Übung QF 2: Funktionsmodifikation mit Parametern – LÖSUNGEN

Klasse 155c / AGe

1. *Ein erstes Modifikationsbeispiel*

   Wir folgen der üblichen Platzierung unserer vier Streckungsparameter: $f(x) = A \cdot f\big(B(x-C)\big) + D$ und erhalten der Aufgabenstellung folgend:

   $$\underline{\underline{f(x) = 3\sqrt{4(x+5)} + 1}}$$

   Wir können an dieser Stelle nachvollziehen, dass es Funktionen gibt, bei denen mehrere Parameter dieselbe Modifikation bewirken können. Hier z.B. könnte man teilweise radizieren. Dann wird aus dem Faktor 4 unter der Wurzel ein zusätzlicher Faktor 2 vor der Wurzel:

   $$f(x) = 3\sqrt{4(x+5)} + 1 = 3 \cdot 2\sqrt{x+5} + 1 = 6\sqrt{x+5} + 1$$

   D.h., bei der Wurzelfunktion entspricht eine horizontale Stauchung mit dem Faktor 4 einer vertikalen Streckung mit dem Faktor 2. In GeoGebra kann man sich leicht davon überzeugen, dass dies stimmt.

2. *Ansatz für eine Gerade mit vorgegebener Steigung durch einen bestimmten Punkt*

   (a) Wir setzen den Punkt $P(13,-6)$ in die Geradengleichung ein und bestimmen so den y-Achsenabschnitt q:

   $$g(13) = -\frac{3}{4}\,13 + q = -\frac{39}{4} + q \stackrel{!}{=} -6 \quad\Rightarrow\quad q = \frac{15}{4} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{g(x) = -\frac{3}{4}\,x + \frac{15}{4}}}$$

   (b) Die um x_P nach rechts und um y_P nach oben verschobene Geradengleichung lautet:

   $$f(x) = mx \qquad \rightarrow \qquad g(x) = m(x - x_P) + y_P$$

   (c) Nun können wir ohne zu rechnen direkt die Gerade mit Steigung $m = -\frac{3}{4}$ durch den Punkt $P(13,-6)$ notieren:

   $$\underline{\underline{g(x) = -\frac{3}{4}\,(x-13) - 6}}$$

   (d) Natürlich sollten die beiden Resultate aus (a) und (c) übereinstimmen, denn es soll ja dieselbe Gerade beschrieben werden. Zur Kontrolle multiplizieren wir das Resultat aus (c) aus:

   $$g(x) = -\frac{3}{4}\,(x-13) - 6 = -\frac{3}{4}\,x + \frac{39}{4} - 6 = -\frac{3}{4}\,x + \frac{15}{4} \quad \checkmark$$

3. *Die Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion*

   (a) Die gemäss den Angaben modifizierte quadratische Funktion lautet:

   $$\text{Scheitelpunktsform:} \qquad \underline{\underline{f(x) = a(x-u)^2 + v}}$$

   Anmerkung: Auch hier braucht es zur Beschreibung der QF nur drei Parameter anstelle von vier, wie wir aufgrund unserer allgemeinen Modifikationsüberlegungen vielleicht erwarten würden. Der Grund ist derselbe wie schon bei der Wurzelfunktion in Aufgabe 1: Eine vertikale Streckung der Parabel kann ebenso gut als horizontale Stauchung aufgefasst werden. Daher entfällt die Notwendigkeit von vier Parametern zur Beschreibung aller möglichen Modifikationen. Es genügen deren drei.

(b) Die modifizierte Funktionsgleichung lautet:

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{2}{3}\,(x-2)^2 + 6}}$$

(c) Die Umwandlung in die Normalform ist denkbar einfach: Ausmultiplizieren!

$$f(x) = -\frac{2}{3}\,(x-2)^2 + 6 = -\frac{2}{3}\left(x^2 - 4x + 4\right) + 6 = -\frac{2}{3}\,x^2 + \frac{8}{3}\,x - \frac{8}{3} + 6 = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\,x^2 + \frac{8}{3}\,x + \frac{10}{3}}}$$

Zur Bestimmung der NSF muss faktorisiert werden:

$$f(x) = -\frac{2}{3}\,x^2 + \frac{8}{3}\,x + \frac{10}{3} = -\frac{2}{3}\left(x^2 - 4x - 5\right) = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\,(x+1)(x-5)}}$$

(d) Es handelt sich um eine nach oben offene Parabel ($a = 2$), deren Scheitelpunkt bereits oberhalb der x-Achse, nämlich auf der Höhe $v = 1$ liegt. Da kann die Parabel keine Schnittpunkte mit der x-Achse mehr aufweisen.