FUNKTIONEN II: Grundlegendes zu Funktionen – LÖSUNGEN

Klasse 155c / AGe

1. (a) In die Quadratfunktion kann grundsätzlich jede reelle Zahl sinnvoll eingesetzt werden, denn Quadrieren bedeutet "mit sich selber multiplizieren" – und jede Zahl sollte mit sich selber mutlipliziert werden können. Somit ist der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$.

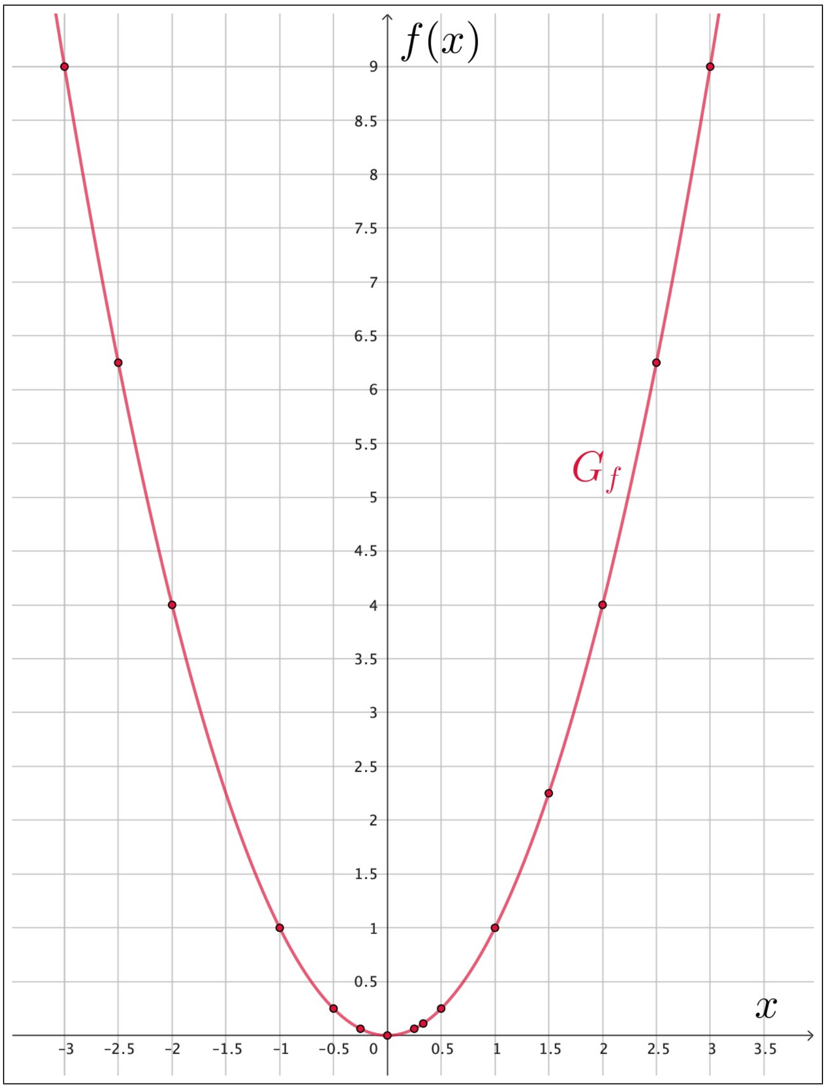
   Quadrate reeller Zahlen sind positiv (Ausnahme: $0^2 = 0$). Wird eine negative Zahl quadriert, so entsteht ein positiver Wert, da $(-1)^2 = 1$. Für beliebige Zahlen $x \in \mathbb{R}$ werden beliebig grosse Quadratwerte erreicht. Der Wertebereich der Quadratfunktion ist somit $\mathbb{R}_0^+$.

   Insgesamt können wir für die Quadratfunktion schreiben:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{resp.} \quad f(x) = x^2$$

   (b) +(c) Für die Wertetabelle und den Funktionsgraphen ergibt sich:

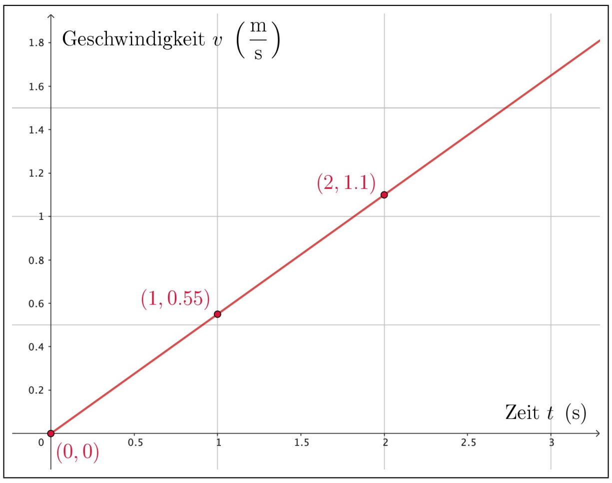
x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9
-1	1
-2	4
-3	9
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} \approx 0.06$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9} \approx 0.11$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} = 2.25$
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4} = 6.25$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} \approx 0.06$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} = 0.25$
$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4} = 6.25$

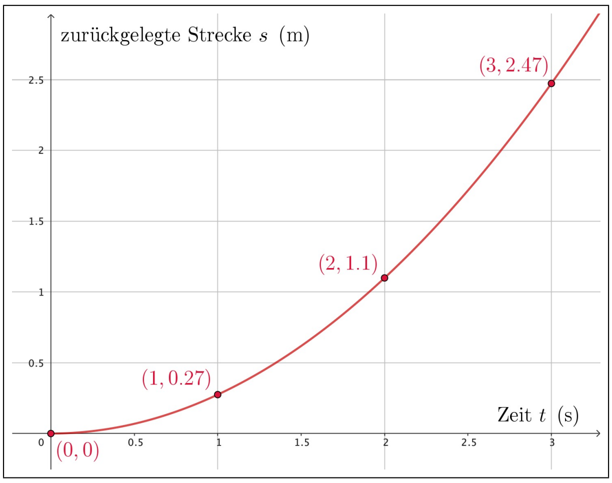


2. Für die Beschleunigung erhalten wir durch Einsetzen der Werte in die Ortsfunktion:

$$s(t) = \frac{a}{2}\,t^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 2.85\,\mathrm{m}}{(3.22\,\mathrm{s})^2} \overset{\mathrm{TR}}{\approx} 0.550\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Nun können wir verschiedene (einfache) Zeitwerte t in die Funktionen $v = a \cdot t$ und $s = \frac{a}{2}\,t^2$ einsetzen und damit die Funktionsgraphen skizzieren.





Wir sehen: Die Geschwindigkeit ist eine **lineare Funktion** – in diesem Fall sogar eine **Proportionalität** zwischen der verstrichenen Zeit t und der erreichten Geschwindigkeit $v(t)$, das bedeutet, ihr Graph ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung $(0, 0)$.

Die zurückgelegte Strecke ist hingegen eine **quadratische Funktion** von t ist. Ihr Graph – eine **Parabel** weist denselben charakteristischen Verlauf auf, den wir schon in Aufgabe 1 bei der "reinen" Quadratfunktion beobachtet hatten.

3. (a) Grundsätzlich gilt: Je weiter das Gefäss auf der aktuellen Pegelstandshöhe, desto langsamer steigt momentan der Pegelstand. Die momentane Steigung des Pegelstandsdiagramms ($\widehat{=}$ Anstiegsgeschwindigkeit) ist folglich ein umgekehrtes Mass für den momentanen Gefässdurchmesser. Je enger das Gefäss, desto grösser ist die aktuelle Steigung. Die Zuordnungen lauten demnach:

A $\leftrightarrow$ **v.:** Das Gefäss A ist auf allen Höhen gleich weit. Daher steigt der Pegelstand schön gleichmässig.

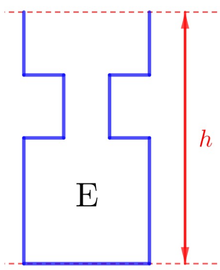
B $\leftrightarrow$ **i.:** Das Gefäss verjüngt sich nach oben. Daher wird der Pegelstand immer schneller ansteigen.

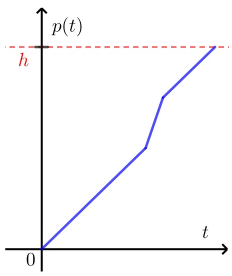
C $\leftrightarrow$ **iii.:** Der Pegelstandsanstieg ist in der Mitte am schnellsten. Das Pegelstandsdiagramm startet eher flach, wird dann steiler, flacht im zweiten Teil dann aber wieder ab.

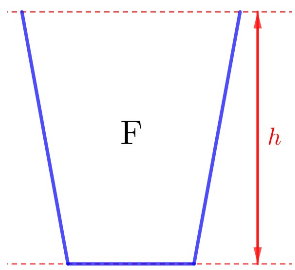
D $\leftrightarrow$ **vi.:** Hier ist es gerade umgekehrt wi bei C. Das Gefäss ist auf mittlerer Höhe am weitesten. Dort verläuft der Anstieg am langsamsten. Diagramm i. kommt allerdings nicht in Frag, denn dort müsste der Anstieg kurzzeitig ganz aufhören. Das ist sicher nicht der Fall.

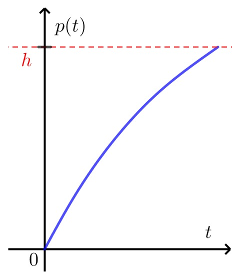
(b) Beim Gefäss E springt die Pegelstandsgeschwindigkeit (= Steigung) in der Mitte der Gefässhöhe schlagartig auf einen grösseren Wert. Nach drei Vierteln geht sie aber eben so schlagartig auf den alten Wert zurück.

Beim Gefäss F nimmt die Pegelstandsgeschwindigkeit langsam ab, weil sich das Gefäss gegen oben eben immer mehr verbreitert. Anstieg der Auffüllgeschwindigkeit



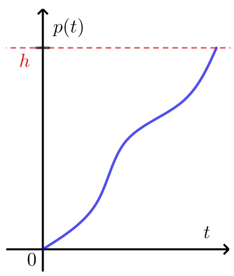


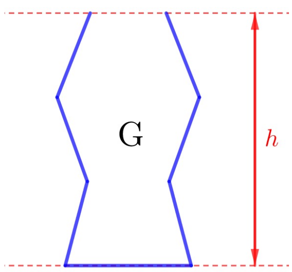


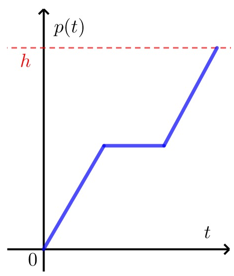


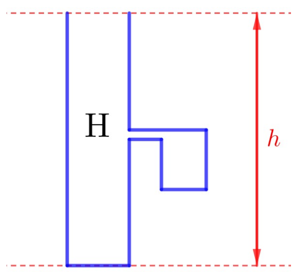
(c) Bei der linken Pegelstandsfunktion muss es sich um ein Gefäss handeln, das ganz unten dick ist, dann schlanker wird, dann aber wieder dicker und ganz oben schliesslich wieder schlank.

Bei der rechten Pegelstandfunktion stoppt die Zunahme des Pegelstandes, obwohl weiterhin Flüssigkeit eingegossen wird. Das ist verwirrend. Eine Lösung wäre eine Art Reservoir, wie sie in der Lösung angedeutet wird.









4. Allgemeine Aussagen zu den drei Fragestellungen:

   i. Kurven, bei denen es vorkommt, dass zu einer bestimmten Stelle x auf der horizontalen Achse mehrere y-Werte gehören, scheiden als Funktionsgraphen aus.

   ii. Beim Definitionsbereich fragen wir, welche x-Werte überhaupt in die Funktion eingesetzt werden können: "Über welchen Stellen x existiert der Graph?"

   Beim Wertebereich fragen wir umgekehrt, welche Stellen auf der y-Achse getroffen werden.

   Sowohl Definitions-, wie auch Wertebereich sollen als Zahlenmengen notiert werden.

   iii. Soll eine Funktion eine Umkehrfunktion besitzen, so muss diese ebenso eindeutig sein. D.h., zu jedem y im Wertebereich darf nur genau ein x gehören.

(a) i. Ja, ist ein Funktionsgraph! Wir sehen den typischen Verlauf einer **kubischen Funktion**.
   ii. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, Wertebereich: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$.
   iii. Keine Umkehrfunktion. Zu $y = 0$ gehören z.B. drei Stellen auf der x-Achse.

(b) i. Nein, ist kein Funktionsgraph. Zu jedem $x \in]-1; 1[$ gehören zwei y-Werte.

(c) i. Ja, ist ein Funktionsgraph! Wir sehen eine **Horizontale ($\widehat{=}$ konstante Funktion)**.
   Jedem x-wird derselbe Wert zugeordnet.
   ii. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, Wertebereich: $\mathbb{W}_f = \{1\}$.
   iii. Keine Umkehrfunktion. Zu $y = 1$ gehören unendlich viele Stellen auf der x-Achse.

(d) i. Ja, ist ein Funktionsgraph! Wir sehen eine typische **Wurzelfunktion**.
   ii. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$, Wertebereich: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.
   iii. Ja, es gibt eine Umkehrfunktion. Der jeweilige y-Wert kann quadriert werden, um wieder eindeutig das zugehörige x zu erhalten.

(e) i. Ja, ist ein Funktionsgraph! Wir sehen eine typische **Sinusfunktion**.
   ii. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, Wertebereich: $\mathbb{W}_f = [-1; 3]$.
   iii. Keine Umkehrfunktion. Jeder y-Wert ist Funktionswert unendlich vieler Stellen x.

(f) i. Ja, ist ein Funktionsgraph! Zu jedem x im Definitionsbereich gehört genau ein y.
   ii. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = [-1; 1]$, Wertebereich: $\mathbb{W}_f = [0; 1]$.
   iii. Keine Umkehrfunktion. Zu jedem $y \in [0; 1[$ gehören jeweils zwei Stellen x.

(g) i. Nein, ist kein Funktionsgraph. Zu $x = 0$ gehören beispielsweise drei y-Werte.

(h) i. Ja, ist ein Funktionsgraph! Wir sehen eine typische **Parabel ($\widehat{=}$ quadratische Funktion)**.
   ii. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, Wertebereich: $\mathbb{W}_f =]-\infty; 0] = \mathbb{R}_0^-$.
   iii. Keine Umkehrfunktion. Zu jedem $y \in]-\infty; 0[$ gehören jeweils zwei Stellen x.

(i) i. Ja, ist ein Funktionsgraph! Wir sehen eine **Gerade ($\widehat{=}$ lineare Funktion)**.
   ii. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, Wertebereich: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$.
   iii. Ja, es gibt eine Umkehrfunktion.

(j) i. Ja, ist ein Funktionsgraph! Wir sehen eine vertikal gestreckte **Arcustangensfunktion**.
   ii. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, Wertebereich: $\mathbb{W}_f =]-2; 2[$. Die Werte -2 und 2 gehören nicht zum Wertebereich. Der Funktionsgraph kommt ihnen zwar unendlich nahe, wird sie aber nicht ganz erreichen.
   iii. Ja, es gibt eine Umkehrfunktion, nämlich eine eingeschränkte Tangensfunktion.