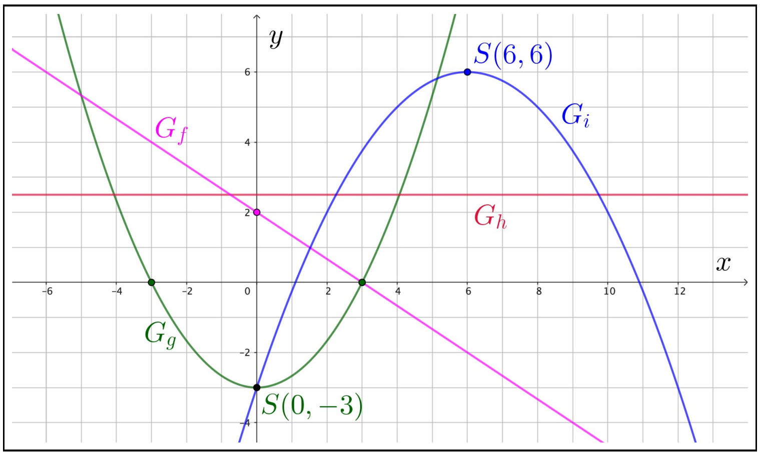
FUNKTIONEN III: Erste elementare Funktionstypen – LÖSUNGEN

Klasse 155c / AGe

1. Bei den Graphen zu g und i handelt es sich um Parabeln, während zu f und h Geraden gehören:
   - h eine konstante Funktion, der Graph also eine Horizontale auf der Höhe $\frac{5}{2}$.
   - Bei f sind bereits die Steigung $-\frac{2}{3}$ und der y-Achsenabschnitt 2 gegeben, sodass sich die Gerade rasch eintragen lässt.
   - Bei der quadratischen Funktion $g(x) = ax^2 + bx + c = \frac{1}{3}x^2 - 3$ ist der Parameter $b = 0$. Das bedeutet, dass die zugehörige Parabel (auf der Höhe $c = -3$) mit Steigung 0 durch die y-Achse hindurchgeht. Die Steigung einer Parabel hat aber nur in ihrem Scheitelpunkt S den Wert 0. Folglich liegt der S auf der y-Achse. Das ist bei den Parabeln aller QFs mit $b = 0$ so. Sie müssen folglich stets symmetrisch zur y-Achse sein. Das Einsetzen einer weiteren Stelle, z.B. $x = 3$ ergibt einen weiteren Punkt, mit dem sichtbar wird, wie weit die Parabel geöffnet ist: $g(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 - 3 = 3 - 3 = 0$.
   - Bei i wissen wir, dass die zugehörige Parabel nach unten geöffnet ist $(a = -\frac{1}{4})$ und dass sie die y-Achse auf der Höhe $c = -3$ mit Steigung $b = 3$ durchsticht. Folglich muss der Scheitelpunkt S rechts der y-Achse liegen, denn anders lassen sich diese Bedingungen nicht alle erfüllen. Rechnerisch erhalten wir für den S:

   $$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \quad \Rightarrow \quad y_S = i(6) = -\frac{1}{4} \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 - 3 = -9 + 18 - 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad S(6,6)$$

   Hier die Graphen der vier Funktionen:



2. Dies ist eine erste typische Aufgabe zur Bestimmung fehlender Funktionsparameter. Zunächst wissen wir: $f(x) = ax^2 + bx + 2$. **Wir setzen nun die gegebenen Punkte in diese Funktionsgleichung ein und erhalten so Gleichungen für die zu bestimmenden Parameter.** Diese Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem, das wir auflösen können:

$$\left| \begin{array}{c} f(3) = 8 \\ f(12) = -10 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 2 = 8 \\ a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + 2 = -10 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 9a + 3b = 6 \\ 144a + 12b = -12 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 3a + b = 2 \\ -12a - b = 1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad -9a = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = -\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + b = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{b = 3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x + 2}}$$

3. Bei den Geraden G_f und G_h können jeweils die beiden gegebenen Punkte zur Bestimmung der Funktionsgleichung benutzt werden. Dabei wird zunächst die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmt und danach einer der beiden Punkte in die Funktionsgleichung eingesetzt, um auch noch den y-Achsenabschnitt q zu erhalten:

$$f: \quad m_f = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{3-1}{6-1} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{5}\,x + q$$

$$\Rightarrow \quad f(1) = \frac{2}{5} \cdot 1 + q \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{2}{5}\,x + \frac{3}{5}}}$$

$$h: \quad m_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-2-4}{6-(-2)} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad h(x) = -\frac{3}{4}\,x + q$$

$$\Rightarrow \quad h(6) = -\frac{3}{4} \cdot 6 + q \stackrel{!}{=} -2 \quad \Rightarrow \quad q = -2 + \frac{18}{4} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h(x) = -\frac{3}{4}\,x + \frac{5}{2}}}$$

Bei den Parabeln G_g und G_i können wir die **Nullstellen** x_1 und x_2 direkt ablesen! Folglich notieren wir die Funktionsgleichungen zunächst in der **Nullstellenform** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Der dritte Punkt erlaubt es uns, den Öffnungsparameter a auch noch zu bestimmen. Hinterher sollte man ausmultiplizieren, um die Funktionsgleichung auf die **Normalform** zu bringen:

$$g: \quad \text{Nullstellen bei } x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad g(x) = a\big(x - (-2)\big)\big(x - 4\big) = a(x+2)(x-4)$$

$$\Rightarrow \quad g(0) = a(0+2)(0-4) = -8a \stackrel{!}{=} -2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{1}{4}\,(x+2)(x-4) = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2x - 8\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x - 2}}$$

$$i: \quad \text{Nullstellen bei } x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad i(x) = a(x-0)(x-6) = ax(x-6)$$

$$\Rightarrow \quad i(3) = a \cdot 3(3-6) = -9a \stackrel{!}{=} 3 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = -\frac{1}{3}\,x(x-6) = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 6x\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\,x^2 + 2x}}$$

4. Die Schnittpunkte mit der y-Achse sind direkt ablesbar. Dafür braucht es keine Rechnungen. Um hingegen die Schnittpunkte mit der x-Achse, also die Nullstellen zu bestimmen, müssen wir die Funktionsgleichungen gleich 0 setzen und dann nach x auflösen. Bei der linearen Funktion $g(x)$ ergibt sich so genau ein Schnittpunkt. Bei den anderen (quadratischen) Funktionen hingegen können sich unterschiedliche Anzahlen von Lösungen ergeben, wie das bei quadratischen Gleichungen eben möglich ist:

$$f: \quad \text{Schnittpunkt mit } y\text{-Achse:} \quad \underline{\underline{(0,-1)}}$$

$$f(x) = x^2 - x - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Schnittpunkte mit der } x\text{-Achse:} \quad \underline{\underline{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)}}$$

$$g: \quad \text{Schnittpunkt mit } y\text{-Achse:} \quad \underline{\underline{(0,-3)}}$$

$$g(x) = \frac{12}{7}\,x - 3 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Schnittpunkt mit der } x\text{-Achse:} \quad \underline{\underline{\left(\frac{7}{4}, 0\right)}}$$

h : Schnittpunkt mit y-Achse: $\underline{\underline{(0,-3)}}$

$$h(x) = -2x^2 + 5x - 3 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{3}{2} \text{ oder } 1$$

$\Rightarrow$ Schnittpunkte mit der x-Achse: $\underline{\underline{\left(\frac{3}{2}, 0\right) \quad \text{und} \quad (1,0)}}$

i : Schnittpunkt mit y-Achse: $\underline{\underline{(0,5)}}$

$$i(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 5 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{\frac{2}{5}} = 5$$

$\Rightarrow$ Berührungspunkt mit der x-Achse: $\underline{\underline{(5,0)}}$

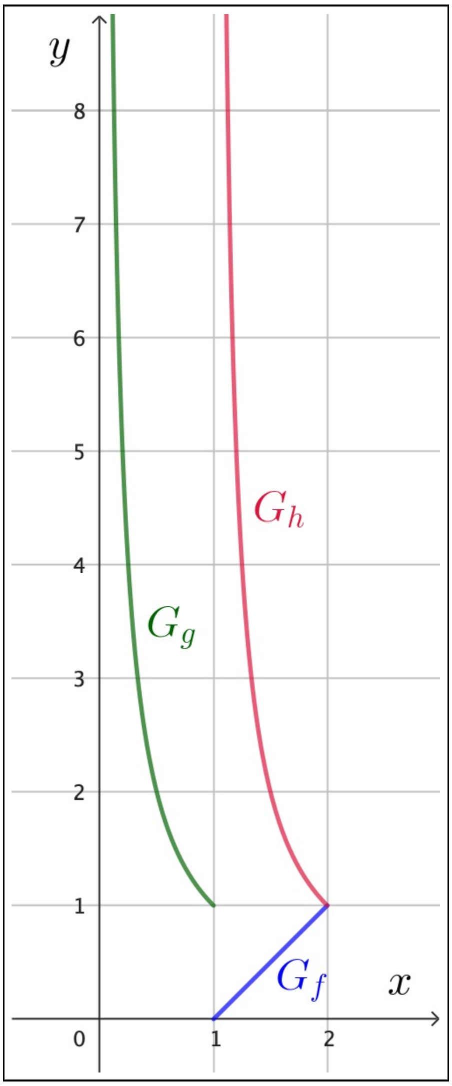
5. **Zusatzaufgabe:** *Mächtigkeit unendlich großer Zahlenmengen*

(a) Die drei Graphen sind rechts gezeigt.

Achtung! Gemäß Funktionsdeklaration werden in f und in h nur Zahlen aus dem Intervall $]1;2[$ und in g nur Zahlen $\in]0;1[$ eingesetzt. Dem entsprechend existieren die Funktionsgraphen nur über diesen Intervallen auf der x-Achse.

Wir sehen, wie der Graph von $g(x)$ gegen unendlich große Werte geht, wenn x gegen 0 strebt. Tatsächlich werden dort beliebig große y-Werte erreicht, man muss x nur hinreichend nahe gegen 0 gehen lassen!

Der Graph von $h(x)$ ist derjenige von $g(x)$, nun aber einfach um eine Einheit nach rechts verschoben.



(b) Wir können die Funktionsgleichungen rechnerisch umkehren:

$$g(x) = \frac{1}{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g^{-1}(x) = \frac{1}{x}}}$$

Die Kehrwertfunktion $g(x) = \frac{1}{x}$ hat also sich selber als Umkehrfunktion – was nach kurzer Überlegung eigentlich keine wirkliche Überraschung ist.

Für die Umkehrfunktion zu $h(x)$ erhalten wir:

$$h(x) = \frac{1}{x-1} = y \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{y} + 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1}}$$

Der Graph der Umkehrfunktion von h ist der um 1 angehobene Graph der Kehrwertfunktion $g(x)$.