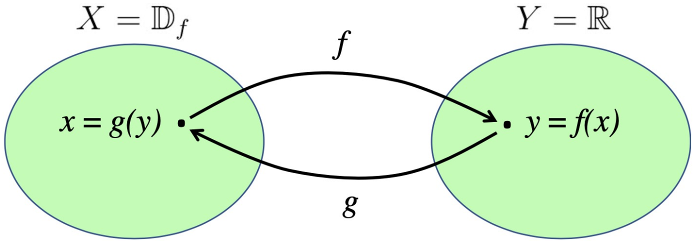
Die Umkehrfunktion f^{-1}

Intuitiv hat man das Gefühl, dass sich jede Funktion f auch wieder rückgängig machen lässt, dass es also zu jeder Funktion f eine entsprechende **Umkehrfunktion** $g(y)$ gibt, denn das folgende Bild erscheint zunächst ja ganz sinnvoll:



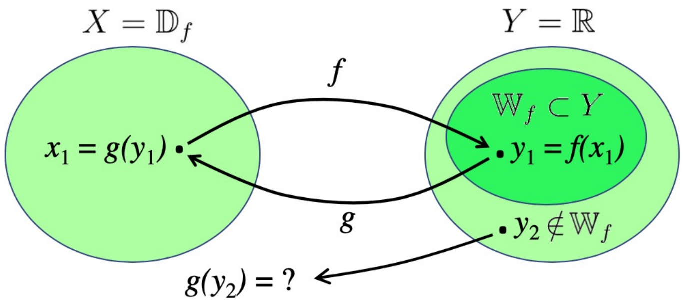
Die Existenz einer solchen Umkehrfunktion g ist allerdings nicht selbstverständlich, wenn wir fordern, dass sie selber wieder eine echte Funktion sein soll.

Überlegen wir: Gegeben sei eine Funktion

$$f: \quad \mathbb{D}_f \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

Welchen Anforderungen muss eine allfällige Umkehrfunktion $g(y)$ genügen, um selber auch wieder eine Funktion im mathematischen Sinne zu sein?

Mengenüberlegung: Die Funktion f weist jedem $x \in \mathbb{D}_f$ ein bestimmtes Element $y = f(x)$ in der Zielmenge Y zu. Alle so getroffenen Elemente der Zielmenge bilden zusammen den Wertebereich $\mathbb{W}_f$ der Funktion f. Das bedeutet aber, dass die Funktion g nur Elemente $y \in \mathbb{W}_f$ zurück in den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ abbildet, denn zu anderen Elementen $y \notin \mathbb{W}_f$ existiert gar kein x in der Definitionsmenge mit $y = f(x)$:



Forderung 1: Der Definitionsbereich $\mathbb{D}_g$ der Umkehrfunktion g muss dem Wertebereich $\mathbb{W}_f$ der Funktion f entsprechen und umgekehrt!

$$f: \quad \mathbb{D}_f \quad \longrightarrow \quad \mathbb{W}_f \qquad \Rightarrow \qquad g: \quad \mathbb{D}_g = \mathbb{W}_f \quad \longrightarrow \quad \mathbb{W}_g = \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Betrachten wir zur Veranschaulichung die Quadratfunktion

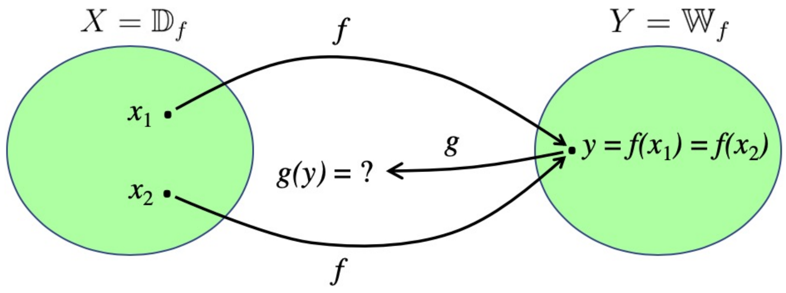
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Jedes $x \in \mathbb{R}$ kann in $f(x) = x^2$ eingesetzt werden. Als Funktionswerte entstehen aber nur Zahlen $y = f(x) \geq 0$. Für den Wertebereich von f gilt also: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$. In eine allfällige Umkehrfunktion $g(y)$ können also sicher nur Zahlen $y \in \mathbb{R}_0^+$ eingesetzt werden.

Das ist nicht so überraschend, denn die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ ist wohl die **Wurzelfunktion** $g(y) = \sqrt{y}$. Und von negativen Zahlen lassen sich keine Wurzeln ziehen!

Eindeutigkeitsüberlegung: Auch die Umkehrfunktion $g(y)$ muss **eindeutig** sein, sonst ist sie keine Funktion! Zu einem $y \in \mathbb{D}_g$ dürfen also nicht mehrere Funktionswerte $g_1(y)$, $g_2(y)$, etc. gehören.

Das heißt aber für die ursprüngliche Funktion f, dass keine zwei Zahlen $x \in \mathbb{D}_f$ denselben Funktionswert $f(x)$ aufweisen dürfen! Für je zwei $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$ muss stets gelten: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die folgende Grafik veranschaulicht das Problem:



Forderung 2: Der Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ muss so gewählt werden, dass die Umkehrfunktion $g(y)$ eindeutig ist. Konkret: Es darf keine zwei $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$ geben mit $f(x_1) = f(x_2)$!

Beispiel: Mit der Quadratfunktion haben wir genau dieses Problem. Immer je zwei Zahlen ($\neq 0$) bilden auf dieselbe Zahl ab:

$$f(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(-3) = f(3) = 9$$

Soll zur Quadratfunktion f eine Umkehrfunktion existieren, so müssen wir $\mathbb{D}_f$ einschränken, z.B. auf $\mathbb{R}_0^+$! Damit wird die Wurzelfunktion eindeutig. Und so haben wir sie auch kennengelernt: Die Wurzel $\sqrt{y}$ ist per Definition die **positive Lösung** der Gleichung $x^2 = y$!

Genügt eine Funktion $f(x)$ beiden Forderungen, so existiert eine Umkehrfunktion, die wir typischerweise mit $f^{-1}(y)$ abkürzen – $g(y)$ war nur ein zwischenzeitlicher Hilfsname – und wir nennen f **eineindeutig**.[1]

Existenz der Umkehrfunktion f^{-1}

Zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und Wertebereich $\mathbb{W}_f$ existiert genau dann eine **Umkehrfunktion**

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{W}_f & \longrightarrow & \mathbb{D}_f \\ & f(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

wenn f für keine zwei $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$ denselben Funktionswert $f(x)$ aufweist.

Kurz: *Eine Funktion f besitzt genau dann eine Umkehrfunktion f^{-1}, wenn zu jedem $f(x) \in \mathbb{W}_f$ genau ein $x \in \mathbb{D}_f$ gehört.*

Existiert f^{-1}, so nennen wir f **eineindeutig**.

Bemerkung: *Falls die Umkehrfunktion f^{-1} zu f existiert, so ist f auch die Umkehrfunktion zu f^{-1}. Es gilt also:*

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{und} \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

[1] Im Jargon der höheren Mathematik wird eine eineindeutige Funktion als **bijektiv** bezeichnet.

Beispiel: Zusammengefasst können wir nun sagen, wie wir die Quadratfunktion $f(x) = x^2$ zu definieren haben, wenn wir möchten, dass eine Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ existiert. Wir müssen ihren Definitionsbereich auf $\mathbb{R}_0^+$ einschränken!

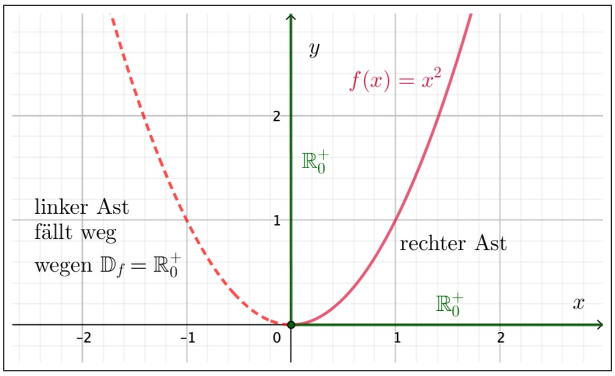
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \ (\subset \mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

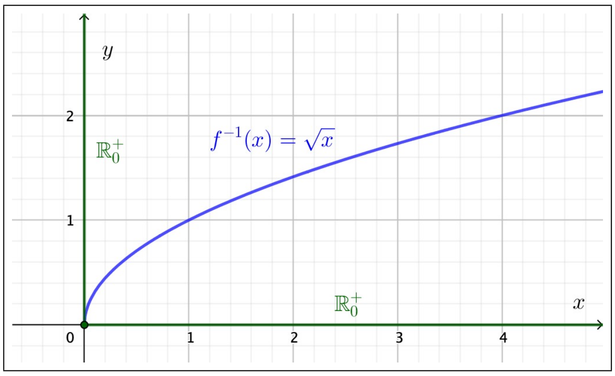
In die Umkehrfunktion können nur Stellen aus dem Wertebereich von f eingesetzt werden, was bei $f(x) = x^2$ wiederum $\mathbb{R}_0^+$ entspricht. Die Umkehrfunktion ist die Wurzelfunktion:

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \ (\subset \mathbb{R}) \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \sqrt{y} \end{array}$$

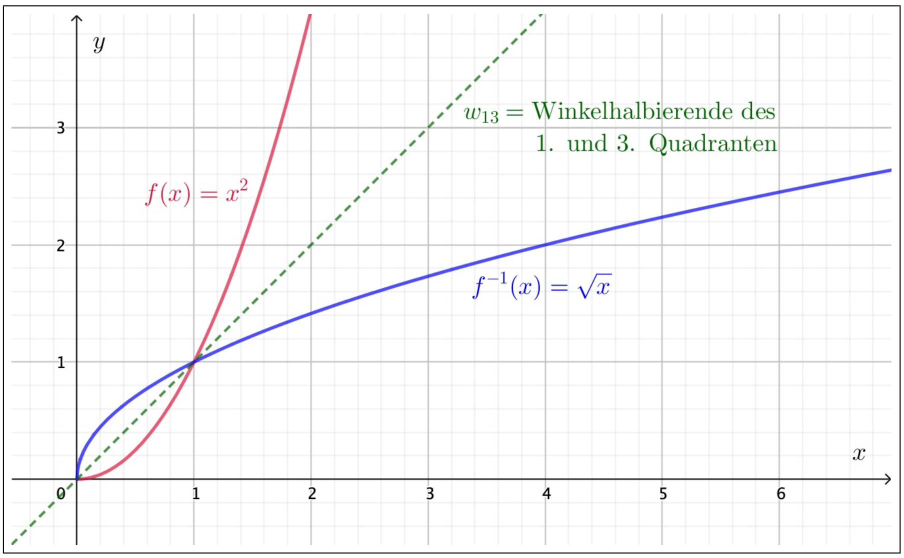
Zu jedem $x \in \mathbb{R}_0^+$ gehört ein eindeutiges Quadrat $y = x^2$, aus dem ebenso eindeutig durch Wurzelziehen wieder das ursprüngliche x berechnet werden kann. Die Quadratfunktion $f(x) = x^2$ ist – nach Einschränkung auf $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$! – eine eineindeutige Funktion, also eine Funktion mit Umkehrfunktion.

Betrachten wir zum Schluss die zugehörigen Graphen, wobei wir nun auch die Umkehrfunktion als Funktion der Variable x verstehen wollen:





Besonders interessant wird es, wenn wir die Graphen von Funktion f und Umkehrfunktion f^{-1} ins gleiche Koordinatensystem einzeichnen:



Merke: Der Graph der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ ist stets der an w_{13} (= Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten) gespiegelte Graph der Funktion $f(x)$!