme

In diesem Anhang sollen die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (47)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \quad (48)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (49)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (50)$$

hergeleitet werden. Dazu bedarf es zunächst eines kurzen Rückblicks auf die Definitionen von Sinus und Cosinus am Einheitskreis, denn immer, wenn wir etwas Neues herleiten wollen, müssen wir uns ganz strikt an die Definitionen der Objekte halten, auf die wir unsere Herleitung abstützen.

Ich arbeite bei dieser Herleitung konsequent mit Winkelnamen α und β , die typischerweise für Winkel im Gradmass vorgesehen sind. Alle Ausführungen könnten aber ebenso gut mit den für das Bogenmass typischen Winkelnamen x und y erfolgen. Die Additionstheoreme hängen nicht davon ab, ob wir Winkel im Grad- oder im Bogenmass angeben.

A.1 Repetition: Die Definitionen von Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Anfänglich hatten wir den Sinus- und den Cosinuswert eines Winkels α als **Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck** kennengelernt.²⁵ Mit dieser Definition waren allerdings nur Winkelwerte $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ sinnvoll. Im Kapitel 2 dieses Skripts folgten dann die erweiterten Definitionen am **Einheitskreis**, welche beliebige Winkelwerte α zulassen.

Die Definitionen von Sinus und Cosinus am Einheitskreis

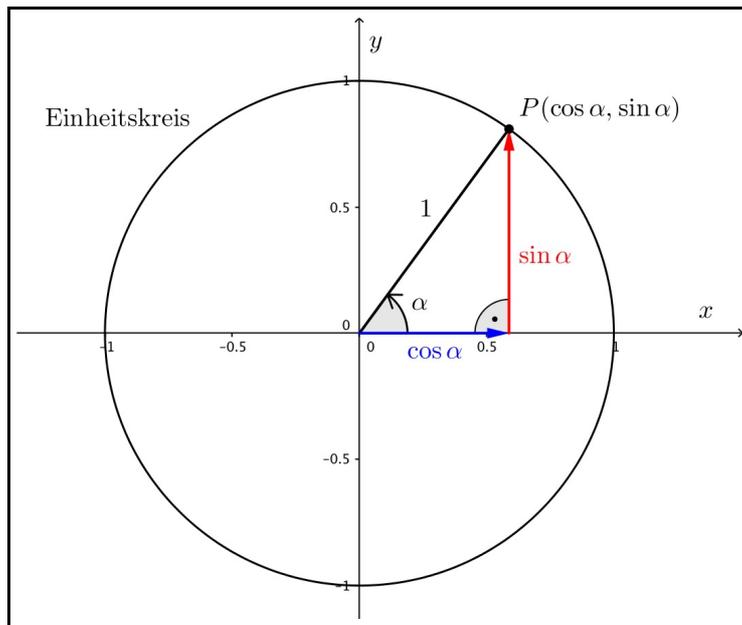
Vorgabe: Gegeben sei ein x - y -Koordinatensystem. α bezeichne einen von der positiven x -Achse aus im Gegenuhrzeigersinn abgetragenen Winkel (negativer Wert $\hat{=}$ Drehung im Uhrzeigersinn). Jede Wahl von α legt einen ganz bestimmten Punkt P auf dem Einheitskreis (= Kreis mit Radius 1 um den Ursprung) fest.

Definitionen:

- Der **Sinus** von α ist die y -Koordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis. $\sin \alpha := y(P)$
- Der **Cosinus** von α ist die x -Koordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis. $\cos \alpha := x(P)$

Die zugehörige Abbildung befindet sich oben auf der nächsten Seite.

²⁵ $\sin \alpha =$ Gegenkathete durch Hypotenuse, $\cos \alpha =$ Ankathete durch Hypotenuse.



Anmerkungen zu den Definitionen von Sinus und Cosinus am Einheitskreis

- Die neuen Definitionen am Einheitskreis für beliebige Winkel $-\infty < \alpha < +\infty$ stimmen für Winkel $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ komplett mit den Definitionen am rechtwinkligen Dreieck überein.²⁶
- Es gilt: $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ und $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ (**Minimal- und Maximalwerte**).
- Und ebenso offensichtlich: $\cos(\alpha \pm 360^\circ) = \cos \alpha$ und $\sin(\alpha \pm 360^\circ) = \sin \alpha$ (**Periodizitäten**).
- Am Einheitskreis wird mit dem **Satz des Pythagoras** besonders klar, dass stets gilt:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (51)$$

- Aus den Definitionen am Einheitskreis folgen die sehr wichtigen **Symmetrieeigenschaften**:

– Die Sinusfunktion ist **ungerade** oder **punktsymmetrisch**, denn es gilt:

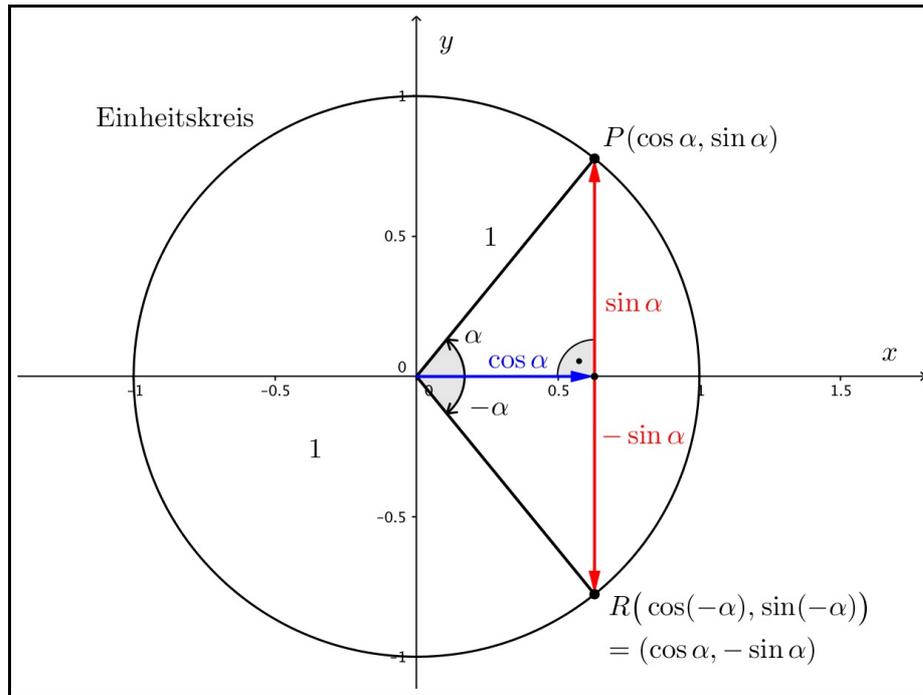
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad (52)$$

– Anders die Cosinusfunktion. Sie ist **gerade** resp. **achsensymmetrisch**, denn:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (53)$$

Die folgende Graphik veranschaulicht diese Symmetrieeigenschaften:

²⁶Alles andere wäre auch schlichtweg inakzeptabel. . .

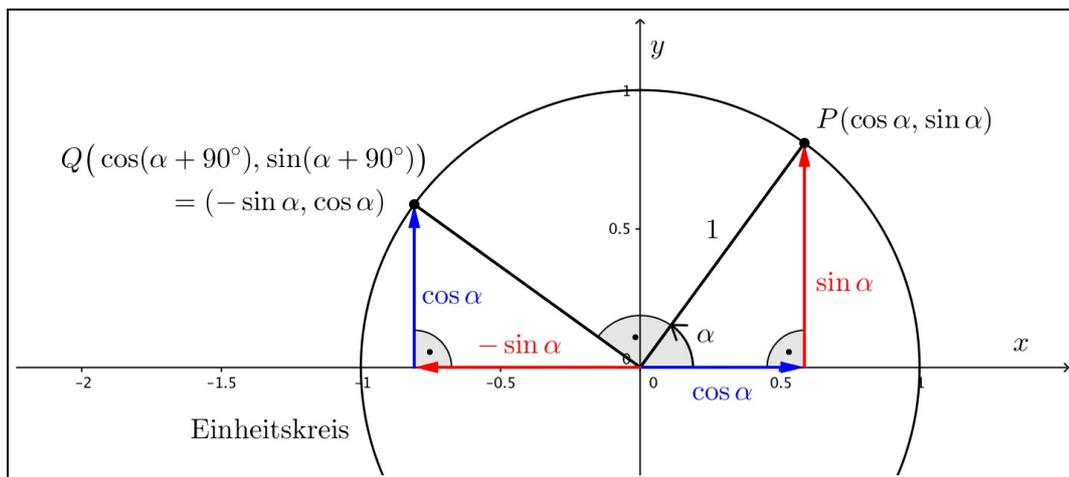


- Am Einheitskreis lassen sich auch rasch weitere Beziehungen zwischen Sinus- und Cosinuswerten aufstellen. Ein Beispiel dazu möchte ich hier unbedingt anfügen, weil wir es nachher bei der Herleitung der Additionstheoreme explizit verwenden werden:

Drehen wir den Punkt $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ um 90° weiter, so gelangen wir zu einem Punkt Q mit x -Koordinate $\cos(\alpha + 90^\circ)$ und y -Koordinate $\sin(\alpha + 90^\circ)$. Für diese neuen Koordinaten gilt aber offensichtlich:

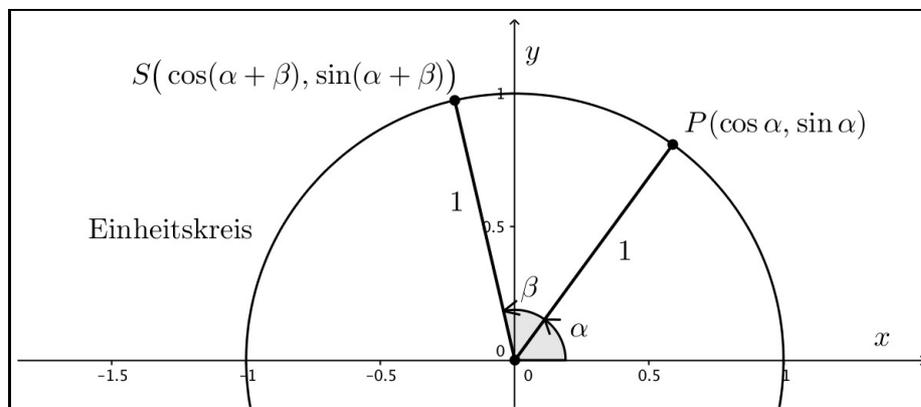
$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha \quad (54)$$

Davon können wir uns anhand der folgenden Graphik rasch überzeugen!



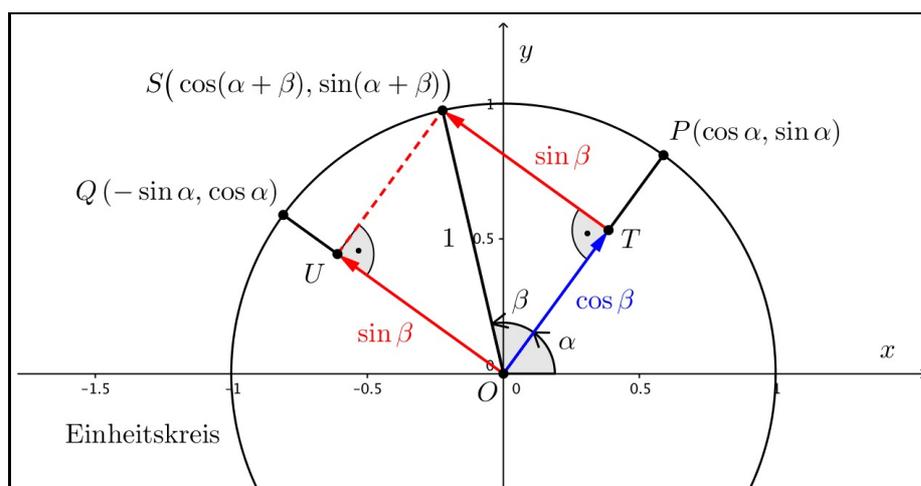
A.2 Die eigentliche Herleitung der Additionstheoreme

Ausgangslage: Wir geben uns zwei Winkel α und β vor. Zu jedem dieser beiden Winkel, wie auch zur Winkelsumme $\alpha + \beta$, gehört ein Punkt auf dem Einheitskreis. Die folgende Graphik zeigt den Punkt P zum Winkel α und den Punkt S zur Winkelsumme $\alpha + \beta$. Der Punkt S kann als der um den Winkel β weiter gedrehte Punkt P aufgefasst werden:



Ziel: Wir möchten die Koordinaten von S , also $x(S) = \cos(\alpha + \beta)$ und $y(S) = \sin(\alpha + \beta)$, durch $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$ und $\cos \beta$

Die 3 Herleitungsschritte: Den nachfolgenden Schritten liegt die folgende Graphik zugrunde:



- i. Zunächst bemerken wir, dass wir vom Ursprung O zum Punkt S gelangen können, indem wir zuerst dem blauen Pfeil zum Punkt T und dann dem roten Pfeil bis zu S folgen. Derselbe rote Pfeil führt uns aber auch vom Ursprung O zum Punkt U . Daraus folgern wir, dass die x -Koordinate des Punktes S die Summe der x -Koordinaten von T und von U ist, was ganz analog auch für die y -Koordinaten gilt:²⁷

$$x(S) = \cos(\alpha + \beta) = x(T) + x(U) \quad (55)$$

$$y(S) = \sin(\alpha + \beta) = y(T) + y(U) \quad (56)$$

Wir sollten also herausfinden, wie die Koordinaten von T und U lauten, denn dann haben wir automatisch auch neue Ausdrücke für $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$ gefunden.

²⁷Was wir hier bemerken resp. ausnutzen ist eigentlich nichts anderes als die Regeln der **Vektoraddition**, die wir im Thema Vektorgeometrie in der Mathematik kennenlernen: Bei der Vektoraddition (= Pfeile aneinander hängen) werden die Vektorkomponenten einzeln addiert.

- ii. Weiter bemerken wir: Da S der um β weiter gedrehte Punkt P ist, lassen sich die Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck $\triangle OTS$ problemlos angeben. Die Hypotenuse beträgt 1 und die beiden Katheten betragen $\cos \beta$ und $\sin \beta$.

Da P auf dem Einheitskreis liegt, beträgt seine Distanz zum Ursprung O genau 1. Stauchen wir beide Koordinaten von P mit dem Faktor $\cos \beta$, so landen wir demzufolge gerade beim Punkt T . Für dessen Koordinaten können wir also schreiben:

$$x(T) = \cos \beta \cdot x(P) = \cos \beta \cos \alpha \quad (57)$$

$$y(T) = \cos \beta \cdot y(P) = \cos \beta \sin \alpha \quad (58)$$

Ganz analog erhalten wir die Koordinaten von U durch Stauchung der Koordinaten des Punktes Q mit dem Faktor $\sin \beta$:²⁸

$$x(U) = \sin \beta \cdot x(Q) = \sin \beta (-\sin \alpha) \quad (59)$$

$$y(U) = \sin \beta \cdot y(Q) = \sin \beta \cos \alpha \quad (60)$$

- iii. Nun sind wir aber bereits am Ziel, denn wenn wir die Gleichungen (57) bis (60) in die beiden Gleichungen (55) und (56) einsetzen, stehen die Additionstheoreme (47) und (49) direkt schon da:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \quad \text{q.e.d.}$$

Additionstheoreme für Winkeldifferenzen: Weshalb spricht man eigentlich nur von Additionstheoremen? Müsste man die Gleichungen (48) und (50) für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ nicht eher als "Subtraktionstheoreme" bezeichnen!?

Nein. Das wäre doch ein bisschen viel Nomenklatur! Eine Subtraktion ist schliesslich nichts anderes als die Addition eines negativen Winkelwertes! Und genau diesen Gedanken nutzen wir aus, um die Gleichungen (48) und (50) aus den bisher gefundenen Additionstheoremen (47) und (49) zu gewinnen. Dabei kommen die Symmetrieeigenschaften (52) und (53) von Sinus- und Cosinusfunktion zum Einsatz:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos \alpha \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Additionstheoreme für die Sinus- und die Cosinusfunktion vollständig hergeleitet.

²⁸Für die Koordinaten von Q hatten wir in (54) gefunden: $Q(\cos(\alpha + 90^\circ), \sin(\alpha + 90^\circ)) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$.