Übung QF 1: Repetition – LÖSUNGEN

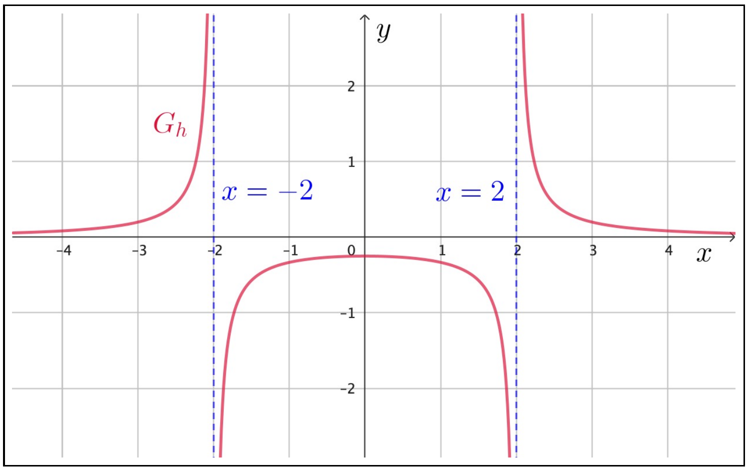
Klasse 155c / AGe

1. In die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ lassen sich nur positive reelle Zahlen und die 0 einsetzen und es entstehen auch nur solche Zahlen, da die Quadratwurzel per Definition ≥ 0 ist $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{D}_f = \mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+}}$.

   Auch in die zweite Funktion $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ dürfen wir wegen der Wurzel nur positive Zahlen einsetzen. Die 0 ist jetzt nicht mehr erlaubt, da sonst durch 0 geteilt würde. Da die Wurzel positiv ist und selber alle Werte in $\mathbb{R}^+$ durchläuft, enthält auch der Wertebereich alle diese Zahlen $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{D}_g = \mathbb{W}_g = \mathbb{R}^+}}$.

   Bei $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$ darf der Nenner nicht gleich 0 werden. Es ist $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Somit dürfen alle Zahlen ausser $x = \pm 2$ eingesetzt werden $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}}}$.

   Welche Werte können entstehen? Diese Frage ist deutlich schwieriger, also man zunächst denken könnte. Es empfiehlt sich ein Blick auf den anspruchsvollen Funktionsgraphen mittels GeoGebra:



   G_h ist symmetrisch zur y-Achse und weist bei $x = -2$ und $x = +2$ je eine Polstelle auf. Dort ist die Funktion nicht definiert und in unmittelbarer Nachbarschaft "explodiert" der Graph, d.h., die Funktionswerte gehen gegen $\pm\infty$. Für $x \to \pm\infty$ schmiegt sich der G_h an die x-Achse an. Die Werte gehen unendlich nahe gegen 0, erreichen 0 aber niemals. Zwischen den beiden Polstellen sind die Funktionswerte negativ. Sie erreichen dabei ein sogenanntes lokales Maximum bei $x = 0$. Der Funktionswert dort beträgt $h(0) = \frac{1}{0^2-4} = -\frac{1}{4}$.

   Bezüglich Wertebereich bedeutet dies: Es werden fast alle Zahlen getroffen. Es gibt aber eine Lücke zwischen $y = -\frac{1}{4}$ und $y = 0$, die nie getroffen wird. Dabei gehört $y = -\frac{1}{4}$ zum Wertebereich, $x = 0$ hingegen nicht. Die 0 muss also ausgeschlossen werden, $-\frac{1}{4}$ aber nicht $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{W}_h = \mathbb{R} \setminus \,]-\frac{1}{4}; 0]}}$.

2. Wir setzen die Punkte in die Funktionsgleichung ein. So ergibt sich ein 2x2-Gleichungssystem für die Parameter a und v:

$$\left| \begin{array}{c} f(1) = 8 \\ f(5) = -8 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} a(-1)^2 + v = 8 \\ a(3)^2 + v = -8 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} a + v = 8 \\ 9a + v = -8 \end{array} \right| \Rightarrow 8a = -16 \Leftrightarrow \underline{a = -2}$$

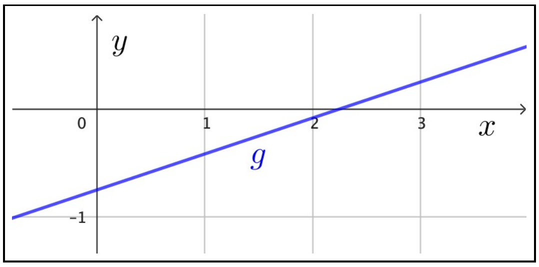
$$\Rightarrow -2 + v = 8 \Leftrightarrow \underline{v = 10} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -2(x-2)^2 + 10}}$$

3. Wir wandeln die implizite Form der Geradengleichung in die explizite Form um:

$$4x - 12y = 9 \Leftrightarrow 12y = 4x - 9 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}}}$$

   Die Gerade hat also die Steigung $\frac{1}{3}$ und den y-Achsenabschnitt $-\frac{3}{4}$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist somit $\underline{\underline{(0, -\frac{3}{4})}}$. Für den Schnittpunkt mit der x-Achse setze ich $y = 0$ und erhalte $4x = 9$ resp. $x = \frac{9}{4}$. Der Schnittpunkt ist somit $\underline{\underline{(\frac{9}{4}, 0)}}$.

Schliesslich folgt noch die Skizze:



4. Zu $f(x) = x^2 + 2x - 1$ gehört die Parabel mit Öffnung $+1$ (wie Normalparabel), die mit Steigung $+2$ auf der Höhe $y = -1$ die y-Achse durchquert. Das kann nur die grüne Parabel sein. Weiter schliessen wir:

rot:	$g(x) = x^2 - 2x - 1$	nach oben geöffnet, passiert y-Achse mit Steigung -2 auf Höhe -1
blau:	$h(x) = -x^2 + 2x + 1$	nach unten geöffnet, passiert y-Achse mit Steigung 2 auf Höhe 1
orange:	$i(x) = -x^2 - 2x + 1$	nach unten geöffnet, passiert y-Achse mit Steigung -2 auf Höhe 1

5. Es sei $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{4}$.

   (a) Für ein rasches Skizzieren ohne Berechnungen helfen uns die Parameterwerte:

$$a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{weite Öffnung nach oben}$$
$$b = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{durchquert } y\text{-Achse mit Steigung } +1 \quad \Rightarrow \quad \text{SP links der } y\text{-Achse}$$
$$c = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{durchquert } y\text{-Achse auf der Höhe } \frac{3}{4}$$

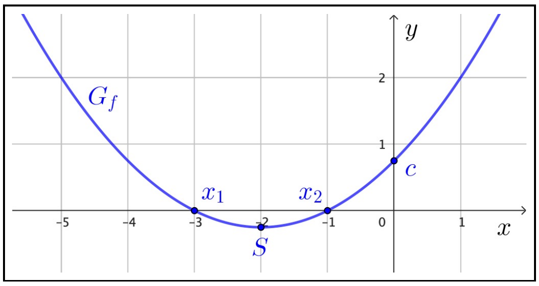
   (b) Durch Faktorisieren erhalten wir direkt die Nullstellenform (NSF):

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left(x^2 + 4x + 3\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}(x+3)(x+1)}}$$

   Damit liegen die Nullstellen bei $\underline{\underline{x_1 = -3}}$ und $\underline{\underline{x_2 = -1}}$.
   Für eine genauere Skizze von Hand lohnt sich allenfalls die Berechnung des Scheitelpunktes S:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + (-1)}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad y_S = f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^2 + (-2) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

   Hier der mit GeoGebra gezeichnete Graph:



6. Die Normalparabel hat die Öffnung $a = 1$. Somit lautet der Funktionsansatz: $f(x) = x^2 + bx + c$. Wir setzen die beiden Punkte ein, um die fehlenden Parameter b und c zu erhalten:

$$\left| \begin{array}{l} f(1) = 3 \\ f(3) = 5 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 1 + b + c = 3 \\ 9 + 3b + c = 5 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} b + c = 2 \\ 3b + c = -4 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 2b = -6 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b = -3}$$
$$\Rightarrow \quad -3 + c = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{c = 5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = x^2 - 3x + 5}}$$

7. Es sind keine spezifischen Punkte gegeben. Folglich verwenden wir den allgemeinen Ansatz $f(x) = ax^2+bx+c$ und setzen die drei gegebenen Punkte ein:

$$\left|\begin{array}{c} f(-1) = -2 \\ f(2) = -1 \\ f(3) = 2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{c} a - b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} ② - ① : \\ ③ - ② : \end{array} \left|\begin{array}{c} 3a + 3b = 1 \\ 5a + b = 3 \end{array}\right| \begin{array}{c} ④ \\ ⑤ \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot ⑤ - ④ : \quad 12a = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = \frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \text{in } ④ : \quad 2 + 3b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3b = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b = -\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{in } ① : \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + c = -2 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{-3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x - 3}}$$

Mit GeoGebra lässt sich leicht überprüfen, dass die zugehörige Parabel tatsächlich durch die drei gegebenen Punkte verläuft.

8. Da die Nullstellen gegeben sind, setzen wir die QF in der Nullstellenform an:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 4)$$

Jetzt können wir den Punkt $P(3, 3)$ einsetzen, um den Parameter a zu bestimmen:

$$f(3) = a\left(3 + \frac{3}{2}\right)(3 - 4) = a \cdot \frac{9}{2} \cdot (-1) = -\frac{9}{2}\,a \overset{!}{=} 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = -\frac{2}{3}}$$

Damit können wir die NSF komplett aufschreiben und durch Ausmultiplikation die gesuchte Normalform erhalten:

$$f(x) = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 4) = -\frac{2}{3}\left(x^2 - \frac{5}{2}\,x - 6\right) = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\,x^2 + \frac{5}{3}\,x + 4}}$$

Wiederum erlaubt uns GeoGebra beim Üben eine rasche Kontrolle dieses Resultates.

9. (a) Zunächst wandle ich die implizite in eine explizite Geradengleichung in eine explium resp. mache daraus eine lineare Funktion:

$$g:\ 2x + 2y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = -2x + 3 \quad \Rightarrow \quad g(x) = -x + \frac{3}{2}$$

Schnittpunkte bestimmen wir durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen (über einer bestimmten Stelle x müssen die beiden Funktionen denselben Wert aufweisen, wenn dort ein Schnittpunkt sein soll). Mit $c = \frac{3}{2}$ folgt:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\,x^2 - 3x + \frac{3}{2} = -x + \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\,x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\,x(x - 6) = 0$$

Die Schnittstellen sind somit $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$. Daraus folgt für die Schnittpunkte:

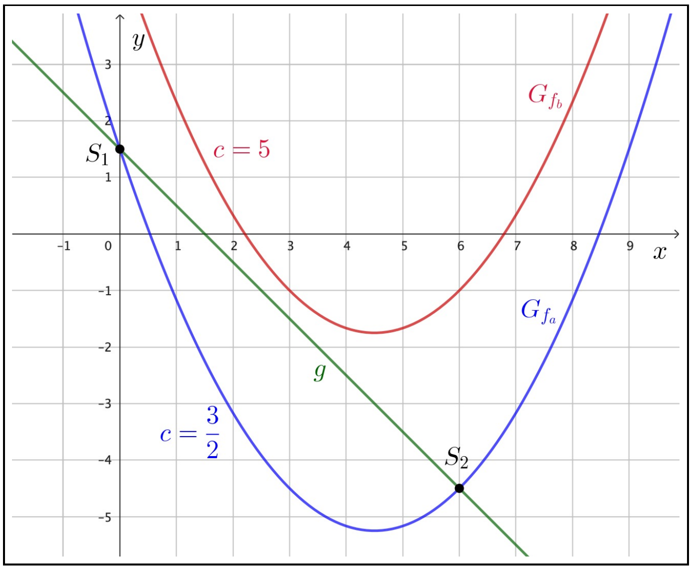
$$y_1 = g(0) = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad y_2 = g(6) = -6 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_1\left(0, \frac{3}{2}\right)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S_2\left(6, -\frac{9}{2}\right)}}$$

(b) Setzen wir $c = 5$, so lautet die Schnittpunktgleichung:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\,x^2 - 3x + 5 = -x + \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\,x^2 - 2x + \frac{7}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} = 4 - \frac{14}{3} < 0$$

Somit gibt es keine Schnittpunkte. Die Parabel wurde zu weit nach oben verschoben. Hier die Skizze zu den Aufgaben (a) und (b):



(c) Wir versuchen mit $c = 6$ die QF $f(x)$ zu faktorisieren, also in NSF zu bringen:

$$\frac{1}{3}x^2 - 3x + 6 = \frac{1}{3}\left(x^2 - 9x + 18\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}(x-3)(x-6)}}$$

Bei $c = 8$ funktioniert die Faktorisierung nicht. Wir überprüfen mittels Diskriminante, ob es überhaupt Nullstellen gibt:

$$\frac{1}{3}x^2 - 3x + 8 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 = 9 - \frac{32}{3} < 0$$

Damit gibt es keine NS und somit auch <u>keine NSF</u>.

(d) Aus Aufgabe (c) schliessen wir, dass der gesuchte Wert für c zwischen 6 und 8 liegen muss. Die QG für die Nullstellenbestimmung darf nur eine einzige Lösung aufweisen. Das bedeutet, ihre Diskriminante muss 0 sein. Damit folgern wir:

$$\frac{1}{3}x^2 - 3x + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad D = b^2 - 4ac = 3^2 - \frac{4}{3}c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 9 = \frac{4}{3}c \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{c = \frac{27}{4}}} \;\; (= 6.75)$$

Bei Berührung der x-Achse ist der Berührungspunkt auch gerade der Scheitelpunkt. Die Nullstelle entspricht der x-Koordinate des Scheitelpunktes. Das macht die Bestimmung der NSF leicht:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2}}$$

(e) Nun muss die Schnittpunktgleichung nur genau eine Lösung haben. Ihre Diskriminante muss also gleich 0 sein. Daraus folgt für c:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}x^2 - 3x + c = -x + \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}x^2 - 2x + c - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(c - \frac{3}{2}\right) = 4 - \frac{4}{3}c + 2 = 6 - \frac{4}{3}c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c = \frac{9}{2}}} \;\; (= 4.5)$$

Dieser Wert passt, denn er liegt zwischen $c = \frac{3}{2}$ mit zwei Schnittpunkten (vgl. (a)) und $c = 5$ mit keinem Schnittpunkt (vgl. (b)). Nun ist g eine Tangente an f und für den Berührungspunkt B ergibt sich:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = -x + \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{3}(x-3)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x_B = 3 \quad \Rightarrow \quad y_B = g(x_B) = g(3) = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B\left(3, -\frac{3}{2}\right)}}$$