FUNKTIONEN IV: Weiteres zu QFs + Prüfungsvorbereitung

Klasse 155c / AGe

1. Gib die folgenden QFs in der **Normalform (NF)** und in der **Nullstellenform (NSF)** an, wenn dies möglich ist – natürlich sind einige dieser Funktionen bereits in der einen oder anderen Form angegeben.

   Tipp: Für eine allfällige Faktorisierung braucht es nicht jedes Mal die Mitternachtsformel...

   $a(x) = 2x^2 - 2x - 4$ $\qquad b(x) = 3x^2 - 12x + 12$ $\qquad c(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$

   $d(x) = 2x^2 - 10$ $\qquad e(x) = (-2x + 5)(2x + 1)$ $\qquad f(x) = \frac{1}{3}(x + 5)^2$

   $g(x) = x^2 + 14x + 46$ $\qquad h(x) = 2\big(x + 3 + 3\sqrt{10}\big)\big(x + 3 - 3\sqrt{10}\big)$ $\qquad i(x) = 3x^2 + 3x - 330$

   $j(x) = -(x - 5)^2 + 25$ $\qquad k(x) = \frac{1}{27}(x + 9)^2 + 3$ $\qquad l(x) = 7(x + 3)(x - 3)$

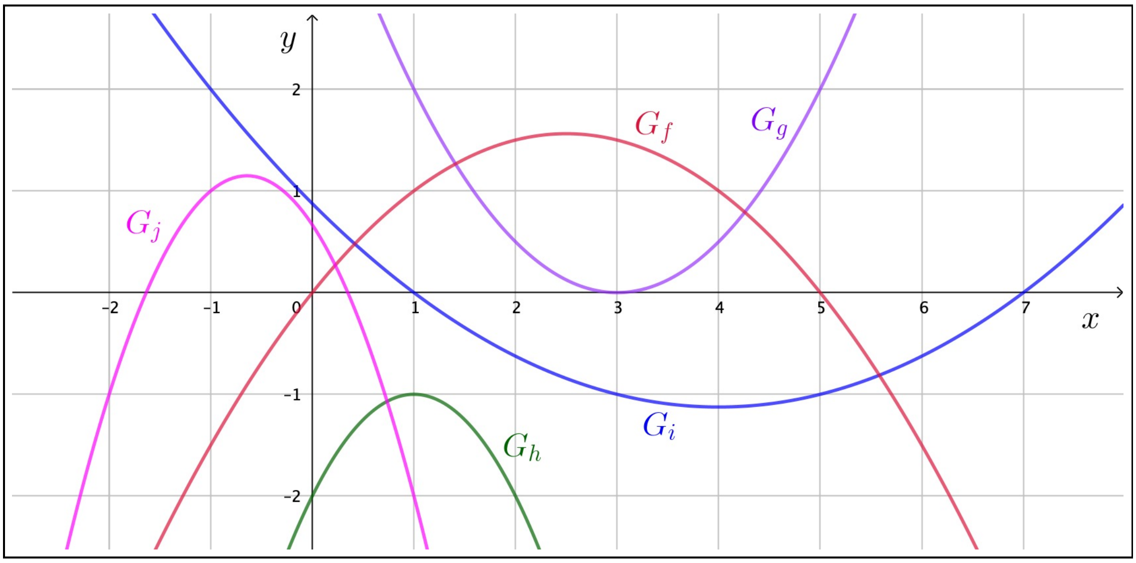
   $m(x) = \frac{1}{13}x^2 - x$ $\qquad n(x) = 3\pi x^2 - \pi^2 x - 2\pi^3$ $\qquad o(x) = 6x^2 - 216$

2. Skizziere die zugehörigen Parabeln möglichst zügig in einem Koordinatensystem. Stelle dir dazu zuerst vor, wie die Parabel aufgrund der Parameter ungefähr zu verlaufen hat. Berechne anschließend den Scheitelpunkt, sodass du die Parabel relativ genau eintragen kannst:

   $f(x) = \frac{1}{6}(x - 2)(x - 8)$ $\qquad g(x) = 4x^2 + 4x + 1$ $\qquad h(x) = -\frac{8}{5}(x + 4)(x + 5)$

   $i(x) = -5x^2 + 2x + 3$ $\qquad j(x) = \frac{1}{12}(2x + 9)(3x - 2)$ $\qquad k(x) = -x^2 + 7x - \frac{25}{2}$

3. Gib zu jeder Parabel die Normalform der QF an – wähle bei der Berechnung jeweils den passenden Ansatz (NF oder NSF) und überlege dir im Vornherein, wie die Parameter der NF ungefähr herauskommen müssen.



4. Bestimme jeweils die Normalform der QF und die Koordinaten des Scheitelpunktes.

   (a) Die Nullstellen einer QF liegen bei $\frac{3}{2}$ und 4. Ihr Graph schneidet die y-Achse bei $y = 20$.

   (b) Eine QF habe die Nullstellen $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{9}{2}$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse liege bei $y = \frac{9}{8}$.

   (c) Die Parabel zu einer QF verlaufe durch den Ursprung und schneide die x-Achse bei $x = -9$. Außerdem befinde sich ihr Scheitelpunkt auf der Höhe $y = 6$.

   (d) Bei einer Parabel liege der Schnittpunkt mit der y-Achse auf der Höhe $y = -3$. Weitere Punkte sind $(-2, \frac{1}{2})$ und $(4, 8)$. Wie lautet die Normalform der zugehörigen QF?

5. (a) Parabel durch $P(1,4)$, $Q(4,7)$ und $R(7,1)$. NF und NSF der zugehörigen QF?
   (b) Es seien $L(-\frac{5}{2},3), M(\frac{1}{4},-\frac{9}{8}), N(2,12) \in G_f$. Wie lautet $f(x)$ in Nullstellenform?

6. (a) Berechne die Nullstellen von $f(x) = -x^2 - 6x - 8$, sowie den Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel. Entscheide zudem, ob der Punkt $P(\frac{18}{5}, -43)$ oberhalb, auf oder unter der Parabel liegt.
   (b) Gib den Scheitelpunkt der Parabel zu $n(x) = \frac{1}{10}x^2 - 2x + c$ in Abhängigkeit des Parameters c an.

7. (a) Es sei $f(x) = ax^2 + c$. Was wissen wir ohne zu rechnen über den Scheitelpunkt der Parabel zu f?
   (b) Es sei $g(x) = ax^2 + bx$. Welche spezielle Eigenschaft weist die zugehörige Parabel auf?
   (c) Die Normalform einer QF $h(x) = x^2+bx+c$ lasse sich mittels 1. oder 2. binomischer Formel faktorisieren. Was folgt daraus für die Lage des Scheitelpunktes der zugehörigen Parabel?

8. Gegeben seien die Parabeln f und g zu $f(x) = \frac{5}{36}x^2 - \frac{7}{12}x - \frac{21}{2}$ und $g(x) = -\frac{1}{18}x^2$, sowie die Gerade h zu $h(x) = \frac{2}{3}x + 2$.
   (a) Skizziere die Graphen zu f, g und h grob, aber möglichst speditiv in einem Koordinatensystem.
   (b) Berechne alle Schnittpunkte von G_f, G_g und G_h.
   (c) Berechne die Scheitelpunkte von f und g.
   (d) Kontrolliere deine Resultate und deine Skizzierung mittels `GeoGebra`.

9. Eine Parabel sei gegeben durch $f(x) = \frac{5}{54}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$.
   Liegen die Punkte $P(-2, \frac{4}{3})$, $Q(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ und $R(6,3)$ unterhalb, oberhalb oder genau auf der Parabel?

10. (a) Die Öffnung einer Parabel sei $\frac{1}{5}$. Zudem verlaufe sie durch $P(-4,4)$ und $Q(6,6)$. Wie lautet die Nullstellenform der zugehörigen QF?
    (b) Eine Parabel berühre die x-Achse an der Stelle $x = \frac{4}{3}$ und schneide die y-Achse bei $y = -3$. Wie lautet die NF der zugehörigen QF?
    (c) Eine Parabel habe ihren Scheitelpunkt auf der Geraden $x = 3$. Weiter sei $x = -3$ eine Nullstelle und der Punkt $(1,2)$ sitze ebenfalls auf ihr. NF der zugehörigen QF?

11. Gegeben seien die folgenden Funktions- und Geradengleichungen:

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{16}{5} \qquad g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{21}{16} \qquad h(x) = -\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$j:\ y = 2 \qquad k(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \qquad l:\ x - 2y = -5$$

    Ermittle alle Schnittpunkte zwischen den so beschriebenen geometrischen Objekten. Skizziere danach alles in einem Koordinatensystem.

12. (a) Gegeben sei die Parabel f zur Gleichung $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$.
    Welche Gerade mit y-Achsenabschnitt $q = 3$ ist eine Tangente an f? Funktionsgleichung?
    (b) Bestimme den Parameter a so, dass die Parabel zu $f(x) = ax^2 - 2x + 5$ die durch $g(x) = -3x + \frac{21}{4}$ gegebene Gerade zur Tangente hat. Gib den Berührungspunkt an.
    (c) Bestimme s so, dass die Gerade g mit der Funktionsgleichung $g(x) = s$ eine Tangente an die Parabel p mit der Gleichung $p(x) = x^2 + 8x + 10$ ist.
    (d) Gegeben sei die lineare Funktion $g(x) = -2x + 3$. Für welchen Wert von a in $f(x) = a(x-3)^2 + 1$ haben f und g einen Berührungspunkt und wie lauten dessen Koordinaten?
    (e) Bestimme den Parameter b in der QF $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 1$ so, dass die zugehörige Parabel f die durch $g(x) = 2x - \frac{7}{2}$ gegebene Gerade als Tangente besitzt.
    (f) Die Gerade g sei gegeben durch $g:\ 2x - y = -2$ und f sei die Parabel zu $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$. Bestimme den Berührungspunkt der zu g parallel verlaufenden Tangente t an die Parabel f.