Übung QF 4: Tangentenaufgaben – LÖSUNGEN

Klasse 155c / AGe

1. Ansatz für die lineare Funktion durch $(0,3)$: $\quad g(x) = mx + 3$
   Schnittpunktgleichung: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 3x + 1 = mx + 3 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 + (3-m)x - 2 = 0$
   ... darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = (3-m)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = m^2 - 6m - 7 = (m-7)(m+1) \stackrel{!}{=} 0$
   $\Rightarrow \quad \underline{m_1 = -1}$ oder $\underline{m_2 = 7}$
   $\Rightarrow$ Es gibt 2 passende Tangenten: $\underline{\underline{t_1(x) = -x + 3}}$ und $\underline{\underline{t_2(x) = 7x + 3}}$

2. Ansatz für die quadratische Funktion: $f(x) = ax^2 - 2x + 5$
   Schnittpunktgl.: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad ax^2 - 2x + 5 = -3x + \frac{21}{4} \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + x - \frac{1}{4} = 0$
   ... darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot a \cdot (-\frac{1}{4}) = 1 + a \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = -1}$
   Die Parabel G_f mit Tangente g ist also gegeben durch $\underline{\underline{f(x) = -x^2 - 2x + 5}}$.
   Berührungspunkt: $-x^2 + x - \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \frac{1}{2})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{1}{2}}$
   $\Rightarrow \quad y = g(\frac{1}{2}) = -3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{21}{4} = \underline{\frac{15}{4}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})}}$

3. Gerade g : $\quad 2x - y = -2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 2 \quad \Rightarrow$ Steigung $m = 2$
   $\Rightarrow$ Ansatz für die Tangente: $\underline{t(x) = 2x + q}$
   Schnittpunktgl.: $f(x) = t(x) \quad \Rightarrow \quad 5x^2 - 3x + 2 = 2x + q \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 5x + 2 - q = 0$
   ... darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 5 \cdot (2 - q) = -15 + 20q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{q = \frac{3}{4}}$
   Berührungspunkt: $5x^2 - 5x + 2 - \frac{3}{4} = 5x^2 - 5x + \frac{5}{4} = 5(x - \frac{1}{2})^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{1}{2}}$
   $\Rightarrow \quad y = t(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \underline{\frac{7}{4}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})}}$

4. Die durch $y = s$ beschriebene Gerade ist eine **Horizontale**. Deshalb kann der Berührungspunkt mit der Parabel G_p nur in deren Scheitelpunkt liegen. Es gilt also lediglich die y-Koordinate dieses Scheitelpunkts zu bestimmen:
   $$u = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot 1} = -4 \quad \Rightarrow \quad v = p(-4) = (-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 1 = 16 - 32 + 10 = -6$$
   Für den Parameter s ist somit der Wert $\underline{\underline{s = -6}}$ zu wählen.

5. Ansatz für die QF: $\quad f(x) = a(x-3)^2 + 1 = ax^2 - 6ax + 9a + 1$
   Schnittpunktgl.: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad ax^2 - 6ax + 9a + 1 = -2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + (2 - 6a)x + 9a - 2 = 0$
   ... darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = (2 - 6a)^2 - 4 \cdot a \cdot (9a - 2) = -16a + 4 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = \frac{1}{4}}}$
   $\Rightarrow$ Die Parabel G_f mit Tangente g ist also gegeben durch $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 + 1 = \underline{\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}}$.
   Berührungspunkt: $\frac{1}{4}x^2 + (2 - 6 \cdot \frac{1}{4})\,x + 9 \cdot \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -1}$
   $\Rightarrow \quad y = g(-1) = -2 \cdot (-1) + 3 = \underline{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B(-1, 5)}}$

6. Ansatz für die QF: $\quad f(x) = -\frac{1}{2}(x - u)^2 + 3 = -\frac{1}{2}x^2 + ux - \frac{1}{2}u^2 + 3$
   Schnittpkt.gl.: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 + ux - \frac{1}{2}u^2 + 3 = x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 + (u-1)x - \frac{1}{2}u^2 + 5 = 0$
   ... darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = (u-1)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (5 - \frac{1}{2}u^2) = -2u + 11 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{u = \frac{11}{2}}}$

7. Ansatz für die QF mit Öffnung $\frac{1}{2}$ und y-Achsen-Schnitthöhe 1: $f(x) = \frac{2}{3}\,x^2 + bx + 1$
Schnittpkt.gl.: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,x^2 + bx + 1 = 2x - \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,x^2 + (b-2)x + \frac{9}{2} = 0$
...darf nur 1 Lsg. haben: $D = (b-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = b^2 - 4b - 5 = (b+1)(b-5) \overset{!}{=} 0$
$\Rightarrow \quad \underline{\underline{b_1 = -1 \quad \text{oder} \quad b_2 = 5}}$

8. Ansatz für die LF zur Gerade durch $P(\frac{1}{2}, 1)$: $g(x) = m(x - \frac{1}{2}) + 1 = mx - \frac{1}{2}\,m + 1$
Schnittpkt.gl.: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\,x^2 + 2x + \frac{5}{4} = mx - \frac{1}{2}\,m + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\,x^2 + (2-m)x + \frac{1+2m}{4} = 0$
...darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = (2-m)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1+2m}{4} = m^2 - \frac{14}{3}\,m + \frac{11}{3} = \frac{1}{3}\,(3m-11)(m-1) \overset{!}{=} 0$
$\Rightarrow \quad \underline{m_1 = \frac{11}{3} \quad \text{oder} \quad m_2 = 1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g_1(x) = \frac{11}{3}\,x - \frac{5}{6} \quad \text{oder} \quad g_2(x) = x + \frac{1}{2}}}$

9. Funktionsansatz für eine Tangente durch den Ursprung: $g(x) = mx$
Ausmultiplikation der QF: $f(x) = -\frac{2}{5}\,(x-2)^2 - 2 = -\frac{2}{5}\,x^2 + \frac{8}{5}\,x - \frac{18}{5}$
Schnittpkt.gl.: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{5}\,x^2 + \frac{8}{5}\,x - \frac{18}{5} = mx \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{5}\,x^2 + (\frac{8}{5} - m)\,x - \frac{18}{5} = 0$
...darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = (\frac{8}{5} - m)^2 - 4 \cdot (-\frac{2}{5}) \cdot (-\frac{18}{5}) = m^2 - \frac{16}{5}\,m + \frac{64}{25} - \frac{144}{25}$
$= m^2 - \frac{16}{5}\,m - \frac{16}{5} = \frac{1}{5}\,(5m^2 - 16m - 16) = \frac{1}{5}\,(5m+4)(m-4) \overset{!}{=} 0$
$\Rightarrow \quad \underline{m_1 = -\frac{4}{5} \quad \text{oder} \quad m_2 = 4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g_1(x) = -\frac{4}{5}\,x \quad \text{oder} \quad g_2(x) = 4x}}$
Berührungspunkt 1: $-\frac{2}{5}\,x^2 + (\frac{8}{5} + \frac{4}{5})\,x - \frac{18}{5} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 0$
$\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_1 = 3} \quad \Rightarrow \quad y_1 = g(3) = -\frac{4}{5} \cdot 3 = \underline{-\frac{12}{5}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B_1(3, -\frac{12}{5})}}$
Berührungspunkt 2: $h(x) = -\frac{2}{5}\,x^2 + (\frac{8}{5} - 4)\,x - \frac{18}{5} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = 0$
$\Leftrightarrow \quad (x+3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_2 = -3} \quad \Rightarrow \quad y_2 = g(-3) = 4 \cdot (-3) = \underline{-12} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B_2(-3, -12)}}$

10. g als lineare Funktion: $g: x+4y=6 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

Schnittpunkte ermitteln: $f(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 - x - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(x^2-3x-10) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_1 = -2 \quad \text{oder} \quad x_2 = 5}$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt 1: $y_1 = g(-2) = -\frac{1}{4}\cdot(-2) + \frac{3}{2} = \underline{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{B_1(-2,2)}$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt 2: $y_2 = g(5) = -\frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{3}{2} = \underline{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad \underline{B_2(5,\frac{1}{4})}$

Ansätze für die beiden Tangenten an f in diesen beiden Schnitt- resp. Berührungspunkten:

$t_1(x) = m(x+2)+2 = mx+2m+2$ und $t_2(x) = m(x-5)+\frac{1}{4} = mx-5m+\frac{1}{4}$

Ermittle Tangente an f in Schnittpunkt B_1, also mit $t_1(x)$:

Schnittpkt.gl.: $f(x)=t_1(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 - x - 1 = mx+2m+2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 - (m+1)\,x - 2m - 3 \overset{!}{=} 0$

…darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot(-2m-3)$

$$= m^2+4m+4 = (m+2)^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{m_1 = -2}$$

$\Rightarrow \quad t_1(x) = -2(x+2)+2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t_1(x) = -2x-2}$

Ermittle Tangente an f in Schnittpunkt B_2, also mit $t_2(x)$:

Schnittpkt.gl.: $f(x)=t_2(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 - x - 1 = mx-5m+\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 - (m+1)\,x + 5m - \frac{5}{4} \overset{!}{=} 0$

…darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot(5m-\frac{5}{4}) = m^2-3m+\frac{9}{4}$

$$= (m-\tfrac{3}{2})^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{m_2 = \tfrac{3}{2}}$$

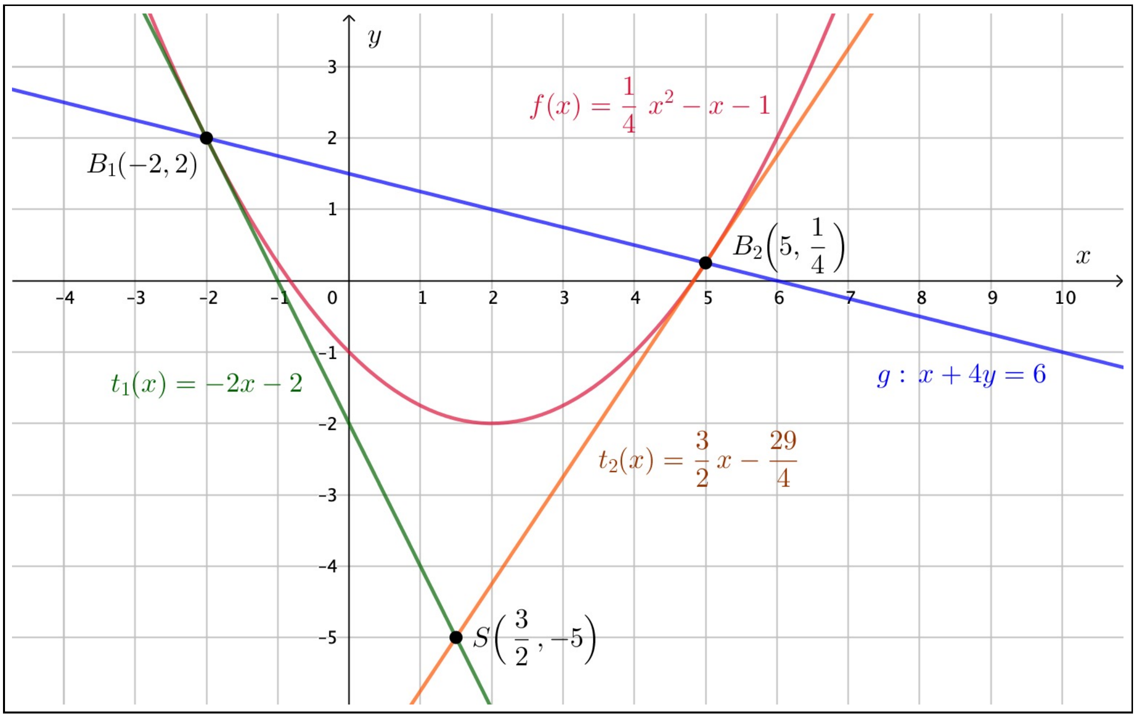
$\Rightarrow \quad t_2(x) = \frac{3}{2}(x-5)+\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t_2(x) = \frac{3}{2}x - \frac{29}{4}}$

Schliesslich können wir den Schnittpunkt der beiden Tangenten bestimmen:

$t_1(x) = t_2(x) \quad \Rightarrow \quad -2x-2 = \frac{3}{2}x - \frac{29}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_3 = \frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \quad y_3 = t_1(\frac{3}{2}) = -2\cdot\frac{3}{2} - 2 = -5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S(\frac{3}{2},-5)}}$

Da dies doch eine ziemlich umfangreiche Aufgabe war, habe ich dazu eine Grafik angefertigt:



11. Wandle zunächst $f(x)$ in die Scheitelpunktform um!

$$f(x) = \tfrac{1}{4}\,x^2 + x + \tfrac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad u = \tfrac{-b}{2a} = \tfrac{-1}{2\cdot\frac{1}{4}} = -2 \quad \Rightarrow \quad v = f(u) = f(-2) = \tfrac{1}{4}\cdot 4 - 2 + \tfrac{15}{4} = \tfrac{11}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f(x) = \tfrac{1}{4}(x+2)^2 + \tfrac{11}{4}}$$

Bei der gesuchten Parabel bleibt alles gleich, bis auf die x-Koordinate des Scheitelpunktes!

$\Rightarrow$ Ansatz für horizontal verschobene Parabel: $p(x) = \frac{1}{4}(x-u)^2 + \frac{11}{4} = \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,ux + \frac{1}{4}\,u^2 + \frac{11}{4}$

Schnittpkt.gl.: $p(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,ux + \frac{1}{4}\,u^2 + \frac{11}{4} = \frac{3}{2}\,x - 4$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}\,x^2 - (\tfrac{1}{2}\,u + \tfrac{3}{2})\,x + \tfrac{1}{4}\,u^2 + \tfrac{27}{4} \stackrel{!}{=} 0$$

…darf nur 1 Lsg. haben: $D = b^2 - 4ac = (\frac{1}{2}\,u + \frac{3}{2})^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{4}\,u^2 + \frac{27}{4}) = \frac{3}{2}\,u + \frac{9-27}{4}$

$$= \tfrac{3}{2}\,(u-3) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u = 3}$$

Bei der Parabel f war $u = -2$, damit sich aber eine Tangentensituation mit g ergibt, muss $u = 3$ sein. Das bedeutet, die ursprüngliche Parabel f muss $\underline{\underline{\text{um 5 nach rechts}}}$ verschoben werden!

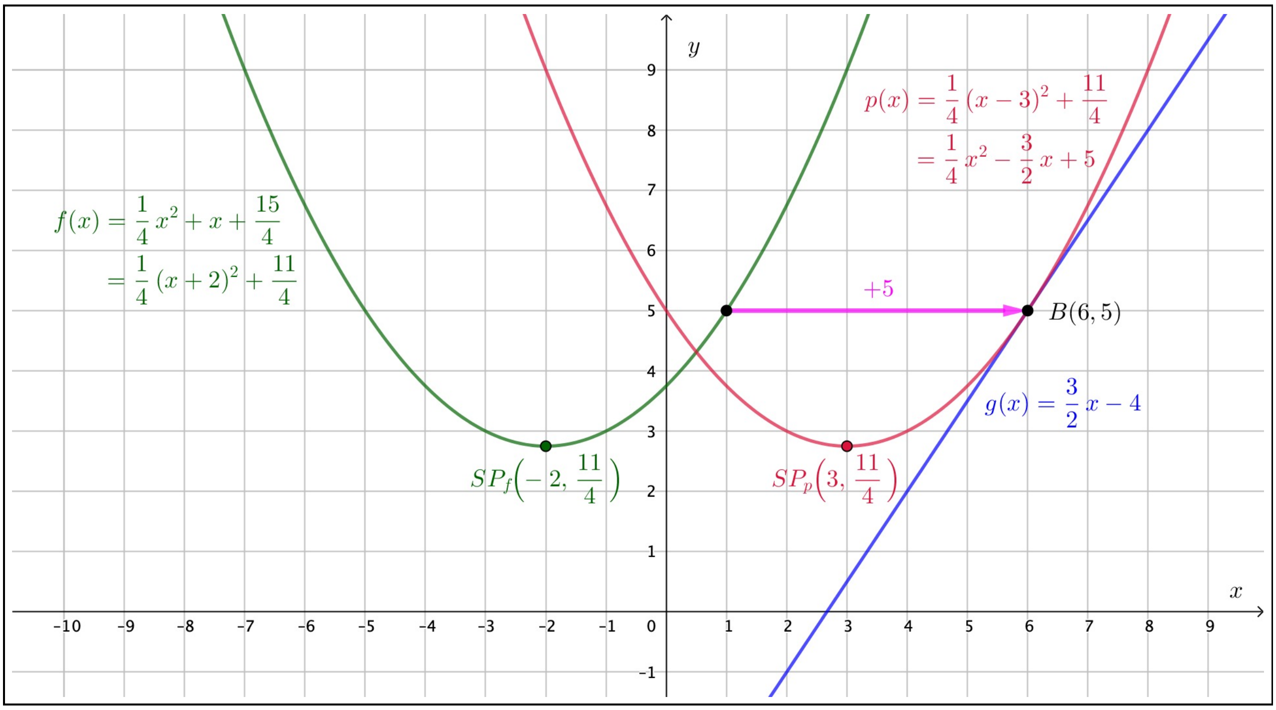
Zum Schluss bestimmen wir den Berührungspunkt B:

Parabel mit Tangente g: $p(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{11}{4} = \underline{\frac{1}{4}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x + 5}$

$$\Rightarrow \quad \text{Schnittpkt.gl.:} \quad p(x) = g(x)\tfrac{1}{4}\,x^2 - \tfrac{3}{2}\,x + 5 = \tfrac{3}{2}\,x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}\,(x-6)^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 6}$$

$$\Rightarrow \quad y = g(6) = \tfrac{3}{2}\cdot 6 - 4 = \underline{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B(6,5)}}$$

Zum Abschluss dieser Aufgabe die zugehörige Grafik:



12. Ansatz für die lineare Funktion zur Gerade durch $P(1,1)$: $\quad g(x) = m(x-1)+1 = mx - m + 1$

Schnittpkt.gl.: $\quad f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad -x^2 + c = mx - m + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - mx + c + m - 1 = 0$

... darf nur 1 Lsg. haben: $\quad D = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (c+m-1) = m^2 + 4m + 4(c-1) \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \quad m_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(c-1)}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1-(c-1)}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2-c}$$

Damit dieser Ausdruck existiert, muss $\underline{\underline{c \leq 2}}$ sein. Im Fall $c = 2$ gibt es nur eine einzige passende Steigung m. Dann liegt offenbar $P(1,1)$ auf der Parabel f und somit gibt es auch nur eine einzige Tangente.

Für alle $c > 2$ liegt der Punkt $P(1,1)$ innerhalb der Parabel, sodass keine Tangente an f durch diesen Punkt verlaufen kann.

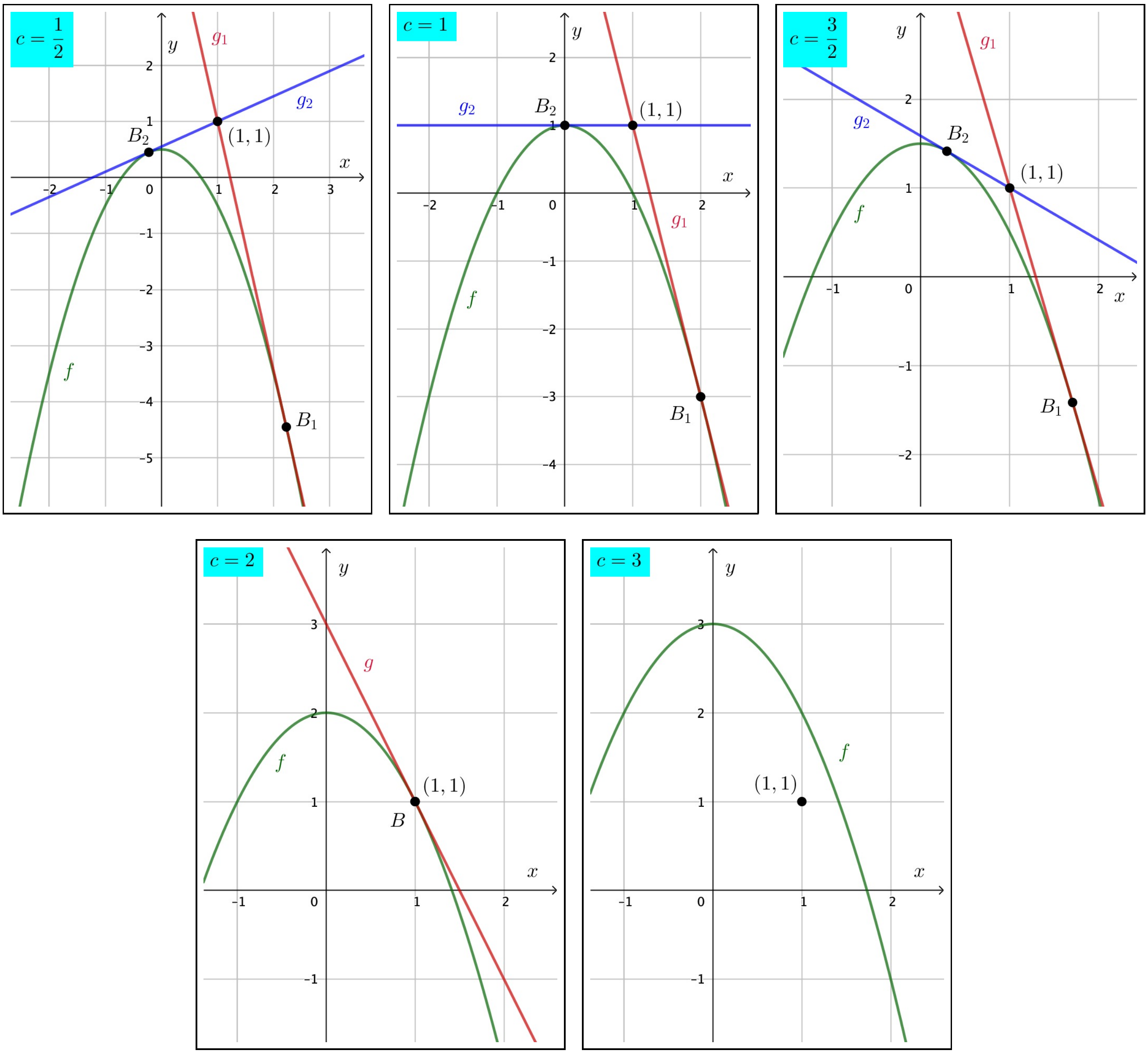
Für alle $c < 2$ liegt der Punkt $P(1,1)$ ausserhalb der Parabel, sodass sich eben zwei Tangenten (mit unterschiedlichen Steigungen m) ergeben.

Für die Gleichungen der beiden Tangenten erhalten wir:

$$g_1(x) = m_1(x-1)+1 = (-2-2\sqrt{2-c})(x-1)+1 = \underline{\underline{(-2-2\sqrt{2-c})x + 3 + 2\sqrt{2-c}}}$$

$$g_2(x) = m_2(x-1)+1 = (-2+2\sqrt{2-c})(x-1)+1 = \underline{\underline{(-2+2\sqrt{2-c})x + 3 - 2\sqrt{2-c}}}$$

Betrachten wir schliesslich noch die Grafiken zu verschiedenen Werten von c:



13. Mit $P(0,3)$ auf der Parabel folgt für den QF-Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + 3$

Aus jeder der beiden Geraden, die Tangenten an f sein sollen, erhalten wir eine Gleichung für a und b:

Schnittpkt.gl. 1: $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + 3 = 6x - \frac{19}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + (b-6)x + \frac{25}{2} = 0$

...darf nur 1 Lsg. haben: $D = (b-6)^2 - 4 \cdot a \cdot \frac{25}{2} = \underline{b^2 - 12b + 36 - 50a \stackrel{!}{=} 0}$

Schnittpkt.gl. 2: $f(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + 3 = -10x - \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + (b+10)x + \frac{9}{2} = 0$

...darf nur 1 Lsg. haben: $D = (b+10)^2 - 4 \cdot a \cdot \frac{9}{2} = \underline{b^2 + 20b + 100 - 18a \stackrel{!}{=} 0}$

Damit haben wir ein Gleichungssystem in den Unbekannten a und b erhalten. Sicher eliminieren wir zuerst den Parameter a, weil er nur linear auftritt ($\text{kgV}(18,50) = 450$):

$$\left| \begin{array}{c} b^2 - 12b + 36 - 50a = 0 \\ b^2 + 20b + 100 - 18a = 0 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -9b^2 + 108b - 324 + 450a = 0 \\ 25b^2 + 500b + 2500 - 450a = 0 \end{array} \right|$$

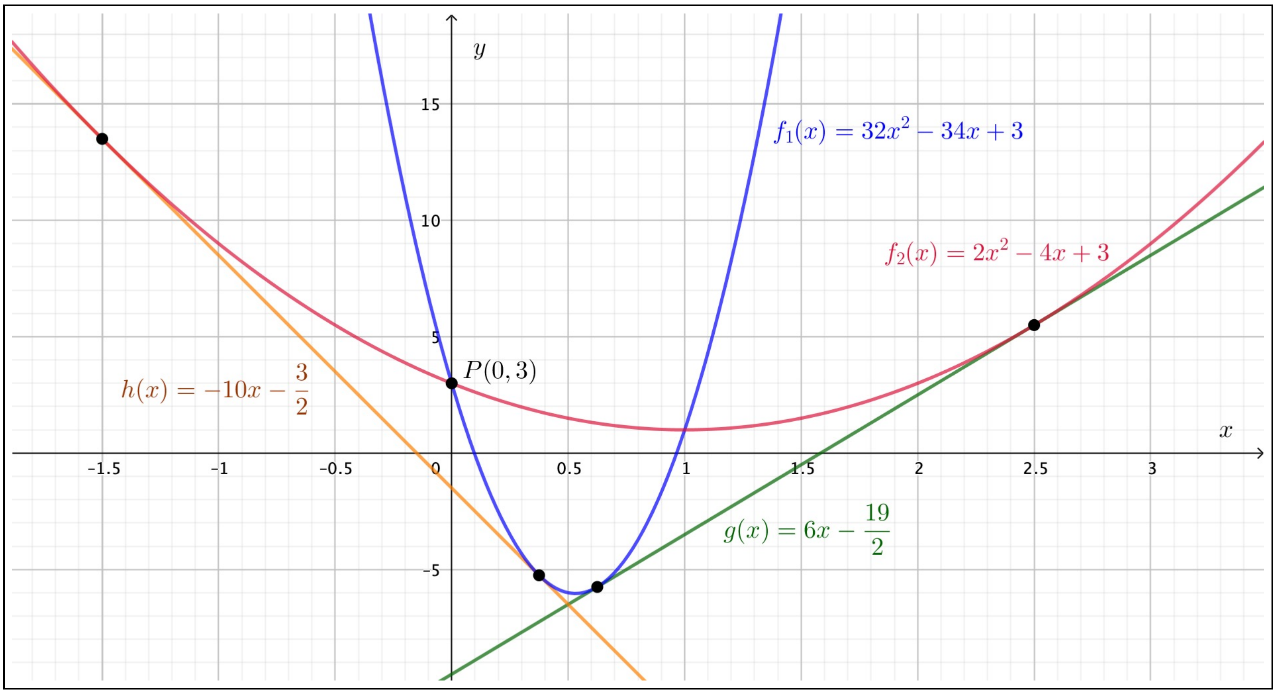
$$\Rightarrow \quad 16b^2 + 608b + 2176 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16(b+34)(b+4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b_1 = -34 \quad \text{oder} \quad b_2 = -4}$$

In beiden Fällen schliessen wir auf den Parameter a und erhalten so die vollständige Funktion:

- $50a_1 = b_1^2 - 12b_1 + 36 = 34^2 + 12 \cdot 34 + 36 = 4 \cdot (17^2 + 3 \cdot 34 + 9) = 4 \cdot (289 + 102 + 9) = 4 \cdot 400$
  $\Leftrightarrow \quad 50a_1 = 1600 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_1 = 32} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_1(x) = 32x^2 - 34x + 3}}$
- $50a_2 = b_2^2 - 12b_2 + 36 = 16 + 48 + 36 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_2 = 2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_2(x) = 2x^2 - 4x + 3}}$

Wir haben somit zwei Parabeln gefunden, zu denen g und h Tangenten bilden. Schauen wir uns die zugehörige Grafik an.

Achtung! Die Grafik ist vertikal anders skaliert als horizontal, sodass wir die entscheidende Region gut sehen können:[1]



[1] In GeoGebra können wir diese unterschiedliche Skalierung einfach durch einen Rechtsklick auf einen leeren Bereich des Koordinatensystems erreichen und dann unter `xAchse : yAchse` das Skalierungsverhältnis auswählen.