Übung QF 5: Optimierungsaufgaben – LÖSUNGEN

Klasse 155c / AGe

Diese Lösungen sind zu Beginn ausführlicher, damit an ein paar Beispielen der detaillierte Gedankengang bei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung zu sehen ist.

1. (a) Zu optimieren ist die **Zielfunktion** $A(L, B) = L \cdot B$ (Rechteck: "Fläche = Länge mal Breite").
   Der Umfang U besteht aus zwei Längen und zwei Breiten. Das ist eine **Nebenbedingung** für L und B, mit der wir z.B. L in Abhängigkeit von B notieren können:

   $$U = 2L + 2B \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{U}{2} - B = \frac{24}{2} - B = 12 - B$$

   Diesen Ausdruck für L setzen wir in die Zielfunktion ein:

   $$A(L, B) = L \cdot B \qquad \Rightarrow \qquad A(B) = (12 - B) \cdot B = 12B - B^2 = -B^2 + 12B$$

   Die Maximalstelle dieser QF in B ist rasch bestimmt:

   $$B_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot (-1)} = \underline{6}$$

   Damit muss aber auch die Länge 6 betragen, denn $L = 12 - B = 12 - 6 = \underline{6}$. Bei einem Umfang von $24\,\mathrm{cm}$ hat also das Quadrat mit Seitenlänge $\underline{\underline{L = B = 6\,\mathrm{cm}}}$ die grösste Fläche. Ein Zufall?

   (b) Wir überprüfen das Resultat allgemein:

   $$A(L, B) = L \cdot B \qquad \text{mit} \qquad U = 2L + 2B \quad \text{resp.} \quad L = \frac{U}{2} - B$$

   $$\Rightarrow \quad A(L, B) = L \cdot B \quad \Rightarrow \quad A(B) = \left(\frac{U}{2} - B\right) \cdot B = -B^2 + \frac{U}{2} B$$

   $$\Rightarrow \quad B_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{U}{2}}{2 \cdot (-1)} = \underline{\frac{U}{4}} \quad \Rightarrow \quad L_{\max} = \frac{U}{2} - B_{\max} = \frac{U}{2} - \frac{U}{4} = \underline{\frac{U}{4}} = B_{\max}$$

   $\Rightarrow$ **Von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat die grösste Fläche!**

2. Zu Minimieren ist das Produkt zweier Zahlen x und y. Die **Zielfunktion** lautet also:

   $$P(x, y) = x \cdot y$$

   Die **Nebenbedingung** lautet, dass die beiden Zahlen eine Differenz von 2 aufweisen sollen. Sei y die grössere Zahl, so gilt:

   $$x + 2 = y$$

   Diesen Ausdruck für y können wir direkt in die Zielfunktion einsetzen, die dadurch zur nur noch von x abhängigen Funktion wird:

   $$P(x, y) = x \cdot y \qquad \Rightarrow \qquad P(x) = x \cdot (x + 2) = x^2 + 2x$$

   Nun haben wir eine quadratische Zielfunktion. Die zugehörige Parabel ist nach oben geöffnet, sodass effektiv ein Minimum im Scheitelpunkt existiert. Für die Minimalstelle und für das zugehörige minimale y ergibt sich:

   $$x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = \underline{-1} \qquad \Rightarrow \qquad y_{\min} = x_{\min} + 2 = -1 + 2 = \underline{1}$$

   $\underline{\underline{-1 \text{ und } 1}}$ haben also kleinstmögliche Produkt zweier Zahlen mit Differenz 2. Es beträgt -1.

3. **Klärung:** Die $30\,\mathrm{cm}$ sind die Tiefe T des Regals. Daran gibt es nichts zu optimieren.

   Das Volumen des Regals soll optimiert werden. Es berechnet sich aus "Höhe mal Breite mal Tiefe", wobei die Tiefe fix ist. Die **Zielfunktion** lautet zunächst also:

$$V(H,B) = H \cdot B \cdot 30$$

   Die Die Länge ($2.5\,\mathrm{m} = 250\,\mathrm{cm}$) des Brettes wird aufgeteilt auf zwei Regalseiten, je mit Länge H, und fünf Tablare, je mit Länge B. Daraus ergibt sich die **Nebenbedingung**:

$$2H + 5B = 250 \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{250-2H}{5} = 50 - \frac{2}{5}H$$

   Diese Nebenbedingung setzen wir in die Zielfunktion ein, sodass sie nur noch von der Höhe H abhängt:

$$V(H,B) = H \cdot B \cdot 30 \qquad \Rightarrow \qquad V(H) = H \cdot \left(50 - \frac{2}{5}H\right) \cdot 30 = -12H^2 + 1500H$$

   Dies ist eine QF mit negativem Parameter a. Ihr entspricht also eine nach unten geöffnete Parabel mit Maximum im Scheitelpunkt. Das Volumen wird folglich maximiert für:

$$H_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1500}{2\cdot(-12)} = \underline{62.5} \qquad \Rightarrow \qquad B_{\max} = 50 - \frac{2}{5}H_{\max} = 50 - \frac{2}{5}\cdot 62.5 = 50 - 25 = \underline{25}$$

   Das kleinere Regal erhält also ein maximales Volumen für $\underline{\underline{B = 25\,\mathrm{cm}}}$ und $\underline{\underline{H = 62.5\,\mathrm{cm}}}$.

   Anmerkung: Die Tiefe $T = 30\,\mathrm{cm}$ spielt bei dieser Optimierung keine Rolle. Sie taucht in der Volumenfunktion $V(H)$ nur als Skalierungsfaktor auf, der die zugehörige Parabel vertikal streckt. Dadurch wird aber der Wert $H_{\max}$, also die horizontale Lage des Scheitelpunktes der Parabel, nicht verändert.

   Folglich dürfen wir $V(H)$ beliebig neu skalieren, sodass sich einfache Zahlen ergeben. In unserem Fall würde es sich z.B. empfehlen bei der Ausmultiplikation von $V(H)$ die 30 gar nicht erst hineinzumultiplizieren, sondern stattdessen umgekehrt den Faktor $-\frac{2}{5}$ auszuklammern:

$$V(H) = H \cdot \left(50 - \frac{2}{5}H\right) \cdot 30 = H \cdot \left(H^2 - 125H\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 30$$

   Für die Optimierung verwenden wir nur den vorderen Funktionsteil $H^2 - 125H$. Mit den Koeffizienten $a = 1$ und $b = -125$ geht das einfacher:

$$H_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{125}{2} = 62.5$$

4. **Zielfunktion:** Fläche des Beetes, gegeben durch $A(x,y) = x \cdot y$.

   Nebenbedingung: Länge der Beetumrandung, also: $2x + y = 16$ resp. $y = 16 - 2x$.

   Reduktion der Zielfunktion auf eine Variable und Optimierung damit:

$$A(x,y) = x \cdot y = x \cdot (16 - 2x) = -2x^2 + 16x = A(x) \qquad \Rightarrow \qquad x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{2\cdot(-2)} = \underline{4}$$

   Die maximale Beetfläche ergibt sich also bei $\underline{\underline{x = 4\,\mathrm{m}}}$ Breite. Sie beträgt $A = 8\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{m} = \underline{\underline{32\,\mathrm{m}^2}}$.

5. **Zielfunktion:** Produkt $P(x) = 3x(x+1) = 3x^2 + 3x$. (Keine Nebenbedingung notwendig.)

   $P(x)$ ist eine QF mit $a > 0$ ($\widehat{=}$ nach oben geöffnete Parabel). Es gibt somit tatsächlich ein Minimum und wir optimieren:

$$x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2\cdot 3} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

   Anmerkung: Die Zahl 3 spielt für diese Aufgabe keine Rolle! Im Aufgabentext könnte statt des Dreifachen der Zahl also auch das 5- oder das 20-fache der Zahl stehen.

6. $n =$ Anzahl verkaufter Rechner pro Monat, aktuell $n = 600$ (Stück).

   $g =$ Gewinn pro Rechner, aktuell $p = 40$ (Franken).

   $\Rightarrow$ **Zielfunktion:** Gewinnfunktion für einen Monat $G(n, g) = n \cdot g$.

   Nebenbedingung 1: Reduziert die Firma den Preis eines Rechners um x Franken, so reduziert sie auch ihren Gewinn daraus um diesen Betrag (in der Produktion kostet der Rechner ja immer noch gleich viel). Der neue Gewinn beträgt dann $p = 40 - x$.

   Nebenbedingung 2: Gleichzeitig wird bei der Reduktion des Preises um x Franken die Anzahl verkaufter Rechner um $30x$ ansteigen. Damit beträgt die neue monatliche Verkaufsmenge $n = 600 + 30x$.

   Damit haben wir in unserer Zielfunktion $G(n, g)$ beide Variablen n und g von einer neuen Variable, nämlich von der **Preissenkung** x abhängig gemacht:

   $$G(n, g) = n \cdot g \quad \Rightarrow \quad G(x) = (600 + 30x)(40 - x) = 30(20 + x)(40 - x) = 30(-x^2 + 20x + 800)$$

   Das entspricht einer QF mit $a < 0$ ($\widehat{=}$ nach unten geöffnete Parabel). Es gibt also eine ideale Preissenkung x für die maximale Gewinnoptimierung:

   $$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2 \cdot (-1)} = \underline{10}$$

   Zur Erzielung des Maximalgewinns sollte die Firma Right demnach die Rechner um ganze $\underline{\underline{10\,\mathrm{sFr.}}}$ günstiger verkaufen (sofern sie in der Lage ist ihre Monatsproduktion um 300 Stück zu steigern).

7. In Abhängigkeit von x hat die Fläche eines kleinen Dreieck (bei den Ecken A und C) eine Grösse von:

   $$A_1(x) = x \cdot (b - x) = x \cdot (3 - x) = -x^2 + 3x$$

   Analog beträgt die Fläche eines grösseren Dreicks (bei B und D):

   $$A_2(x) = x \cdot (l - x) = x \cdot (5 - x) = -x^2 + 5x$$

   Sind diese beiden Dreiecksflächen $A_1(x)$ und $A_2(x)$ maximal gross, so ist das Parallelogramm minimal klein. Wir müssen also diese Dreiecksflächen resp. ihre Summe (resp. eigentlich das Doppelte davon, was aber für das Resultat keine Rolle spielt) maximieren (**Zielfunktion**):

   $$A(x) = A_1(x) + A_2(x) = -x^2 + 3x + \big(-x^2 + 5x\big) = -2x^2 + 8x$$

   Die grösstmöglichen Dreiecksflächen ergeben sich also für:

   $$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-2)} = \underline{2}$$

   Somit ist die Parallelogrammfläche für $\underline{\underline{x = 2}}$ am kleinsten.

8. (a) Hier ist die **Zielfunktion** $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2}\,t^2$ bereits gegeben. Die Höhe soll optimiert werden. Wir ermitteln den Zeitpunkt, bei dem dies der Fall ist:

   $$t_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-v_0}{2 \cdot \left(-\frac{g}{2}\right)} = \underline{\frac{v_0}{g}}$$

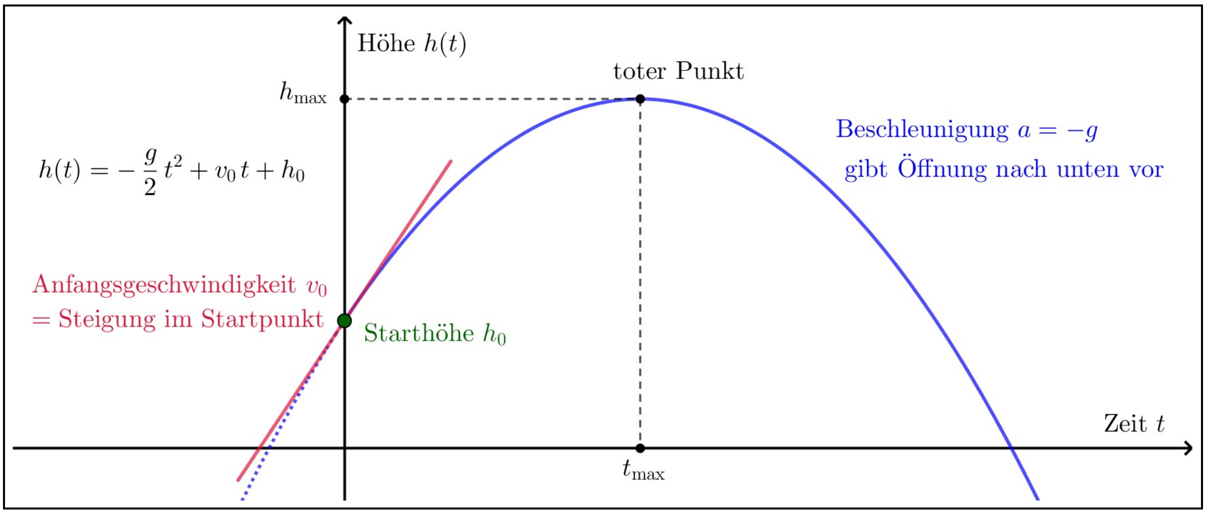
   Dieses Resultat setzen wir in die Zielfunktion zurück ein und erhalten die maximale Höhe:

   $$h_{\max} = h(t_{\max}) = h_0 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = h_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} = \underline{\underline{h_0 + \frac{v_0^2}{2g}}}$$

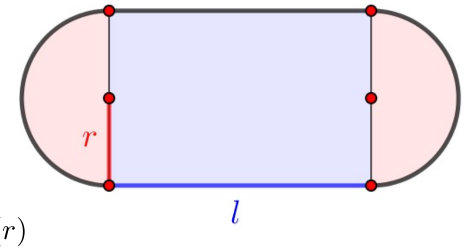
(b) Natürlich erhalten wir denselben Zeitpunkt für die maximale Höhe, wenn wir verwenden, dass in diesem toten Punkt die Geschwindigkeit 0 sein muss:

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - gt \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t_{\max} = \frac{v_0}{g}} \qquad \Rightarrow \qquad h_{\max} = h(t_{\max}) = \ldots = \underline{\underline{h_0 + \frac{v_0^2}{2g}}}$$

(c) Hier die zugehörige Grafik mit den Bedeutungen der Parameter:



9. (a) **Zielfunktion:** Fläche des Rechtecks: $A(r, l) = 2r \cdot l$.



Nebenbedingung: Länge der Bahn, also: $2l + 2\pi r = 400$.
Daraus folgt durch Umstellung: $l = 200 - \pi r$.
Reduktion von $A(l, r)$ auf eine Variable und Optimierung:

$$A(r, l) = 2r \cdot l = 2r \cdot (200 - \pi r) = 2 \cdot (-\pi r^2 + 200r) = A(r)$$

$$\Rightarrow \quad r_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2 \cdot (-\pi)} = \underline{\frac{100}{\pi}} \approx 31.8$$

Die maximale Rechteckfläche ergibt sich also für einen Radius von $\underline{\underline{r \approx 31.8\,\mathrm{m}}}$.
Für die Länge einer Rechteckseite folgt damit: $l = 200 - \pi r = 200 - 100 = \underline{\underline{100\,\mathrm{m}}}$.

(b) **Zielfunktion:** Fläche des Ovals: $A(r, l) = 2rl + \pi r^2$.
Nebenbedingung: Länge der Bahn (wie unter (a)), also: $2l + 2\pi r = 400 \Leftrightarrow l = 200 - \pi r$.
Reduktion von $A(l, r)$ auf eine Variable und Optimierung:

$$A(r, l) = 2rl + \pi r^2 = 2r(200 - \pi r) + \pi r^2 = -\pi r^2 + 400r = A(r)$$

$$\Rightarrow \quad r_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{2 \cdot (-\pi)} = \underline{\frac{200}{\pi}} \approx 63.7$$

Die maximale Ovalfläche ergibt sich also für $\underline{\underline{r \approx 63.7\,\mathrm{m}}}$ Radius.
Und was erhalten wir für die Rechtecksseite? $l = 200 - \pi r = 200 - 200 = \underline{\underline{0}}$. D.h., die Ovalfläche ist genau dann maximal, wenn gar kein Rechteck eingebaut ist!

Bemerkung: Der Kreis ist im Übrigen die optimale Ebene Figur, wenn es darum geht, möglichst viel Fläche innerhalb eines bestimmten Umfangs zu haben!

Dieselbe Überlegung resp. Folgerung gibt es dann auch in drei Dimensionen: Bei vorgegebener Oberflächengrösse beinhaltet die Kugel am meisten Volumen. Oder umgekehrt: Bei vorgegebenem Volumen miniert die Kugel die Oberfläche. Das ist der geometrische Grund, weshalb schwebende Wassertropfen kugelrund sind.

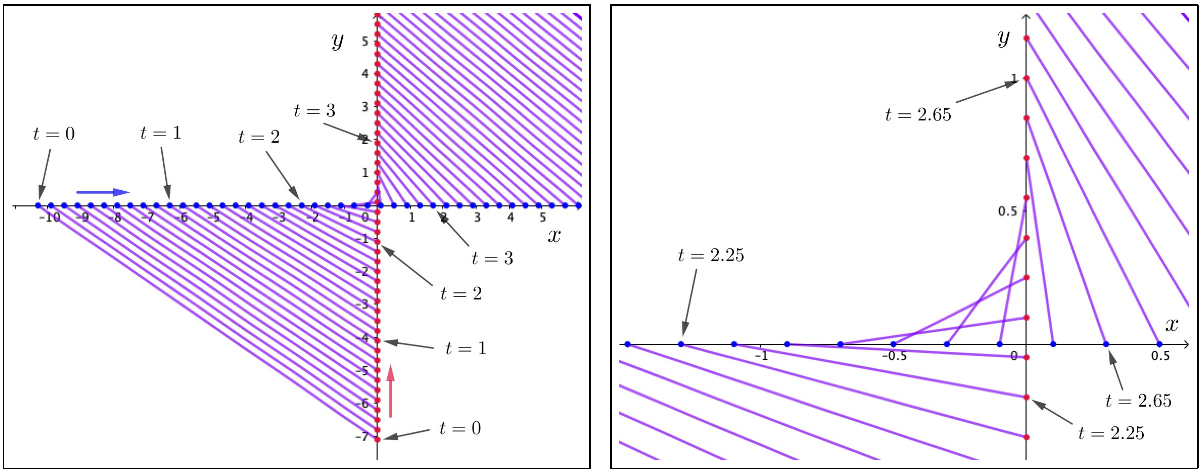
10. (a) Der auf der x-Achse wandernde Punkt P hat die Koordinaten $P(-10.3+4t, 0)$. Analog ist für Q auf der y-Achse $Q(0, -7.1+3t)$. Wir berechnen die Zeitpunkte der Durchgänge durch den Ursprung, indem wir die variable Koordinate gleich Null setzen:

$$\text{für } P: \quad -10.3+4t \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{10.3}{4} = \frac{103}{40} = \underline{2.575}$$

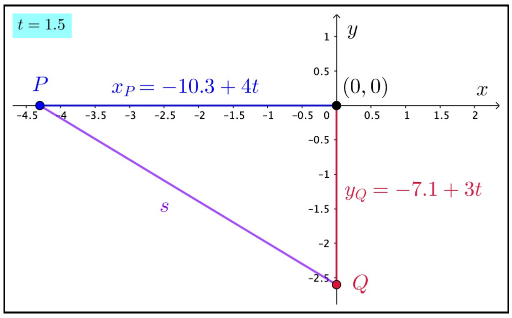
$$\text{für } Q: \quad -7.1+3t \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{7.1}{3} = \frac{71}{30} = \underline{2.3\overline{6}}$$

Somit passiert der Punkt Q den Ursprung $(0,0)$ kurz vor dem Punkt P.

(b) In `GeoGebra` ist zunächst ein Zeitschieberegler für t zu definieren. Danach fügt man P und Q direkt mittels Angabe ihrer Koordinaten in der Eingabezeile ein: `(-10.3+4t,0)` für P und `(0,-7.1+3t)` für Q. Zur Verdeutlichung der Problemstellung in (c) lohnt es sich zusätzlich die Verbindungsstrecke s zwischen P und Q einzutragen. Besonders schön wird's, wenn man bei P, Q und s die Spur einschaltet:



Links die Grossansicht mit Spurpunkten im Abstand von Zehntelsekunden. Wir haben unter (a) schon berechnet, dass die P und Q relativ kurz hintereinander den Nullpunkt durchqueren. Diese Phase ist von besonderem Interesse, weshalb ich sie rechts etwas vergrössert habe (Spurpunkte neu mit $0.05\,\text{s}$ Abstand). Man erkennt gut, dass Q den Ursprung vor P durchquert. Zudem wird klar, dass es zu einem bestimmten Zeitpunkt $2.25 < t < 2.65$ so etwas wie eine kürzeste Distanz s_{min} zwischen P und Q geben muss.



(c) Die Grafik zeigt, wie die Distanz s zwischen P und Q zu jedem beliebigen Zeitpunkt t zu berechnen ist. Wir verwenden den Satz des Pythagoras und schreiben:

$$s = \sqrt{x_P^2 + y_Q^2}$$

Da $x_P(t) = -10.3+4t$ und $y_Q(t) = -7.1+3t$ Funktionen von t sind, gilt das auch für s:

$$s(t) = \sqrt{(-10.3+4t)^2 + (-7.1+3t)^2} = \sqrt{\left(-\frac{103}{10}+4t\right)^2 + \left(-\frac{71}{10}+3t\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{40t-103}{10}\right)^2 + \left(\frac{30t-71}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\sqrt{(40t-103)^2 + (30t-71)^2}$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{1600t^2 - 8240t + 10\,609 + 900t^2 - 4260t + 5041} = \frac{1}{10}\sqrt{2500t^2 - 12\,500t + 15\,650}$$

Mit dieser Wurzel sieht die Sache aber recht unüblich aus. Sind wir überhaupt in der Lage diese Funktion zu optimieren? Scheinbar nicht...

Aber halt! Der Ausdruck unter der Wurzel ($2500t^2 - 12500t + 15650$) ist eine quadratische Funktion von t. Und die Wurzelfunktion hat die Eigenschaft, dass sie streng monoton verläuft. D.h., $\sqrt{y}$ nimmt für verschiedene Werte von y genau beim kleinsten y auch den kleinsten Wert an. Anstatt $\sqrt{2500t^2 - 12500t + 15650}$ dürfen wir zur Bestimmung von t_{min} also ebenso gut mit $2500t^2 - 12500t + 15650$ selber arbeiten. Das aber ist dann schnell erledigt:

$$t_{\text{min}} = \frac{-b}{2a} = \frac{12\,500}{2 \cdot 2500} = \underline{\frac{5}{2}}$$

Genau zum Zeitpunkt $t = 2.5\,\text{s}$ ist also die Distanz zwischen den beiden Punkten minimal. Es gilt nun noch diese minimale Distanz zu bestimmen. Dafür müssen wir diesen Zeitpunkt in die Abstandsfunktion einsetzen – diesmal allerdings unbedingt mit Wurzel!

Fürs Einsetzen wähle ich eine mir passend erscheinende Stelle (rechnerisch möglichst einfach) in der vorherigen Umformung von $s(t)$, nämlich:

$$s(t) = \frac{1}{10}\sqrt{(40t - 103)^2 + (30t - 71)^2}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} s_{\text{min}} = s(t_{\text{min}}) &= s\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{10}\sqrt{\left(40 \cdot \frac{5}{2} - 103\right)^2 + \left(30 \cdot \frac{5}{2} - 71\right)^2} \\ &= \frac{1}{10}\sqrt{(100 - 103)^2 + (75 - 71)^2} \\ &= \frac{1}{10}\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \frac{1}{10}\sqrt{25} = \frac{5}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Die Minimaldistanz zwischen P und Q beträgt $\frac{1}{2}$. Hier nochmals die Grafik von oben, wobei nun der Zeitpunkt des minimalen Abstandes markiert ist. Die grüne Strecke beträgt genau 0.5: