FUNKTIONEN III: Erste elementare Funktionstypen

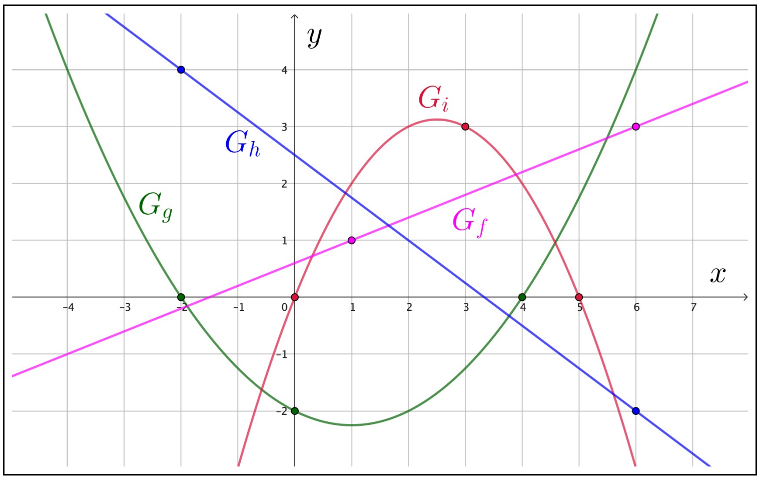
Klasse 155c / AGe

1. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen möglichst zügig, aber auch präzise!

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 2 \qquad g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3 \qquad h(x) = \frac{5}{2} \qquad i(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 3$$

2. Eine Parabel schneide die y-Achse auf der Höhe $y = 2$ und verlaufe durch die Punkte $(3, 8)$ und $(12, -10)$. Wie lautet die zugehörige quadratischen Funktion?

3. Finde die Funktionsgleichungen zu den folgenden Graphen:



4. Ermittle die Achsenschnitt- oder -berührungspunkte der Graphen folgender Funktionen:

$$f(x) = x^2 - x - 1 \qquad g(x) = \frac{12}{7}x - 3 \qquad h(x) = -2x^2 + 5x - 3 \qquad i(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 5$$

5. **Zusatzaufgabe:** *Mächtigkeit unendlich großer Zahlenmengen*

Als **endliche Menge** bezeichnen wir eine Menge mit einer endlichen Anzahl Elementen, z.B.

$$V = \{\text{“Karl”}, \text{“Kerstin”}, \text{“Kira”}, \text{“Konrad”}, \text{“Kurt”}\} \quad \text{und} \quad N = \{\text{“Meier”}, \text{“Moser”}, \text{“Müller”}\}$$

Als **Mächtigkeit** $|M|$ der Menge M wird bei endlichen Mengen die Anzahl ihrer Elemente bezeichnet. Die Vornamen-Menge V ist mächtiger als die Nachnamen-Menge N, denn $|N| = 3 < |V| = 5$.

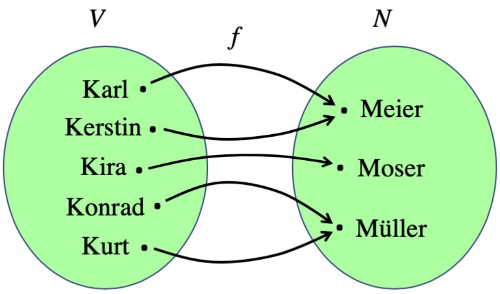
Wir denken weiter: V und N würden gleich viele Namen enthalten und wären damit **gleich mächtig**, wenn zu jedem Vornamen $v \in V$ genau ein Nachname $n \in N$ und umgekehrt zu jedem Nachnamen $n \in N$ genau ein Vorname $v \in V$ gehören würde.

Anders formuliert: Gäbe es eine **eineindeutige** Funktion $f : V \to N$, die jedem Vornamen einen Nachnamen zuordnet, so müssten die beiden Mengen V und N gleich mächtig sein.

Dies ist in unserem vorigen Beispiel aber nicht der Fall. Wir können uns eine beliebige Funktion f ausdenken, die jeweils einem Vornamen $v \in V$ einen Nachnamen $n \in N$ zuordnet, aber zu keiner dieser Funktionen werden wir eine gültige Umkehrfunktion f^{-1} finden. “Gültig” würde bedeuten:

f^{-1} ist eine eindeutige Funktion auf N: f^{-1} weist **jedem** $n \in N$ **genau ein** $v \in V$ zu.

f^{-1} ist die Umkehrung von f: Es gilt: $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$. “Setze ich den Funktionswert $f(x)$ an der Stelle x in die Umkehrfunktion f^{-1} ein, so erhalte ich die ursprüngliche Stelle x.”



Die Funktion
$f\colon V \longrightarrow N$
ist eindeutig, aber wie stände es mit einer allfälligen Umkehrfunktion?

Diese Erkenntnis liefert die Motivation für eine sehr sinnvolle, weil auch für unendliche Mengen brauchbare Definition für das "gleich mächtig"-Sein zweier Mengen:

> **Definition der Gleichmächtigkeit von Mengen**
>
> *Zwei Mengen X und Y heißen genau dann* **gleich mächtig**, *wenn es eine Funktion*
>
> $$f: \quad X \quad \longrightarrow \quad Y$$
>
> *gibt, zu der die Umkehrfunktion $f^{-1}: Y \to X$ existiert.*
>
> *Oder kurz: Existiert eine eineindeutige Funktion $f: X \to Y$, so nennen wir X und Y gleich mächtig.*

Betrachten wir die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: &]1;2[& \longrightarrow &]0;1[\\ & x & \longmapsto & x-1 \end{array}$$

Ganz offensichtlich ist dieses f eine eineindeutige Funktion und die Umkehrfunktion existiert (nämlich: $f^{-1}: y \mapsto y+1$). Damit sind die beiden Zahlenintervalle $]0;1[$ und $]1;2[$ gleich mächtig.

Dies könnte uns zu der saloppen Aussage verleiten, dass diese beiden Intervalle effektiv "gleich viele Zahlen" beinhalten, weil die Mächtigkeit bei endlichen Mengen ja gerade der Angabe entspricht, wie viele Elemente die Menge enthält. Diese Aussage erschiene uns ja auch ziemlich vernünftig, denn weshalb sollte es zwischen 0 und 1 nicht genau gleich viele Zahlen geben wie zwischen 1 und 2?! Aber Achtung, so einfach ist das bei unendlichen Mengen nicht...

Betrachten wir eine zweite Funktion g, die ebenfalls eineindeutig ist und somit die beiden Zahlenmengen, auf denen sie operiert, gleich mächtig macht:

$$\begin{array}{rccc} g: &]0;1[& \longrightarrow &]1;+\infty[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

g weist jeder Zahl zwischen 0 und 1 ihren **Kehrwert** zu, also eine Zahl > 1. Alle Zahlen > 1 können so erreicht werden! $]0;1[$ und $]1;+\infty[$ sind wegen der Eineindeutigkeit von g gleich mächtige Zahlenmengen.

Nun hängen wir die beiden eineindeutigen Funktion aneinander: Einer Zahl $x \in]1;2[$ wird durch die Funktion f zuerst eine Zahl $f(x) \in]1;2[$ und anschließend eine Zahl $g\big(f(x)\big) \in]1;+\infty[$ zugewiesen. Die aneinander gehängte oder **verschachtelte** Funktion $h(x) := g\big(f(x)\big)$ ist – wie sich leicht überlegen lässt – immer noch eineindeutig!

$$\begin{array}{rccc} h: &]1;2[& \longrightarrow &]1;+\infty[\\ & x & \longmapsto & h(x) = g\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

Folglich sind die beiden Intervalle $]1;2[$ und $]1;+\infty[$ gleich mächtig – und dies, obwohl $]1;2[$ ja ganz klar eine echte Teilmenge von $]1;+\infty[$ ist. Es ist bei unendlichen Mengen offenbar nicht mehr sinnvoll die Mächtigkeit mit der Anzahl Elemente gleichzusetzen. Vielmehr gibt es bei unendlichen Mengen unterschiedliche **Mächtigkeitsklassen**. $]1;2[$ und $]1;+\infty[$ gehören derselben Mächtigkeitsklasse an.

Mit anderen Funktionen ließe sich beispielsweise zeigen, dass die Menge aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 weniger mächtig ist als das reelle Intervall $]0;1[$. Es gibt also durchaus Unterschiede in der Mächtigkeit verschiedener unendlich großer Mengen.

(a) Skizziere die Graphen von $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ in einem Koordinatensystem.

(b) Wie lautet die Umkehrfunktion zur Funktion $g(x)$? Wie diejenige zu $h(x)$?