1 Eine kleine Einführung in die Mengenlehre

Definition von **Menge** und **Element** nach **Georg Cantor** (1845 – 1918):

> **Def.:** *"Eine* **Menge** *M ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die* **Elemente** *von M genannt werden – zu einem Ganzen." (1895)*

Um auszudrücken, dass ein bestimmtes Element in einer Menge M enthalten resp. nicht enthalten ist, schreiben wir:

$m \in M :=$ "m ist Element von M." resp. $n \notin M :=$ "n ist kein Element von M."

Einige Zahlenmengen kommen sehr häufig vor, weshalb wir ihnen eigene Namen/Symbole geben:

$\mathbb{N}$ = Menge der **natürlichen Zahlen** $:= \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0$ = Menge der **natürlichen Zahlen inklusive Null** $:= \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = Menge der **ganzen Zahlen** $:= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = Menge der **rationalen Zahlen**

$\mathbb{R}$ = Menge der **reelle Zahlen**

$\mathbb{R}^2$ = Menge aller **geordneten, reellen Zahlenpaare** (x, y) mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$

Zahlenmengen notieren wir oftmals – wie eben gesehen – in der **aufzählenden Form**. In vielen Fällen ist aber die **beschreibende Form** praktischer, z.B.:

$\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 100\}$ = Menge aller natürlichen Zahlen grösser oder gleich 100

Drei sehr häufig verwendete **Mengenverknüpfungen** (= Mengenoperationen) sind:

Mengendurchschnitt: $A \cap B :=$ Menge aller Elemente, die sowohl in der Menge A, als auch in der Menge B enthalten sind (für $A \cap B$ sagen wir: "A geschnitten mit B")

Mengenvereinigung: $A \cup B :=$ Menge aller Elemente, die in der Menge A und/oder in der Menge B enthalten sind (für $A \cup B$ sagen wir: "A vereinigt mit B")

Mengendifferenz: $A \setminus B :=$ Menge aller Elemente, die in der Menge A, aber nicht in der Menge B enthalten sind (für $A \setminus B$ sagen wir: "A ohne B")

Das Resultat einer Mengenverknüpfung soll selber wieder eine Menge sein. Aber welche Menge ergibt sich bei der Bildung von $A \cap B$, wenn A und B gar kein gemeinsames Element aufweisen? Für diesen Fall ist es nötig eine Menge einzuführen, die kein Element enthält, also leer ist:

$\{\,\}$ = **leere Menge** = Menge, die kein einziges Element enthält

Schließlich gebrauchen wir ab und zu die **Teilmengenbeziehung**:

A* ist Teilmenge von *B $= A \subset B :=$ alle Elemente der Menge A sind auch Elemente der Menge B

Auch im Fall $A = B$ gilt: $A \subset B$. Weiter ist die leere Menge $\{\,\}$ Teilmenge jeder anderen Menge.