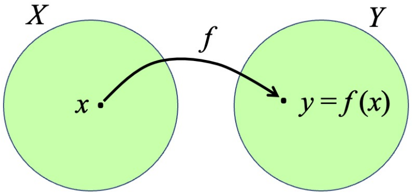
1 Repetition – was wir bereits gesehen haben

Allgemeine Notizen zu Funktionen



- **Funktion** = **Abbildung** = *Vorschrift*, wie *jedem* Element x aus einer Menge X je *genau ein* Element y aus einer Menge Y zugeordnet wird → Funktionen sind **eindeutig**!
- Momentan sind X und Y stets **Zahlenmengen**, z.B.:
  - $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ = alle reellen Zahlen ausser 0
  - $\mathbb{R}_0^+$ = alle positiven reellen Zahlen inkl. 0
  - $[\,0;1\,[$ = **Intervall** von 0 bis 1 inkl. 0, aber ohne 1
  - $]-\infty;5\,[$ = alle reellen Zahlen von $-\infty$ bis 5, aber ohne die 5
- Beispiel zur vollständigen Beschreibung einer Funktion f:

Mengenangaben: $f: \quad \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Funktionsvorschrift: $x \longmapsto f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

- Vereinfachung: Da wir momentan immer relle Zahlen auf reelle Zahlen abbilden, genügt uns zur Beschreibung die **Funktionsgleichung**, also z.B.: $f(x) = \frac{2}{x-3}$.
- Teilmengen von $\mathbb{R}$, die durch $f(x)$ festgelegt werden:

  Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ = Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die sinnvoll in $f(x)$ eingesetzt werden können.

  Wertebereich $\mathbb{W}_f$ = Menge aller $y \in \mathbb{R}$, die durch $f(x)$ getroffen werden.

- Weitere Bezeichnungen: $f(x)$ ist der (Funktions-)**Wert** von f an der **Stelle** x.

  Bsp.: $f(5) = 1 \quad \rightarrow$ "An der Stelle $x = 5$ hat f den Wert 1."

  Die Schreibweise $f(x)$ bringt zum Ausdruck, dass x für die **Variable** von f stehen soll. D.h., x soll die eigentliche *veränderliche* Grösse sein, währenddem andere Buchstaben in der Funktionsgleichung für **Parameter** stehen, mit denen wir die Funktion modifizieren.

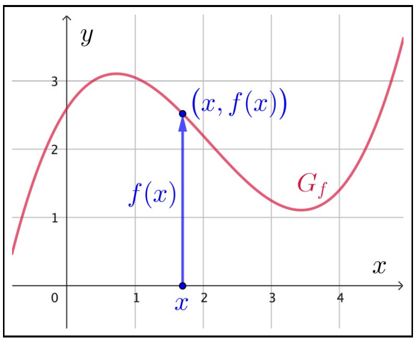
  Bsp.: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad x$ = Variable, $\quad a, b, c$ = Parameter

- Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stellen wir oft durch **Graphen** in einem x-y-Koordinatensystem dar: Über jeder Stelle x auf der horizontalen Achse wird in y-Richtung der Funktionswert $f(x)$ abgetragen. So entstehen lauter Punkte mit Koordinaten $\big(x, f(x)\big)$.

  Merke: Der **Graph** G_f einer Funktion f ist eine *Punktemenge*:

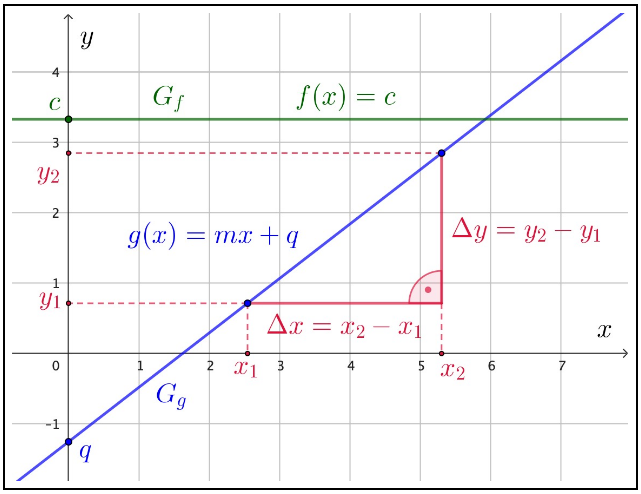
  $$G_f = \left\{ \big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{D}_f \right\}$$

  ($\mathbb{R}^2$ ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) zweier reller Zahlen = Menge aller Punkte in einem x-y-Koordinatensystem.)



- In den **Achsenschnittpunkten** schneidet oder berührt der G_f die Koordinatenachsen.
- **Nullstellen (NS)** sind Stellen auf der x-Achse, wo der Graph die x-Achse schneidet oder berührt. Dort gilt: $f(x) = 0$, daher der Name.

Konstante Funktionen $f(x) = c$



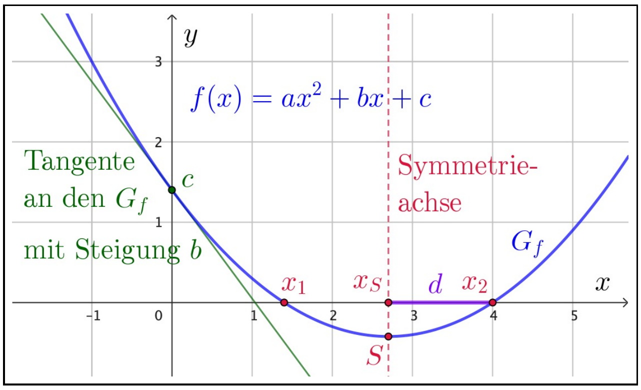
- $c \in \mathbb{R}$ konstant. Funktion unabhängig von x.
- Graph ist eine **Horizontale** auf der Höhe c.

Lineare Funktionen (LF) $f(x) = mx + q$

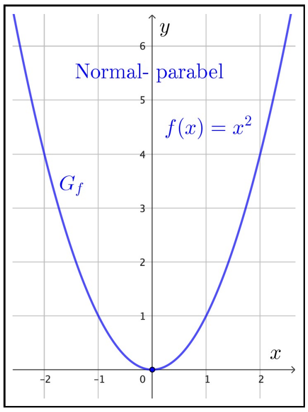
- Parameter $m, q \in \mathbb{R}$ $(m \neq 0)$.
- Graph ist **Gerade** mit **Steigung** m und **y-Achsenabschnitt** q, wobei sich m aus einem beliebigen Steigungsdreieck ergibt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Quadratische Funktionen (QF) $f(x) = ax^2 + bx + c$



- Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$.
- Graph einer QF heisst **Parabel**.
- Die Notation $f(x) = ax^2 + bx + c$ heisst **Normalform (NF)** der QF. Darin sind:
  - ax^2 = *quadratisches* Glied
  - bx = *lineares* Glied
  - c = *konstantes* Glied
- Bedeutung der *Parameter*:
  - a = **Öffnung** der Parabel
    - Für $a > 0$ nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet.
    - Für $|a|$ klein ist die Parabel weit, für $|a|$ gross ist sie eng.
  - b = Steigung, mit der die Parabel die y-Achse durchquert.
  - c = Höhe, auf der die Parabel die y-Achse durchquert.



- Der Graph der "unmodifizierten" QF $f(x) = x^2$ heisst **Normalparabel**.
- Eine QF hat 0 bis 2 *Nullstellen (NS)*. Es sind die Lösungen der QG $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Bestimmung der NS wie üblich mittels: i. *Ausklammern*, ii. *binomische Formeln*, iii. *Zweiklammeransatz* oder iv. *Mitternachtsformel (MNF)*. Rep. MNF: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Falls Nullstellen x_1 und x_2 existieren, lässt sich die QF in

  Nullstellenform (NSF) $\quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

  schreiben (a = Öffnung). Fallen die beiden NS zusammen, $x_1 = x_2$, so berührt die Parabel die x-Achse und die NSF enthält den *Linearfaktor* $(x - x_1)$ doppelt: $f(x) = a(x - x_1)^2$.
- Parabeln haben eine *Symmetrieachse* durch den **Scheitelpunkt** S. Für dessen x-Koordinate x_S gilt:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \qquad \text{und} \qquad x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{falls NS existieren}$$

  y_S finden wir durch Einsetzen von x_S in die Funktionsgleichung.

  $x_S = -\frac{b}{2a}$ ist Teil der MNF. Der Rest, also $d = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ist die Distanz von x_S aus zu den beiden NS x_1 und x_2. Dieses d existiert genau dann, wenn der Ausdruck unter der Wurzel, also die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$, grösser oder gleich ist und somit NS vorhanden sind.