Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 8: Prüfungsvorbereitung SRT

Die Prüfung zur SRT ist ein Querschnitt durch die Aufgabenserien 4 bis 7. Die Fragestellungen werden allerdings nicht ausufernd sein, sondern relativ zielgerichtet abfragen, ob ihr euch ein grundlegendes Verständnis zur SRT erarbeitet habt und die elementaren Rechenarten dazu kennt und anwenden könnt. Zu Letzteren gehören einfache Rechnungen mit der Zeitdilatation und der Längenkontraktion, der Lorentztransformation und der relativistischen Geschwindigkeitsaddition. In einfachen Fällen solltet ihr auch ein Minkowski-Diagramm zeichnen oder interpretieren können. Weiteres zu den Prüfungsmodalitäten:

- Dauer: 45 Minuten gleich zu Beginn des Nachmittags.
- Hilfsmittel: TR, persönliches Übersichtsblatt A4 duplex. Was drauf ist, ist mir egal, aber ihr müsst dieses Blatt selber für euch erstellt haben.

Die nun folgenden Aufgaben sind alle so formuliert, wie ich das auch bei der Prüfung zu machen gedenke. Ihr könnt sie also als Richtschnur für die Art der Prüfungsaufgaben nehmen. Die Übungsserie ist aber umfangreicher als die Prüfung.

1. *Zeitdilatiertes Schläfchen*

   Ein Raumschiff bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\beta = \frac{12}{13}$ relativ zur Erde. Die in dem Raumschiff befindlichen Astronauten melden sich für 1 Stunde bei ihrer Bodenstation ab, um ein Schläfchen zu halten, versprechen aber, sich gleich danach zurückzumelden. Wie lange dauert das einstündige Schläfchen im Bezugssystem der Erde?

2. *Lorentztransformation, Zeitdilatation und Längenkontraktion*

   (a) Zwei Ereignisse E_1 und E_2 finden in einem Inertialsystem am gleichen Ort statt. Sie sind durch ein Zeitintervall von $4\,\mathrm{s}$ getrennt. Berechne den räumlichen Abstand der beiden Ereignisse in einem anderen Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse durch ein Zeitintervall von $6\,\mathrm{s}$ getrennt sind.

   (b) Zwei Ereignisse E_1 und E_2 finden im Inertialsystem S gleichzeitig statt. Sie sind durch eine Strecke von $1\,\mathrm{km}$ in Richtung der x-Achse voneinander getrennt. Berechne das Zeitintervall zwischen diesen beiden Ereignissen in einem System S', das sich mit konstanter Geschwindigkeit in die x-Richtung bewegt, und in dem die räumliche Trennung der Ereignisse $2\,\mathrm{km}$ beträgt.

3. *Relativistische Geschwindigkeitsaddition*

   Aus der Sicht eines Raumschiffs A bewegt sich ein anderes Raumschiff B mit 0.35-facher Lichtgeschwindigkeit, währenddem das Raumschiff A von der Erde aus selber mit 0.8-facher Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist. Beantworte die folgenden Fragen einmal gemäss der klassischen und einmal gemäss der relativistischen Mechanik.

   Wie gross ist im Erdsystem die Geschwindigkeit von Raumschiff B, wenn dieses

   (a) in dieselbe Richtung wie Raumschiff A fliegt?

   (b) in die genau entgegengesetzte Richtung wie Raumschiff A fliegt?

   (c) Ein Raumschiff C fliege von der Erde aus gesehen mit $0.5c$ in dieselbe Richtung wie Raumschiff A. Welche Geschwindigkeit hat Raumschiff C aus der Sicht der beiden anderen Raumschiffe?

4. *Die Länge eines sich bewegenden Meterstabes*

   Ein Stab mit einer Eigenlänge von $1.00\,\mathrm{m}$ bewegt sich parallel zu seiner Länge mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Beobachter. Entsprechend den Messungen des Beobachters beträgt die Länge des Stabs $0.914\,\mathrm{m}$. Wie groß ist die Geschwindigkeit v?

5. *Minkowski und Lorentz...*

   Die zwei Inertialsysteme S und S' befinden sich in Standardorientierung, wobei sich S' von S aus gesehen mit $v = \frac{3}{5}\,c$ bewegt.

   (a) Berechne und konstruiere in einem Minkowski-Diagramm in S' die Raumzeitkoordinaten (t', x') für die vier Ereignisse, die in S $4.0\,\mathrm{LJ}$ links resp. rechts des Ursprungs und $2.0\,\mathrm{J}$ in der Vergangenheit resp. in der Zukunft liegen.

   (b) Wo liegen im Minkowski-Diagramm alle Ereignisse, die in S zur Zukunft, aber in S' zur Vergangeheit gehören?

6. *Star Trek und Relativitätstheorie*

   Angenommen, eine Schlagzeile meldet, dass das Raumschiff Enterprise soeben von einer 5-jährigen Reise mit der Geschwindigkeit $0.84c$ zurückgekehrt ist.

   (a) Wenn in der Schlagzeile 5 Erdjahre gemeint sind, wie viel Zeit ist auf dem Raumschiff vergangen?

   (b) Wenn in der Schlagzeile 5 Raumschiffjahre gemeint sind, wie viel Zeit ist auf der Erde vergangen?

7. *Hochenergie-Physik in der Milchstrasse*

   Unsere Galaxis hat einen Durchmesser von 105 000 Lichtjahren. Die höchste bekannte Energie von Partikeln beträgt etwa $10^{19}\,\mathrm{eV}$. Wie lange braucht ein Proton mit dieser Energie, um die Milchstraße zu durchqueren, und zwar bezogen auf das Zeitmaß des Ruhesystems...

   (a) der Galaxis? Gib die Antwort in einer passenden Zeiteinheit an.

   (b) des Teilchens? Dito, was die Zeiteinheit angeht.

   (c) Welchen Durchmesser besitzt die Milchstrasse aus der Sicht des Protons? Gib die Antwort in AE an ($1\,\mathrm{AE} = 1$ Astronomische Einheit $=$ Abstand Sonne–Erde $= 150\,000\,000\,\mathrm{km}$).

   Hinweis: Die Energie eines hochenergetischen Teilchens hängt direkt mit dem Lorentzfaktor γ zusammen. Es gilt:

   $$E = \gamma m_0 c^2$$

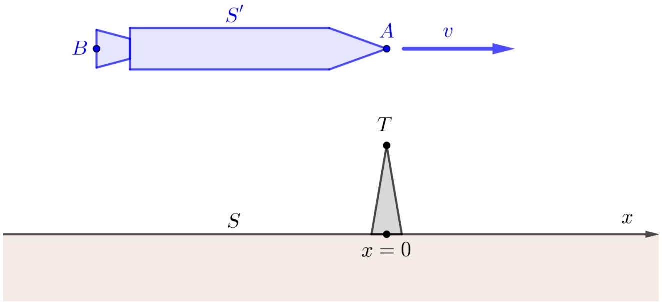
   Dabei ist m_0 die Masse des ruhenden Teilchens. Im Falle des Protons beträgt sie $1.672 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

   Hinweis 2: Falls du das seit der Kernphysik vergessen haben solltest: Ein eV (= Elektronvolt) ist eine Energieeinheit mit Betrag

   $$1\,\mathrm{eV} = \underbrace{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}_{=e} \cdot \mathrm{V} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \qquad (\mathrm{C} \cdot \mathrm{V} = \mathrm{J})$$

8. *Der Vorbeiflug eines Raumschiffs*

Ein Raumschiff der Eigenlänge $\ell' = 600\,\mathrm{m}$ bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 0.8\,c$ relativ zu einem Bezugssystem S. Die Spitze des Schiffes (A) passiert den Punkt T im System S zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ und in diesem Augenblick wird von A nach B ein Lichtsignal L ausgesandt.



(a) Skizziere ein ungefähres Minkowski-Diagramm mit den Weltlinien von Punkt T, Raumschiffspitze A, Raumschiffende B und Lichtsignal L.
Welche Wahl der Einheiten auf den Achsen ist geschickt?

(b) Wann (nach Raumschiffzeit t') erreicht dieses Signal das Schiffsende B?

(c) Zu welchem Zeitpunkt (t_1, gemessen in S) erreicht das Signal das Schiffsende B?

(d) Zu welchem Zeitpunkt (t_2, gemessen in S) erreicht das Schiffsende B den Punkt T?

9. *Diverse Verständnisfragen*

(a) Du befindest dich auf einem Raumschiff, das sich mit $0.5c$ von einem Stern entfernt. Mit welcher Geschwindigkeit passiert dich das Licht des Sterns?

(b) Finden zwei Ereignisse, die für den einen Beobachter am selben Ort und zur selben Zeit stattfinden, auch für einen zweiten Beobachter gleichzeitig statt, der sich relativ zum ersten bewegt?

(c) Der Effekt der Zeitdilatation wird manchmal so umschrieben: "bewegte Uhren laufen langsamer". Tatsächlich hat dieser Effekt aber nichts damit zu tun, dass die Bewegung die Funktionsweise der Uhren beeinflusst. Womit hat es dann zu tun?

(d) Bedeutet die Zeitdilatation, dass die Zeit in bewegten Bezugssystemen tatsächlich langsamer verläuft oder dass sie nur langsamer zu laufen scheint?

(e) Eine jung aussehende Astronautin ist gerade von einer langen Reise nach Hause gekommen. Sie eilt auf einen alten, grauhaarigen Mann zu und in der Unterhaltung stellt sich heraus, dass er ihr Sohn ist. Wie ist das (theoretisch) möglich?

(f) Würdest du eine Veränderung an deinem Herzschlag feststellen, wenn du dich mit der Geschwindigkeit $0.75c$ von der Erde entfernen würdest? Würde sich deine Größe oder dein Taillenumfang verändern?

(g) Tritt Zeitdilatation und Längenkontraktion bei alltäglichen Geschwindigkeiten auf, beispielsweise bei $90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?

10. *Mehr Aufgaben mit "Raumschiffchen"*

   (a) Ein Raumschiff der Eigenlänge $\ell' = 900\,\mathrm{m}$ bewegt sich relativ zu einer Raumstation mit der Geschwindigkeit $\beta = 0.6$. An seiner Spitze ist ein Radioempfänger installiert. Von der Raumstation wird genau in dem Moment, da das Ende des Raumschiffs an der Raumstation vorbei fliegt, ein Radioimpuls ausgesandt.

      i. Wie weit ist die Spitze der Rakete von der Raumstation in dem Augenblick entfernt, da das Radiosignal von der Station die Spitze erreicht?
      ii. Wie groß ist nach Raumstationszeit das Zeitintervall zwischen Ankunft des Signals und seiner Aussendung von der Station?
      iii. Bestimme dieses Zeitintervall für das Ruhesystem des Raumschiffes.

      Tipp: Falls das alles zu verwirrlich ist, könnte allenfalls ein Minkowski-Diagramm zur Klärung helfen.

   (b) Zwei Raumschiffe – beide haben in ihrem eigenen Ruhesystem die Länge $900\,\mathrm{m}$ – begegnen sich. Die Instrumente im Raumschiff A registrieren, daß die Spitze des Raumschiffes B $5.00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$ braucht, um die volle Länge von A zurückzulegen.

      i. Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Raumschiffe.
      ii. Eine Uhr an der Spitze des Raumschiffes B startet genau dann, wenn diese Spitze die Spitze von Raumschiff A passiert. Welche Zeit zeigt die Uhr, wenn das Ende von Raumschiff B das Heck von A passiert?

   (c) Zwei Raumschiffe, die im Ruhezustand jeweils $100\,\mathrm{m}$ lang sind, bewegen sich aufeinander zu, wobei jedes Raumschiff relativ zur Erde mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0.85$ fliegt.

      i. Welche Länge haben die beiden Raumschiffe aus Sicht eines Beobachters auf der Erde?
      ii. Wie schnell fliegen die beiden Raumschiffe aus Sicht eines Beobachters im jeweils anderen Raumschiff?
      iii. Wie lang ist für einen Beobachter in dem einen Raumschiff das andere Raumschiff?
      iv. Zum Zeitpunkt $t = t' = t'' = 0$ (Systeme Erde, Raumschiff 1, Raumschiff 2) "treffen" sich die beiden Raumschiffspitzen (bei $x = x' = x'' = 0$) und die Raumschiffe beginnen, aneinander vorbeizufliegen. Zu welchen Zeitpunkten sind die beiden Raumschiffe in den verschiedenen Bezugssystemen vollständig aneinander vorbeigeflogen?

11. *Pionenzerfall*

   In Ruhe beträgt die mittlere Lebensdauer eines sogenannten Pions $2.6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$.

   Wie schnell muss ein durchschnittliches Pion fliegen, damit es vor seinem Zerfall eine Strecke von $15\,\mathrm{m}$ zurückgelegt hat?

Und zum Schluss noch ein bisschen etwas Neues – in dieser Art sicher keine Prüfungsaufgabe!

12. *Der relativistische Doppler-Effekt*

In der Akustik ist der Doppler-Effekt bekannt als das Phänomen, dass sich der Ton der Sirene eines Krankenwagens beim Vorbeifahren absenkt. D.h., wir hören einen höheren Ton, wenn sich der Krankenwagen auf uns zu bewegt, als wenn er von uns wegfährt. Dabei geht es allerdings um Schallwellen, die sich in Luft ausbreiten, also in einem Medium.

Bei Licht gibt es dieses Ausbreitungsmedium nicht. Es spielt demnach keine Rolle, ob sich Empfänger oder Quelle relativ zum Medium bewegen. Es spielt aber sehr wohl eine Rolle, ob sich Quelle und Beobachter relativ zueinander bewegen, wie wir hier zeigen werden.

Betrachten wir eine Quelle, die sich mit der Relativgeschwindigkeit v in Richtung eines Beobachters bewegt. Die Quelle emittiert im Zeitintervall Δt, gemessen im Bezugssystem S des Beobachters, n Wellenberge einer elektromagnetischen Welle. Während der erste Wellenberg in diesem Zeitintervall die Strecke $c \cdot \Delta t$ zurücklegt, bewegt sich die Quelle um die Strecke $v \cdot \Delta t$ auf den Beobachter zu, wiederum gemessen im Bezugssystem des Beobachters. Die Wellenlänge der vom Beobachter empfangenen Wellen ist daher in diesem Bezugssystem gegeben durch:

$$\lambda = \frac{c \cdot \Delta t - v \cdot \Delta t}{n}$$

Die vom Beobachter in S gemessene Frequenz f der Welle ist somit:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{c - v} \cdot \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{1 - \beta} \cdot \frac{n}{\Delta t}$$

Ist die Frequenz der Welle im Ruhesystem der Quelle gleich f', so emittiert die Quelle im Zeitintervall $\Delta t'$, gemessen im Bezugssystem der Quelle, $n = f' \cdot \Delta t'$ Wellenberge. Daher gilt:

$$f = \frac{1}{1 - \beta} \cdot \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{1 - \beta} \cdot \frac{f' \cdot \Delta t'}{\Delta t} = \frac{f'}{1 - \beta} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t}$$

Dabei ist $\Delta t'$ das Eigenzeitintervall, denn alle Wellenberge vom ersten bis zum n-ten werden im Bezugssystem der Quelle am selben Ort emittiert. Die Zeitintervalle Δt und $\Delta t'$ sind durch die Zeitdilatationsgleichung miteinander verbunden ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$):

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$$

Somit ist die Frequenz der Welle für den Fall, dass sich Quelle und Beobachter aufeinander zu bewegen, gegeben durch

$$f = \frac{f'}{1 - \beta} \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{f'}{1 - \beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} \cdot f' = \sqrt{\frac{(1 + \beta)(1 - \beta)}{(1 - \beta)^2}} \cdot f' = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \cdot f'$$

für kleiner werdenden Abstand. Wenn die Quelle und der Beobachter sich voneinander entfernen, führt die entsprechende Herleitung auf die Frequenz

$$f = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \cdot f'$$

für grösser werdenden Abstand. Führt man die Rechnung im Bezugssystem der Quelle durch, so erhält man genau dieselben Ergebnisse.

(a) Du verbringst einen Tag damit, zwei Streifenpolizisten auf ihrem Rundgang zu begleiten, und wirst Zeuge, wie ein Autofahrer herausgewunken wird, der bei Rot über eine Ampel gefahren ist. Der Fahrer behauptet nun, das rote Licht habe grün ausgesehen, weil es dadurch, dass sich das Auto auf die Ampel zubewegte, zu einer Verschiebung der Wellenlänge des beobachteten Signals kam.

Führe die passenden Berechnungen durch, um zu sehen, ob der Fahrer womöglich im Recht sein könnte oder ob es sich nur um eine faule Ausrede handelt.

(b) Ein realistischeres Beispiel für den relativistischen Doppler-Effekt ist die Rotverschiebung im Licht, das uns von fernen Galaxien erreicht. Da die Galaxien sich von uns fort bewegen, ist das Licht, das sie emittieren, in Richtung des langwelligeren Bereichs verschoben. (Da das langwelligste Licht im sichtbaren Spektrum rot erscheint, spricht man von Rotverschiebung.) Durch Messung der Rotverschiebung kann die Geschwindigkeit der Galaxien relativ zur Erde bestimmt werden.

Das langwelligste Licht der Balmer-Serie von Wasserstoff hat die Wellenlänge $\lambda' = 656\,\mathrm{nm}$. Im Licht von einer fernen Galaxie wird die Wellenlänge dieser Linie zu $\lambda = 1458\,\mathrm{nm}$ gemessen. Wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Galaxie von der Erde weg bewegt und wie weit ist diese Galaxie folglich von uns entfernt, wenn die **Hubble-Konstante** H_0, die die Ausdehnung des Universums beschreibt, einen Wert von

$$H_0 = 21\,\frac{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{MLJ}}$$

aufweist (MLJ = Mega-Lichtjahr = $10^6\,\mathrm{LJ}$). Überlege dir selber, wie die Einheit der Hubble-Konstante zu verstehen ist. Das lässt sich auch gut nachschlagen.