Übung QF 3: QF-Formen und Funktionsbestimmung – LÖSUNGEN

Klasse 155c / AGe

1. Bestimme jeweils die anderen beiden QF-Formen (falls möglich):

$$a(x) = -5x^2 + 2x + 3 = \underline{\underline{-5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}} = \underline{\underline{-5\left(x - \frac{3}{5}\right)(x-1)}}$$

$$b(x) = \frac{1}{6}(x-2)(x-8) = \underline{\underline{\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}}} = \underline{\underline{\frac{1}{6}(x-5)^2 - \frac{3}{2}}}$$

$$c(x) = 2(x-5)^2 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{2x^2 - 20x + \frac{99}{2}}} = \underline{\underline{2\left(x - \frac{9}{2}\right)\left(x - \frac{11}{2}\right)}}$$

$$d(x) = -\frac{8}{5}(x+4)(x+5) = \underline{\underline{-\frac{8}{5}x^2 - \frac{72}{5}x - 32}} = \underline{\underline{-\frac{8}{5}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}}}$$

$$e(x) = 5x^2 + 55x + 140 = \underline{\underline{5\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}}} = \underline{\underline{5(x+7)(x+4)}}$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^2 + \frac{4}{3} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{12}}} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\left(x + \frac{7}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)}}$$

$$g(x) = 2x^2 + 12x - 162 = \underline{\underline{2(x+3)^2 - 180}} = \underline{\underline{2\left(x + 3 + 3\sqrt{10}\right)\left(x + 3 - 3\sqrt{10}\right)}}$$

$h(x) = 8\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{2} = \underline{\underline{8x^2 - 12x + 7}}$ und <u>keine Nullstellenform, da keine NS!</u>

$$i(x) = -4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-4x^2 + 8x + 5}} = \underline{\underline{-4(x-1)^2 + 9}}$$

$j(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2 = \underline{\underline{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}}$ SPF und NSF sind in diesem Fall identisch!

$$k(x) = x^2 + 3\sqrt{7}\,x - 126 = \underline{\underline{\left(x + \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \frac{567}{4}}} = \underline{\underline{\left(x + 6\sqrt{7}\right)\left(x - 3\sqrt{7}\right)}}$$

$l(x) = 7x^2 - 63 = \underline{\underline{7x^2 - 63}} = \underline{\underline{7(x+3)(x-3)}}$ SPF stimmt mit NF überein: $l(x) = 7(x-0)^2 - 63$

2. Zur quadratischen Ergänzung nehmen wir jeweils den Vorfaktor b des linearen Glieds bx in der NF, halbieren ihn und quadrieren das Resultat. So entsteht eine Zahl, die für das korrekte Quadrat in einer zu $x^2 + bx$ gehörenden binomischen Formel steht. Danach können wir diese binomische Formel anwenden:

$$f(x) = x^2 - 6x - 5 = x^2 - 6x + 9 - 9 - 5 = \underline{\underline{(x-3)^2 - 14}}$$

$$g(x) = x^2 - 6x + 9 = \underline{\underline{(x-3)^2}}\ (+0)$$

$$h(x) = 2x^2 - 10x - 16 = 2\left(x^2 - 5x - 8\right) = 2\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - 8\right)$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{57}{4}\right) = \underline{\underline{2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{57}{2}}}$$

$$i(x) = 2x^2 - 7x - 5 = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} - \frac{49}{16} - \frac{5}{2}\right)$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{89}{16}\right) = \underline{\underline{2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{89}{8}}}$$

3. *Bestimmung quadratischer Funktionen aufgrund verschiedener Bedingungen*

(a) Ansatz SPF: $f(x) = a(x-2)^2 - 4$.

Setze $(-1, 5)$ ein: $a(-3)^2 - 4 = 9a - 4 \stackrel{!}{=} 5 \Rightarrow a = 1$.

Aumultiplizieren für NF: $f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = \underline{\underline{x^2 - 4x}}$.

Faktorisieren für NSF: $f(x) = x^2 - 4x = \underline{\underline{x(x-4)}}$. (NS sind $x = 0$ und $x = 4$.)

(b) Ansatz SPF: $f(x) = a(x - \frac{7}{3})^2 + v$.

Setze die beiden Punkte $(0,0)$ und $(\frac{2}{3}, 4)$ ein $\Rightarrow$ 2x2-Gleichungssystem für a und v:

$$\left| \begin{array}{c} a\left(0 - \frac{7}{3}\right)^2 + v = 0 \\ a\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{3}\right)^2 + v = 4 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 49a + 9v = 0 \\ 25a + 9v = 36 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 24a = -36 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{3}{2}$$

Durch Zurückeinsetzen folgt: $v = \frac{49}{6}$.

Aumultiplizieren und zusammenfassen: $f(x) = -\frac{3}{2}(x - \frac{7}{3})^2 + \frac{49}{6} = -\frac{3}{2}\,x^2 + 7x - \frac{49}{6} + \frac{49}{6} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}\,x^2 + 7x}}$.

P.S.: Im Prinzip hätte man sich hier einen clevereren neuen Ansatz überlegen können. Für eine QF, deren durch den Ursprung verläuft, lautet die NSF: $f(x) = ax(x - x_1)$. Dabei muss aber die Nullstelle x_1 gerade den doppelten Wert der x-Koordinate des Scheitelpunktes aufseien, denn diese liegt ja genau in der Mitte der beiden Nullstellen, hier also genau zwischen $x = 0$ und $x = x_1$. Es gilt somit $x_1 = 2u = 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$ und somit hätten wir ansetzen können:

$$f(x) = ax\left(x - \frac{14}{3}\right)$$

So bräuchten wir kein Gleichungssystem mehr, sondern hätten nun nur noch $(\frac{2}{3}, 4)$ einsetzen müssen.

(c) Ansatz NSF: $f(x) = a(x-2)(x-4)$. $(-1, 30)$ einsetzen $\Rightarrow f(-1) = a(-3)(-5) = 15a \stackrel{!}{=} 30 \Leftrightarrow a = 2$.

Scheitelpunkt: $u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \Rightarrow v = f(3) = 2(3-2)(3-4) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 2(x-3)^2 - 2}}$.

(d) Ansatz SPF: $f(x) = a(x+4)^2 + v$. Setze $(0, 14)$ und $(-2, -10)$ ein:

$$\left| \begin{array}{c} a(0+4)^2 + v = 14 \\ a(-2+4)^2 + v = -10 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 16a + v = 14 \\ 4a + v = -10 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 12a = 24 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Zurückeinsetzen liefert: $v = -18 \Rightarrow f(x) = 2(x+4)^2 - 18$.

Ausmultiplizieren für NF: $f(x) = 2(x+4)^2 - 18 = 2(x^2 + 8x + 16) - 18 = \underline{\underline{2x^2 + 16x + 14}}$.

Faktorisieren für NSF: $f(x) = 2x^2 + 16x + 14 = 2(x^2 + 8x + 7) = \underline{\underline{2(x+1)(x+7)}}$.

(e) Ansatz SPF: $f(x) = a(x-u)^2 + 5$. Setze die anderen beiden Punkte ein:

$$\left| \begin{array}{c} a(-1-u)^2 + 5 = -3 \\ a(5-u)^2 + 5 = 3 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a(-1-u)^2 = -8 \\ a(5-u)^2 = -2 \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} \quad \Rightarrow \quad ① : ② = \frac{(-1-u)^2}{(5-u)^2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$\Rightarrow \quad (-1-u)^2 = 4(5-u)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2u + u^2 = 100 - 40u + 4u^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3u^2 - 42u + 99 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2 - 14u + 33 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-3)(u-11) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 3, 11$$

Es gibt also zwei verschiedene Fälle. In beiden Fällen finden wir das zugehörige a durch zurückeinsetzen:

<u>Fall $u = 3$:</u> $a(-1-3)^2 + 5 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = -\frac{1}{2}\,(x-3)^2 + 5$

Bestimme NS: $-\frac{1}{2}\,(x-3)^2 + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{10}$

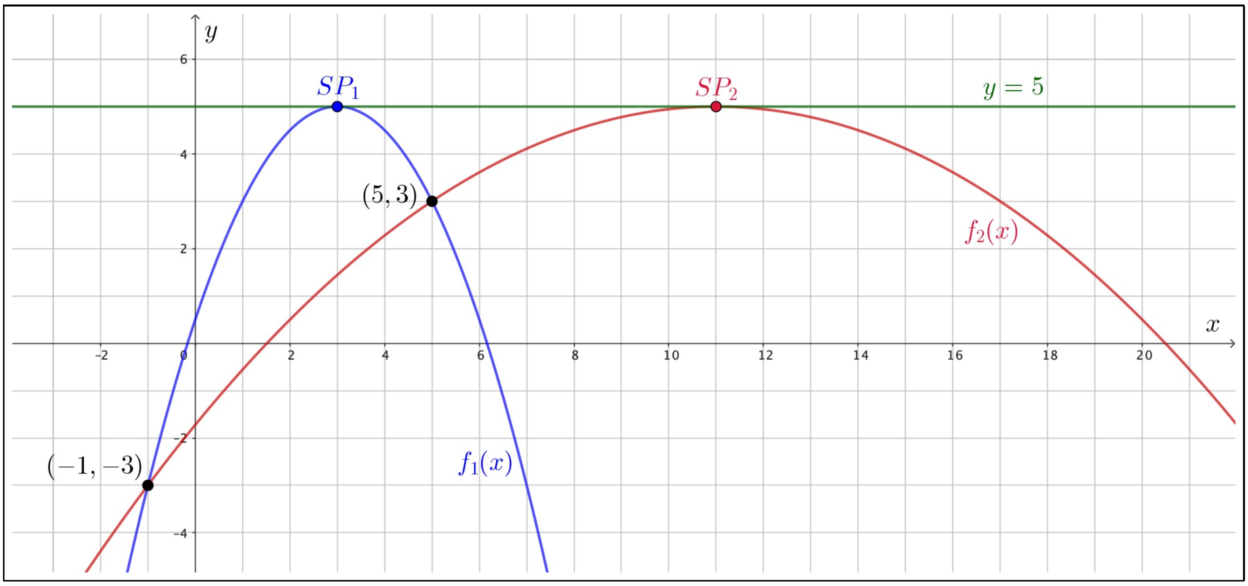
$$\Rightarrow \quad \text{NSF:} \quad \underline{\underline{f_1(x) = -\frac{1}{2}\left(x - 3 + \sqrt{10}\right)\left(x - 3 - \sqrt{10}\right)}}$$

<u>Fall $u=11$:</u> $\quad a(-1-11)^2+5=-3 \quad \Leftrightarrow \quad a=-\dfrac{8}{144}=-\dfrac{1}{18} \quad \Rightarrow \quad f_2(x)=-\dfrac{1}{18}(x-11)^2+5$

Best. NS: $\quad -\dfrac{1}{18}(x-11)^2+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-11)^2=90 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2}=11\pm 3\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ NSF: $\quad \underline{\underline{f_2(x)=-\dfrac{1}{18}\left(x-11+3\sqrt{10}\right)\left(x-11-3\sqrt{10}\right)}}$

Bei derart anspruchsvollen Resultaten empfiehlt sich auf jeden Fall die Überprüfung in GeoGebra, auch um zu verstehen, wie die zwei Lösungen zustande kommen und was sie miteinander zu tun haben:



Wir bemerken zunächst die zwei vorgegebenen Punkte $(-1,-3)$ und $(5,3)$ sowie die Horizontale $y=5$, die den Scheitelpunkt enthalten soll. So wird klar, dass es eben zwei Lösungen geben kann, eine mit dem Scheitelpunkt "zwischen" den beiden Punkten und eine, bei der die beiden Punkte auf derselben Seite des Scheitelpunktes liegen.

(f) Es gibt eine 3x3-Gleichungssystem zu lösen. Das geht auch mit der SPF $f(x)=a(x-u)^2+v$ als Ansatz:

$$\left|\begin{array}{r} a(-2-u)^2+v=-8 \\ a(1-u)^2+v=4 \\ a\left(\frac{5}{2}-u\right)^2+v=\frac{13}{4} \end{array}\right| \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} ②-① \\ ②-③ \end{array} \left|\begin{array}{r} a(1-u)^2-a(-2-u)^2=12 \\ a(1-u)^2-a\left(\frac{5}{2}-u\right)^2=\frac{3}{4} \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{r} a(1-2u+u^2-4-4u-u^2)=12 \\ a\left(1-2u+u^2-\frac{25}{4}+5u-u^2\right)=\frac{3}{4} \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{r} a(-3-6u)=12 \\ a\left(-\frac{21}{4}+3u\right)=\frac{3}{4} \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{r} a(-1-2u)=4 \\ a(-7+4u)=1 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{-1-2u}{-7+4u}=4 \quad \Rightarrow \quad -1-2u=-28+16u \quad \Leftrightarrow \quad u=\frac{27}{18}=\frac{3}{2}$$

Zurückeinsetzen: $\quad a\left(-1-2\cdot\dfrac{3}{2}\right)=4 \quad \Leftrightarrow \quad a=-1$

Zurückeinsetzen: $\quad -1\left(1-\dfrac{3}{2}\right)^2+v=4 \quad \Leftrightarrow \quad v=\dfrac{17}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x)=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{17}{4}}}$

Wenn dir das so zu kompliziert ist, kannst du das 3x3-System aber ebenso gut mit der NF ansetzen und hinterher wie gewohnt die NF in die SPF umwandeln.

(g) Ansatz SPF: $f(x) = a(x-u)^2 + 3$. Aus den anderen beiden Punkten folgt:

$$\left| \begin{array}{c} a(0-u)^2 + 3 = 0 \\ a\left(\frac{3}{4} - u\right)^2 + 3 = \frac{9}{4} \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} au^2 = -3 \\ a\left(\frac{3}{4} - u\right)^2 = -\frac{3}{4} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{\left(\frac{3}{4} - u\right)^2} = \frac{-3}{-\frac{3}{4}} = 4$$

$$\Rightarrow \quad u^2 = 4\left(\frac{3}{4} - u\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = \frac{9}{4} - 6u + 4u^2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 2u + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4u^2 - 8u + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2u-1)(2u-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

Es gibt also wieder zwei Lösungen, wie schon bei Aufgabe (e) – und aus genau demselben Grund, wie die nachfolgende Grafik zeigt. Bestimmen wir zunächst noch die zugehörigen Normalformen:

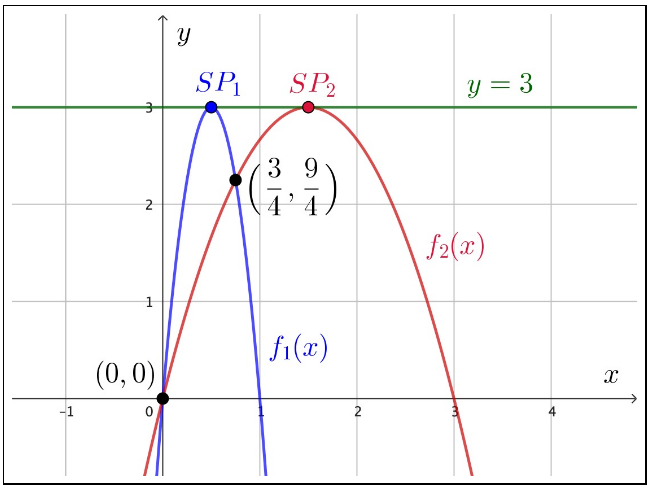
$$\underline{\text{Fall } u = \frac{1}{2}\text{:}} \quad a\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{4} + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -12$$

$$\Rightarrow \quad f_1(x) = -12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \underline{\underline{-12x^2 + 12x}}$$

$$\underline{\text{Fall } u = \frac{3}{2}\text{:}} \quad a\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9a}{4} + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad f_2(x) = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 3 = \underline{\underline{-\frac{4}{3}x^2 + 4x}}$$

Es ist klar, dass beide Lösungen $c = 0$ ausfweisen, denn die Parabeln verlaufen durch den Ursprung.



(h) Erneut arbeiten wir mit einem 3x3-Gleichungssystem. Da wir solche Gleichungssysteme bis anhin noch nicht so oft mit einem Funktionsansatz in SPF gelöst habe, arbeite ich hier wieder damit (wie auch schon in Aufgabe (f)):

$$\left| \begin{array}{c} a(-2-u)^2 + v = 2 \\ a(1-u)^2 + v = 5 \\ a(4-u)^2 + v = -1 \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} ② - ① \\ ① - ③ \end{array} \left| \begin{array}{c} a(1-u)^2 - a(-2-u)^2 = 3 \\ a(-2-u)^2 - a(4-u)^2 = 3 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a(1 - 2u + u^2 - 4 - 4u - u^2) = 3 \\ a\left(4 + 4u + u^2 - 16 + 8u - u^2\right) = 3 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a(-3-6u) = 3 \\ a\left(-12 + 12u\right) = 3 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a(1+2u) = -1 \\ a\left(4 - 4u\right) = -1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{1+2u}{4-4u} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2u = 4 - 4u \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2}$$

Zurückeinsetzen: $\quad a\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$

Zurückeinsetzen: $\quad -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + v = 5 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{41}{8} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{41}{8}}}$

4. *Spiegelungen, Verschiebungen und Streckungen*

(a) Zu beiden Parabeln gehört der Öffnungsparameter $a = 1$, der alleine über die Parabelform entscheidet. Die anderen Parameter b und c in der Normalform sorgen lediglich für die Verschiebung der Parbel, ändern aber nichts an der Form.

Am einfachsten wandeln wir $g(x)$ in die SPF um. Das geht z.B. sehr direkt mit quadratischer Ergänzung:

$$g(x) = x^2 - 6x + 7 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 = (x-3)^2 - 9 + 7 = (x-3)^2 - 2$$

Somit muss der G_f um 3 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach unten verschoben werden, um auf dem G_g zu liegen zu kommen.

(b) i. Spiegeln an der y-Achse lässt die Öffnung unverändert, ebenso den Schnittpunkt mit der y-Achse. D.h., die Parameter a und c bleiben gleich.

Der Parameter b wechselt hingegen sein Vorzeichen, denn wenn die Originalparabel die y-Achse mit der Steigung b durchquert, dann passiert das Bild die y-Achse mit der entsprechend negativen Steigung $-b$.

Die Antwort lautet somit ganz einfach:

$$h(x) = 3x^2 - 6x + 4 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{h'(x) = 3x^2 + 6x + 4}}$$

ii. Spiegeln wir eine Funktion resp. einen Funktionsgraphen an der x-Achse, so entspricht dies einfach einer Multiplikation mit Faktor -1, denn alle positiven Funktionswerte werden entsprechend negativ et vice versa:

$$h(x) = 3x^2 - 6x + 4 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{h''(x) = -3x^2 - 6x - 4}}$$

(c) Wir führen die Modifikationen eine nach der anderen durch:

Start bei der Normalparabel:	$f(x) = x^2$
Vertikale Streckung mit Faktor $\frac{5}{2}$:	$g(x) = \frac{5}{2}x^2$
Horizontale Verschiebung um $\frac{3}{2}$ nach links:	$g(x) = \frac{5}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$
Spiegelung an der x-Achse:	$g(x) = -\frac{5}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$
Verschiebung um $\frac{11}{4}$ nach unten:	$\underline{\underline{g(x) = -\frac{5}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}}}$

Die letzte Angabe ist bereits die Scheitelpunktform. Zur Bestimmung der Normalform multiplizieren wir aus:

$$g(x) = -\frac{5}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} = -\frac{5}{2}\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{11}{4} = \underline{\underline{-\frac{5}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - \frac{67}{8}}}$$

(d) Da bei der Spiegelung am Scheitelpunkt eben dieser an Ort und Stelle bleibt, sollten wir zunächst in die Scheitelpunktform umrechnen:

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1 \quad \Rightarrow \quad v = f(1) = -2 + 4 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad SP(1,1) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -2(x-1)^2 + 1$$

Nun können wir am Scheitelpunkt spiegeln. Das ist in der SPF nur eine Änderung des Vorzeichens der Öffnung a:

$$f'(x) = 2(x-1)^2 + 1$$

Die Spiegelung an der y-Achse verändert in der SPF lediglich das Vorzeichen der x-Koordinate des Scheitelpunktes. Damit folgt:

$$f''(x) = 2(x+1)^2 + 1 = 2\left(x^2 + 2x + 1\right) + 1 = \underline{\underline{2x^2 + 4x + 3}}$$