

## 5 Optimierungsaufgaben mit quadratischen Funktionen

Alle Parabeln weisen einen Scheitelpunkt  $S(u, v)$  auf. Bei Öffnung nach oben ist dies der tiefste, bei Öffnung nach unten der höchste Punkt auf der Parabel. Im Wertebereich der zugehörigen quadratischen Funktion  $f(x)$  gibt es somit ein **Minimum** (= Minimalwert) oder ein **Maximum** (= Maximalwert).

Parabeln besitzen also stets ein **Extremum**  $v$  (= Oberbegriff für Maximum und Minimum = Extremalwert in die eine oder die andere Richtung).<sup>1</sup> Die zum Extremum gehörende Stelle  $x = u$  wird als **Minimal-**, **Maximal-** oder eben **Extremalstelle** bezeichnet. Den Scheitelpunkt  $S(u, v)$  selber nennt man **Extremalpunkt** resp. **Maximal-** oder **Minimalpunkt**.

Wie wir herausgefunden haben, ist es ein Leichtes bei gegebener Funktionsgleichung  $f(x)$  den Scheitelpunkt  $S(u, v)$  zu bestimmen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad v = f(u)$$

Das bedeutet aber, dass sich bei Zusammenhängen, die durch quadratische Funktionen beschrieben werden, Extremalstellen und -werte bestimmen lassen und wir somit **optimieren** können.

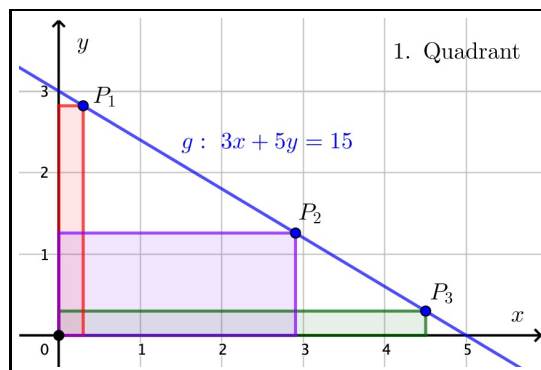
Viele Probleme in Wirtschaft und Naturwissenschaft führen auf sogenannte **Optimierungsprobleme**. Man strebt z.B. nach dem maximalen Gewinn, nach minimalen Kosten, minimalem Materialverbrauch usw. Oft löst man solche Probleme, indem man eine Funktionsgleichung aufstellt, die das Problem modelliert und dann von dieser Funktion das Maximum bzw. Minimum sucht. . .

### Beispiel: Eine maximale Fläche im Koordinatensystem

Wir betrachten den ersten Quadranten in einem  $x$ - $y$ -Koordinatensystem. Er wird von der durch  $g : 3x + 5y = 15$  gegebenen Gerade durchquert. Jeder Punkt  $P \in g$  im 1. Quadranten definiert zusammen mit dem Ursprung ein Rechteck (Seiten parallel zu den Achsen).

**Frage:** Welche Koordinaten hat der Punkt  $P$ , wenn die Fläche des Rechtecks maximal, also so gross wie möglich, sein soll? Wie gross ist diese maximale Fläche?

**Vorüberlegung:** Natürlich könnten wir einfach ein paar Positionen für  $P$  ausprobieren, die Flächenwerte vergleichen und uns so schrittweise dem Maximum nähern, aber das wäre weder ein elegantes noch ein sonderlich zielgerichtetes Vorgehen. Trotzdem ist es nützlich sich die Situation rasch vor Augen zu führen und zu verstehen, dass es da vermutlich ein Maximum aufzuspüren gibt. So habe ich in der Grafik rechts drei mögliche Positionen von  $P$  eingetragen, eine nahe an der  $y$ -Achse ( $P_1$ ), eine nahe an der  $x$ -Achse ( $P_3$ ) und eine irgendwo mittig dazwischen ( $P_2$ ). Man sieht deutlich, dass die mittlere Position zu einer grösseren Fläche führt als eine der äusseren Positionen, denn auf den Aussenpositionen ist entweder die Länge oder die Breite des Rechtecks sehr klein. Es ist ganz plausibel, dass die Rechtecksfläche also für irgendeine Position von  $P$  zwischen  $P_1$  und  $P_3$  maximal wird.



**Antwort:** Bei der Lösung einer solchen Fragen müssen wir uns zunächst an der zu optimierenden Grösse, hier also an der Rechtecksfläche orientieren. Die Flächenformel  $A = l \cdot b$  ist unsere **Zielfunktion**, deren Maximum wir aufspüren wollen.

<sup>1</sup>Die Mehrzahl von Minimum, Maximum resp. Extremum lautet übrigens Minima, Maxima resp. Extrema.

Setzen wir den Punkt  $P$  variabel an, also  $P = (x, y)$ , so können wir die Zielfunktion mit den Koordinaten von  $P$  notieren, denn die eine Seite des Rechtecks hat die Länge  $x$  und die andere die Länge  $y$ :

$$A(x, y) = x \cdot y$$

Zunächst hängt diese Fläche von beiden Koordinaten von  $P$  ab, also von  $x$  und von  $y$ , was ich durch die Schreibweise  $A(x, y)$  ("A von x und y") zum Ausdruck bringe. Wir kennen allerdings eine zusätzliche **Nebenbedingung**, durch die sich eine der beiden Variablen eliminieren lässt. Der Punkt  $P$  soll ja auf der Geraden  $g : 3x + 5y = 15$  liegen. Es gibt also eine zusätzliche Abhängigkeit zwischen  $x$  und  $y$ , durch die sich beispielsweise  $y$  als Funktion von  $x$  ausdrücken lässt:

$$3x + 5y = 15 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = -\frac{3}{5}x + 3 \quad \Rightarrow \quad A(x) = x \cdot y(x) = x \left( -\frac{3}{5}x + 3 \right) = -\frac{3}{5}x^2 + 3x$$

Jetzt hängt die Zielfunktion nur noch von der Variable  $x$  ab. Und es handelt sich um eine QF mit negativem Öffnungsparameter  $a = -\frac{3}{5}$ ! Diese Funktion besitzt also tatsächlich ein Maximum, das wir sofort bestimmen:

$$u = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad y(u) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} + 3 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P \left( \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right)}}$$

Die  $y$ -Koordinate von  $P$  erhalten wir durch Einsetzen der Maximalstelle  $u$  in die Nebenbedingung  $y(x)$ . Schliesslich wollten wir noch wissen, wie gross die maximal mögliche Rechtecksfläche effektiv ist. Dazu setzen wir die Maximalstelle  $u$  in die Zielfunktion  $A(x)$  ein:

$$v = A(u) = A \left( \frac{5}{2} \right) = -\frac{3}{5}u^2 + 3u = -\frac{3}{5} \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^2 + 3 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{15}{4} + \frac{15}{2} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$$

Wir haben herausgefunden, dass der Punkt  $P$  mit maximaler Rechtecksfläche gerade in der Mitte zwischen den beiden Achsenschnittpunkten von  $g$  liegt.

Halten wir zum Schluss unsere Schritte in diesem Beispiel nochmals ganz allgemein fest, damit wir künftig ein Rezept für ähnliche Optimierungsaufgaben zur Hand haben:

### Rezept für Optimierungsaufgaben

(= Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen)

#### Schritt 1: Aufstellen der Zielfunktion

Die zu optimierende Grösse wird als Funktion  $f$  einer oder mehrerer Variablen  $x, y, \text{ etc.}$  angesetzt  $\rightarrow$  **Zielfunktion**.

Bsp.:  $f = f(x, y)$  bei zwei Variablen  $x$  und  $y$

#### Schritt 2: Einbezug der Nebenbedingung(en)

Falls die Zielfunktion von mehreren Variablen abhängt, müssen zusätzliche Gleichungen ( $\rightarrow$  **Nebenbedingungen**) dafür sorgen, dass sie nur noch von einer einzigen Variable abhängt.

Im Bsp.: Nebenbedingung  $y = y(x) \Rightarrow f(x, y) \rightarrow f(x)$

#### Schritt 3: Bestimmung der Extremalstelle / des Extremums

Falls die Zielfunktion eine quadratische Funktion ist, lässt sich ihre **Extremalstelle**  $u$  und ihr **Extremum**  $v = f(u)$  bestimmen.

Allgemein:  $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow u = \frac{-b}{2a}$  und  $v = f(u)$