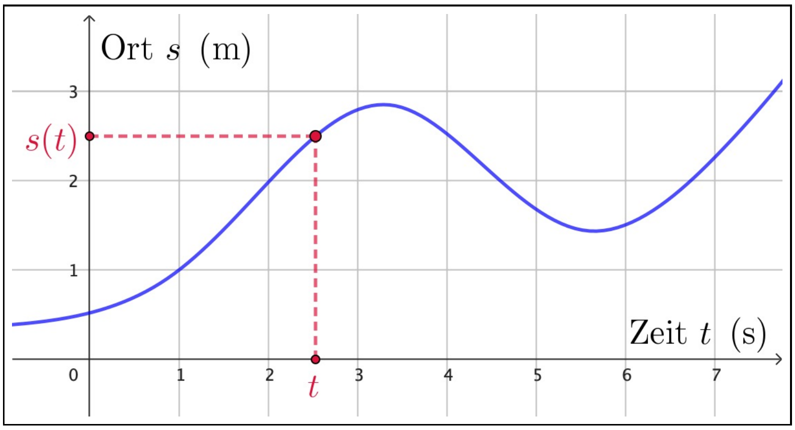
6 Kinematik mit linearen und quadratischen Funktionen

Definitionen der kinematischen Grössen resp. Funktionen und Diagramme

Die Ortsfunktion $s(t)$: Um die Bewegung eines Körpers zu beschreiben, wird in der klassischen Mechanik jedem Zeitpunkt t ein Aufenthaltsort s zugeordnet. Dies fassen wir als mathematische Funktion auf, eben die *Ortsfunktion* $s(t)$. Die Zeit t ist die unabhängige, der Ort s die abhängige Grösse.

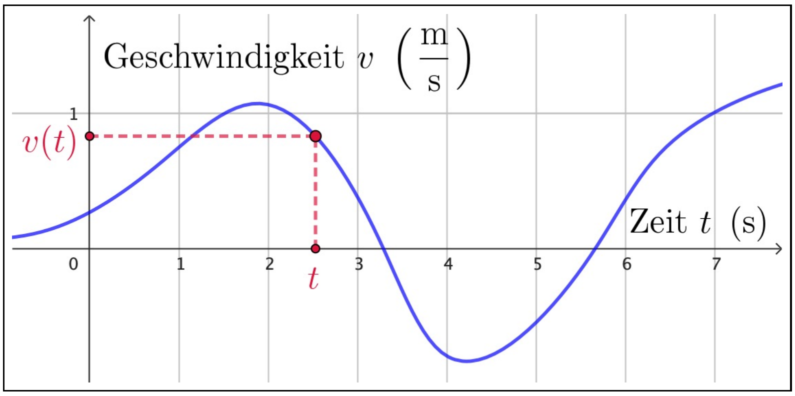
Koordinatenachsen und t-s-Diagramm: Im Prinzip müsste s für einen Ort im dreidimensionalen Raum stehen, denn unsere räumlich Welt ist eben dreidimensional. Wir vereinfachen hier aber unser Konzept, indem wir die *Ortsachse* oder s-Achse einfach entlang der *Trajektorie* (= Bewegungsbahn) des Objektes verlegen. Die Zeit ist eindimensional und so genügt zu ihrer Beschreibung eine einzelne *Zeitachse* resp. t-Achse.

Nun können wir die Bewegung eines Körpers in einem t-s-Diagramm darstellen, z.B.:



Wir sehen: Zu jedem Zeitpunkt t gehört genau ein Ort $s(t)$.

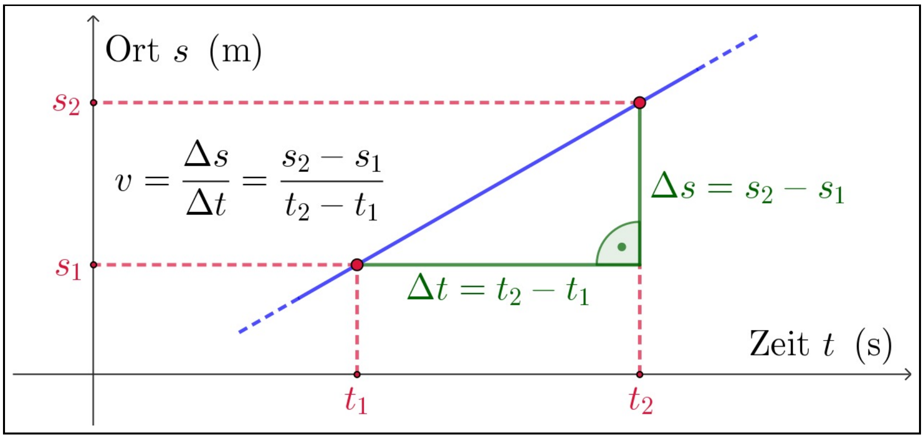
Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$: In jedem Moment der Bewegung weist der betrachtete Körper eine bestimmte Geschwindigkeit auf. D.h., zu jedem Zeitpunkt t gehört also ein Geschwindigkeitswert $v(t)$. Auch diese *Geschwindigkeitsfunktion* $v(t)$ lässt sich in einem Diagramm darstellen. Hier das zum t-s-Diagramm weiter oben gehörende t-v-Diagramm:



Definition der Momentangeschwindigkeit: Wie wir im Diagramm sehen, sind offenbar auch negative Geschwindigkeitswerte möglich. Das hat mit unserer Definition der *Momentangeschwindigkeit* v zu tun. Diese soll nämlich stets der *aktuellen Steigung* des Graphen im t-s-Diagramm entsprechen. Wenn sich nun also ein Körper entgegengesetzt zur Ortsachse bewegt, so hat er eine negative Geschwindigkeit, weil dann die Steigung im t-s-Diagramm negative wird.

Nochmals zur Verdeutlichung: Zu einem bestimmten Zeitpunkt t betrachten wir den Punkt $\big(t, s(t)\big)$ auf dem Graphen im t-s-Diagramm. Die *Steigung der Tangente*, die wir in diesem Punkt an den Graphen legen, ist per Definition die Momentangeschwindigkeit v zum Zeitpunkt t.

Berechnung der Geschwindigkeit: Bis dato können wir nur Steigungen von Geraden berechnen. Das bedeutet, dass wir die Geschwindigkeit eines Körpers derzeit nur dann bestimmen können, wenn er eine *gleichförmige Bewegung (gfB)*, also eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ausführt. Während einer solchen Bewegung ist der Graph im t-s-Diagramm eine Gerade:

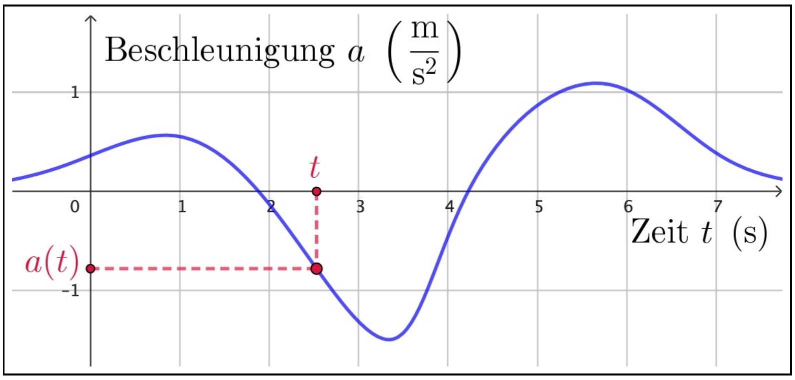


Legen wir ein *Steigungsdreieck* an zwei Punkte auf der Gerade, so ist die Steigung und damit eben die Geschwindigkeit definiert als das Verhältnis von stehender Seite Δs (= Strecke) zu liegender Seite Δt (= Zeitspanne). Halten wir fest:

Definition der Geschwindigkeit: $$v := \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \tag{1}$$

Die Beschleunigungsfunktion $a(t)$: Bei Bewegung mit sich verändernder Geschwindigkeit ergibt sich eine sinnvolle Frage: "Wie rasch verändert sich die Geschwindigkeit?" oder noch mehr auf den aktuellen Zeitpunkt bezogen: "Wie stark ist sich die Geschwindigkeit jetzt gerade am verändern?"

Die Antwort darauf ist die sogenannte *Beschleunigung* a. Wiederum kann jedem Zeitpunkt t ein aktueller Beschleunigungswert $a(t)$ zugeordnet werden. Wir sprechen von der *Beschleunigungsfunktion* $a(t)$. Dazu können wir nun ein t-a-Diagramm zeichnen. Hier das Beschleunigungsdiagramm zu den beiden Diagrammen auf der ersten Seite:



Definition der Beschleunigung: Wie rasch sich die Geschwindigkeit gerade am verändern ist, entspricht stets der momentanen Steigung im t-v-Diagramm.

Wir gehen oftmals davon aus, dass sich Geschwindigkeiten gleichmässig verändern und sprechen dann von *gleichmässig beschleunigten Bewegungen (gmbB)*. Besteht ein Bewegungsablauf aus lauter Abhnitten mit jeweils gleichmässiger Beschleunigung, so setzt sich das t-v-Diagramm aus lauter geraden Strecken zusammen. An jede davon lässt sich ein Steigungsdreieck mit stehender Seite Δv (*Geschwindigkeitsveränderung*) und liegender Seite Δt (*Zeitspanne*) anliegen. Die Steigung, also das Verhältnis Δv und Δt resp. eben die *Geschwindigkeitveränderung pro Zeitspanne* verstehen wir nun als die Beschleunigung:

Definition der Beschleunigung: $$a := \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{2}$$

Bedeutung der Flächen im t-v- und im t-a-Diagramm

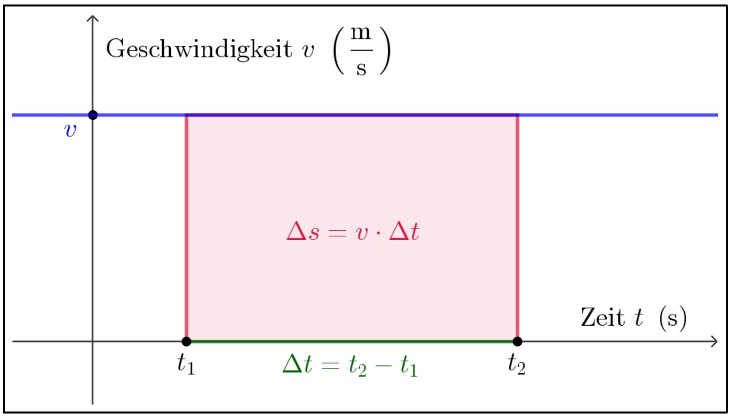
Bedeutung der Steigungen: Die aktuelle Steigung im t-s-Diagramm entspricht stets der momentanen Geschwindigkeit, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, und die aktuelle Steigung im t-v-Diagramm entspricht stets der momentanen Beschleunigung, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Dabei sind auch negative Geschwindigkeits- und Beschleunigungswerte sinnvoll. Ist $v < 0$, so bewegt sich das betrachtete Objekt in die negative Richtung der Ortsachse s. Das bedeutet, die Ortskoordinate s ist am abnehmen. Ist $a < 0$, so ist der Geschwindigkeitswert v am abnehmen. Das bedeutet, wenn sich das Objekt derzeit noch in die positive Richtung der Ortsache s bewegt $(v > 0)$, so wird es nun langsamer, bewegt es sich hingegen bereits in die negative Richtung der Ortsache s $(v < 0)$, so wird es schneller, weil die Geschwindigkeit immer negativer wird.

Die Fläche unter dem Graphen im t-v-Diagramm: Im t-v-Diagramm hat eine horizontale Strecke die Dimension einer Zeitspanne Δt und eine vertikale Strecke, die von der t-Achse aus gemessen wird, hat die Dimension einer Geschwindigkeit v. Multiplizieren wir die beiden miteinander, so steht das Resultat einerseits für eine Rechtecksfläche im t-v-Diagramm, andererseits ergibt sich aber automatisch die Diemnsion einer Strecke Δs:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

In Worten: *Während der Zeitspanne Δt verschiebt sich das Objekt um die Strecke Δs, wenn es sich mit der Geschwindigkeit v am bewegen ist.*



Wir folgern allgemein:

> *Die Fläche unter dem Graphen im t-v-Diagramm steht für die während dem entsprechenden Zeitabschnitt Δt zurückgelegte Strecke Δs. Das gilt selbst dann, wenn sich die Geschwindigkeit während diesem Zeitabschnitt verändert.*

Die Fläche unter dem Graphen im t-a-Diagramm: Ganz analoge Überlegungen können wir nun auch im t-a-Diagramm anstellen und finden:

> *Die Fläche unter dem Graphen im t-a-Diagramm steht für die während dem entsprechenden Zeitabschnitt Δt erfahrene Geschwindigkeitsveränderung Δv. Das gilt selbst dann, wenn sich die Beschleunigung während diesem Zeitabschnitt verändert.*