Übung QF 2: Funktionsmodifikation mit Parametern

Klasse 155c / AGe

1. *Ein erstes Modifikationsbeispiel*

   Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Wie lautet die Funktionsgleichung, wenn der zugehörige Graph vertikal mit Faktor 3 gestreckt, horizontal mit Faktor 4 gestaucht, dann um 5 nach links und schliesslich um 1 nach oben verschoben werden soll?

2. *Ansatz für eine Gerade mit vorgegebener Steigung durch einen bestimmten Punkt*

   Manchmal kommt es vor, dass wir von einer Gerade die Steigung m bereits kennen und zudem wissen, dass sie durch einen bestimmten Punkt $P(x_P, y_P)$ verläuft. Wie bestimmen wir in dieser Situation möglichst effizient die zugehörige Funktionsgleichung?

   Hier beschreitest du zuerst den "alten Weg" und lernst danach eine effizientere Methode kennen...

   (a) Eine Gerade g habe die Steigung $-\frac{3}{4}$ und verlaufe durch den Punkt $P(13, -6)$. Funktionsgleichung $g(x)$?
   Vorgehen: Verwende den Ansatz $g(x) = mx + q = -\frac{3}{4}x + q$ und setze den Punkt P ein, um den fehlenden Parameter q, also den y-Achsenabschnitt zu bestimmen.
   Dieses "alte" Vorgehen funktioniert und ist auch nicht besonders aufwändig. Es geht aber noch schneller!

   (b) Zu $f(x) = mx$ gehört eine Gerade durch den Ursprung $(0, 0)$ mit Steigung $m \in \mathbb{R}$ (y-Achsenabschnitt $q = 0$). Verschiebe nun diese Gerade um x_P nach rechts und um y_P nach oben. Wie lautet die entsprechend modifizierte Funktionsgleichung?

   $$g(x) =$$

   Bemerke: Diese Funktion beschreibt ganz offensichtlich eine Gerade mit Steigung m durch $P(x_P, y_P)$!

   (c) Verwende das Resultat aus (b), um die Aufgabenstellung unter (a) nochmals zu lösen, ohne dabei irgendetwas zu rechnen – du brauchst die lineare Funktion $g(x)$ eigentlich nur noch hinzuschreiben!

   (d) Kontrolliere kurz, dass das unter (c) erhaltene Resultat tatsächlich mit demjenigen unter (a) übereinstimmt, indem du ausmultiplizierst.

3. *Die Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion*

   Für die quadratische Funktion kennen wir bisher zwei Schreibweisen:

   Normalform (NF): $f(x) = ax^2 + bx + c$ Nullstellenform (NSF): $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

   Die Parameter a, b, c, x_1 und x_2 haben alle eine grafische Bedeutung für die zugehörige Parabel. Bis jetzt kennen wir aber noch keine Schreibweise, die mit dem Scheitelpunkt $S(u, v)$ der Parabel verknüpft ist. Müsste es nicht auch eine **Scheitelpunktsform (SPF)** geben, die die Koordinaten $u = x_S$ und $v = y_S$ enthält?!

   Ja, diese Scheitelpunktsform gibt es und in dieser Aufgabe leitest du sie selber her!

   (a) Starte mit der Normalparabel, also mit der unmodifizierten quadratischen Funktion $f(x) = x^2$, und führe damit die folgenden grafischen Veränderungen durch:
      i. Vertikale Streckung der Parabel mit dem Faktor a.
      ii. Horizontale Verschiebung der Parabel um u nach rechts.
      iii. Vertikale Verschiebung der Parabel um v nach oben.

   Wie lautet die entsprechend modifizierte Funktionsgleichung? Funktionsgleichung?

   $$f(x) =$$

   Dieses $f(x)$ ist nun bereits die gesuchte Scheitelpunktsform. Sie beschreibt also eine Parabel mit Scheitelpunkt $S(u, v)$ und Öffnung a. Hast du verstanden, weshalb das so ist?

   (b) Beispiel: Wie lautet die QF zur Parabel mit Öffnung $a = -\frac{2}{3}$ und Scheitelpunkt $S(2, 6)$?

   (c) Was muss man tun, um die Funktion aus (b) in die NF und in die NSF umzuwandeln?

   (d) Weshalb gibt es bei der QF $f(x) = 2(x - 4)^2 + 1$ keine NSF? Begründe grafisch (ohne zu rechnen!).