Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 8: Prüfungsvorbereitung SRT – LÖSUNGEN

1. *Zeitdilatiertes Schläfchen*

   Wir bestimmen den Lorentzfaktor

   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{144}{169}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{169}}} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$$

   und erhalten für die auf der Bodenstation vergehende Zeit aufgrund der Zeitdilatation:

   $$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' = \frac{13}{5} \cdot 1\,\mathrm{h} = \frac{13}{5}\,\mathrm{h} = 2.6\,\mathrm{h}$$

   Natürlich wird das mit dem "sich gleich danach zurückmelden" so eine Sache, denn unterdessen hat das Raumschiff ja doch auch eine Strecke zurückgelegt und ein Radarsignal bräuchte für seinen Weg zur Bodenstation nun sicher mehr Zeit als vorhin.

2. *Lorentztransformation, Zeitdilatation und Längenkontraktion*

   (a) Für die Koordinaten der beiden Ereignisse schreiben wir in den beiden Inertialsystemen:

   $$E_1:\ (t_1, x_1) = (0,0)\ ,\ (t'_1, x'_1) = (0,0) \quad \text{und} \quad E_2:\ (t_2, x_2) = (4,0)\ ,\ (t'_2, x'_2) = (6, x'_2)$$

   Dabei haben wir das Ereignis E_1 o.B.d.A. (= ohne Beschränkung der Allgemeinheit) in den Ursprung beider Inertialsysteme gelegt.
   Da beide Ereignisse in S am selben Ort ($x_1 = x_2 = 0$) stattfinden, ruht der Vorgang $E_1 \to E_2$ in S. Somit können wir die Zeitdilatationsgleichung anwenden. In S vergehen $\Delta t = 4$, in S' hingegen $\Delta t' = 6$ Sekunden. Δt ist die Eigenzeit des Vorgangs. Daraus folgt:

   $$\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

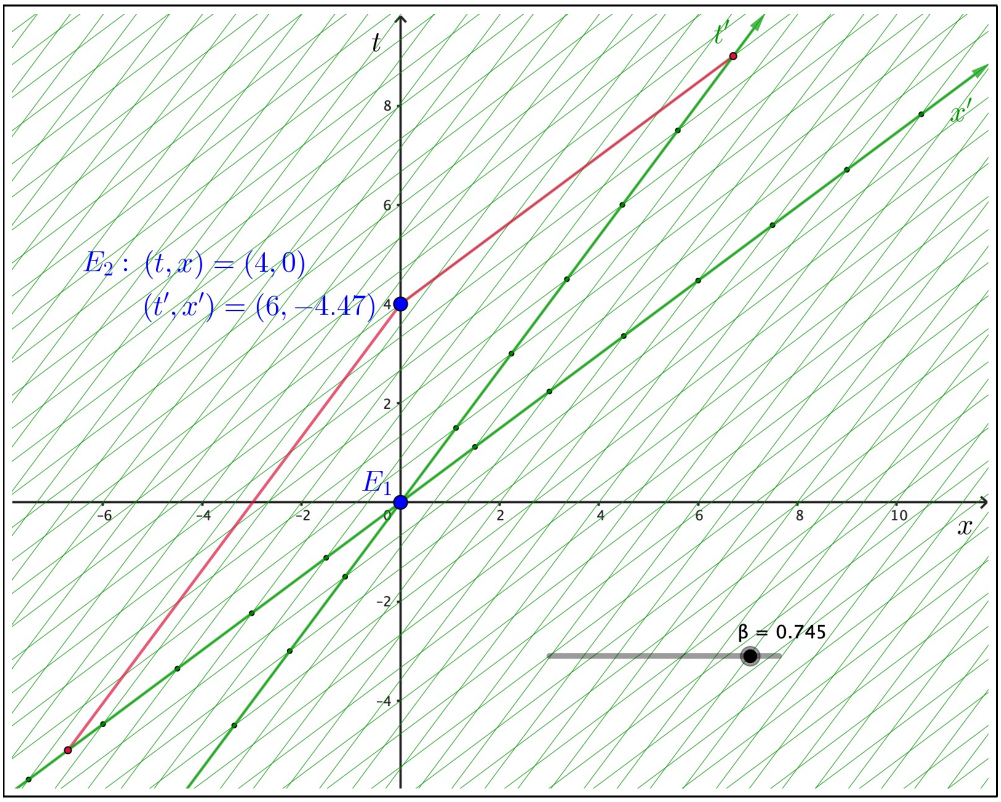
   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745$$

   Nun wenden wir die Lorentztransformation an, um den gesuchten Ort x'_2 zu berechnen:

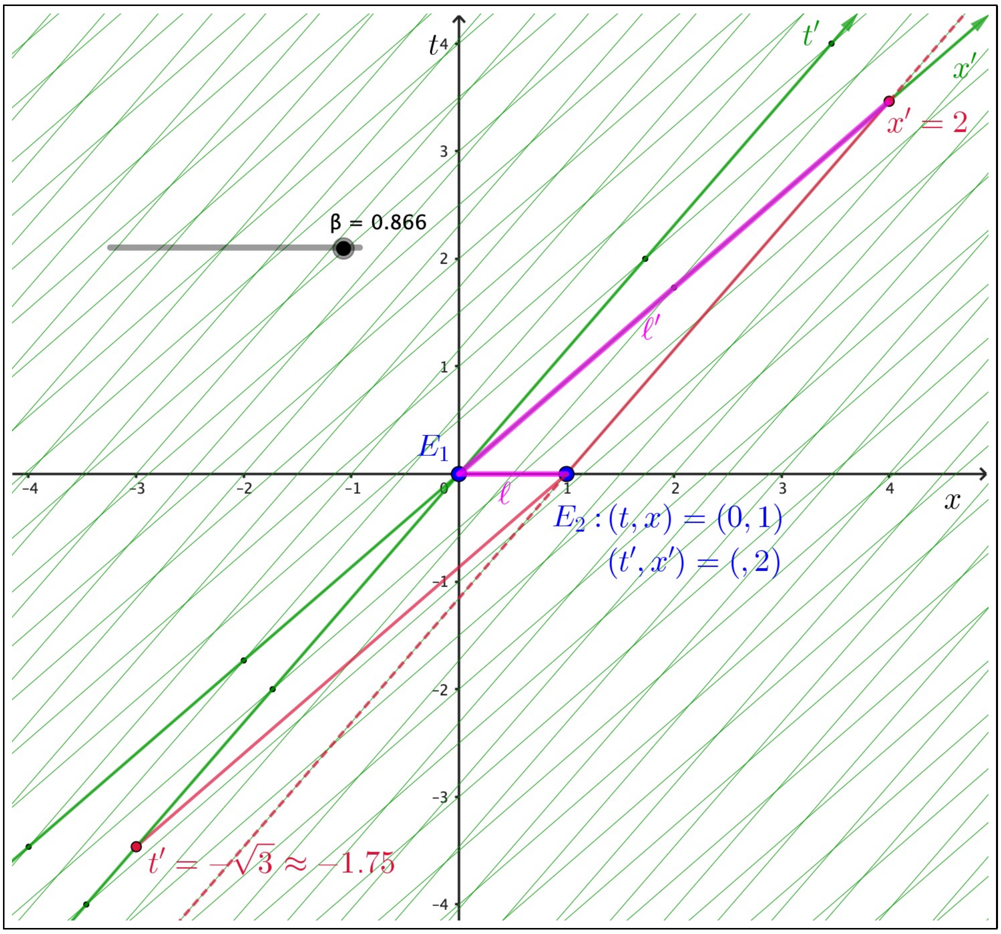
   $$x'_2 = \gamma(x_2 - \beta t_2) = \frac{3}{2} \cdot \left(0 - \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 4\right) = -2\sqrt{5} \approx -4.47\,\mathrm{Ls}$$

   Das zugehörige Minkowski-Diagramm wird auf der nächsten Seite oben gezeigt.
   Der örtliche Abstand der beiden Ereignisse E_1 und E_2 in S' beträgt somit:

   $$\Delta x' = x'_1 - x'_2 = 0 - \big(-2\sqrt{5}\big) = 2\sqrt{5} \approx 4.47\,\mathrm{Ls}$$



(b) Betrachten wir hier zunächst das Minkowski-Diagramm, in welchem wir die Geschwindigkeit β via Schieberegler so einstellt haben, dass das Ereignis E_2 mit den Koordinaten $(t_2, x_2) = 0, 1$ in S im System S' die Ortskoordinate $x'_2 = 2\,(\mathrm{km})$ erhält. β muss ungefähr den Wert 0.866 aufweisen. Wir sehen bereits, dass die zugehörige Zeitkoordinate in S' etwa $t'_2 = -1.75\,(\frac{\mathrm{km}}{c})$ beträgt.



Wie finden wir nun die exakten Werte von t_2' und β heraus? Wir können (sollten) so denken: Ein Beobachter in S misst für die Länge eines im S'-System ruhenden Stabes, der die Eigenlänge $\ell' = 2\,\mathrm{km}$ hat, eine Länge von $\ell = 1\,\mathrm{km}$. Dies wird klar, wenn wir diesen Stab zum Zeitpunkt $t' = 0$ und zum Zeitpunkt $t = 0$ ins Minkowski-Diagramm eintragen. Die Weltlinie des Stabanfangs ist gerade die t'-Achse und diejenige des Stabendes die dazu parallele Gerade durch $(t', x') = (0, 2)$.
Aus dieser Überlegung schliessen wir aufgrund der Längenkontraktion direkt auf den Lorentzfaktor:

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{\ell'}{\ell} = \frac{2\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km}} = 2$$

Damit schliessen wir auf die Relativgeschwindigkeit β:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$$

Der Wert bestätitgt unsere Schieberegler-Einstellung.
Jetzt lässt sich die Zeitkoordinate t_2' und folglich auch der Zeitunterschied zwischen den Ereignissen E_1 und E_2 bequem via Zeitdilatation berechnen:

$$E_1 :\ (t_1, x_1) = (0,0)\ ,\ (t_1', x_1') = (0,0) \quad \text{und} \quad E_2 :\ (t_2, x_2) = (0,1)\ ,\ (t_2', x_2') = (t_2', 2)$$

$$\Rightarrow \quad t_2' = \gamma\,(t_2 - \beta x_2) = 2\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\right) = -\sqrt{3} \approx -1.732 \approx -1.75$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t' = t_1' - t_2' = 0 - \big(-\sqrt{3}\big) = \sqrt{3} \approx 1.73\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{c}}$$

Noch kurz zur Einheit des Resultates: Da wir die Ortskoordinaten in km angegeben haben, müssen die Zeitkoordinaten im Minkowski-Diagramm in $\frac{\mathrm{km}}{c}$ angegeben werden. Das ist "völlig normal" so, denn es schreibt uns ja niemand vor, dass die Achseneinheiten im Minkowski-Diagramm auf einer Zeiteinheit basieren müssen. Anstatt z.B. s und Ls $(= c\mathrm{s})$ haben wir nun halt $\frac{\mathrm{km}}{c}$ und km.

3. *Relativistische Geschwindigkeitsaddition*

(a) Im Erdsystem S hat das System S' von Raumschiff A die Relativgeschwindigkeit $v = 0.8c$. Und das Raumschiff B hat im System S' von Raumschiff A die Geschwindigkeit $u' = 0.35c$.
Damit ergäbe sich gemäss der klassischen Geschwindigkeitsaddition im Erdsystem A für das Raumschiff B eine Geschwindigkeit von $u = u'+v = 0.35c+0.8c = 1.15c$, also Überlichtgeschwindigkeit.
Relativistisch beträgt diese Geschwindigkeit hingegen:

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} = \frac{1.15c}{1+\frac{0.35c\cdot 0.8c}{c^2}} = \frac{\frac{115}{100}}{1+\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{5}}\,c = \frac{\frac{115}{100}}{1+\frac{28}{100}}\,c = \frac{\frac{115}{100}}{\frac{128}{100}}\,c = \frac{115}{128}\,c \approx 0.898c$$

(b) Nun ist $u' = -0.35c$. Sonst bleibt alles gleich. Mit der klassischen Geschwindigkeitsaddition folgt: $u = u' + v = -0.35c + 0.8c = 0.45c$. Und relativistisch erhalten wir:

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} = \frac{0.45c}{1+\frac{-0.35c\cdot 0.8c}{c^2}} = \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{5}}\,c = \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{28}{100}}\,c = \frac{\frac{45}{100}}{\frac{72}{100}}\,c = \frac{45}{72}\,c = \frac{5}{8}\,c = 0.625c$$

(c) Die Erde bewegt sich aus der Sicht von Raumschiff A mit der Relativgeschwindigkeit $v = -0.8c$, währenddem Raumschiff C im Erdsystem die Geschwindigkeit $u = 0.5c$ aufweist. Klassisch hat somit Raumschiff C im System von A die Geschwindigkeit: $u' = u+v = 0.5c-0.8c = -0.3c$. Klar: Raumschiff C fliegt aus Sicht von A in die negative Richtung, denn A fliegt aus Sicht der Erde schneller in die positive Richtung als C. Relativistisch folgt für den Wert dieser Geschwindigkeit:

$$u' = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{-0.3c}{1+\frac{0.5c\cdot(-0.8c)}{c^2}} = \frac{-\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}}\,c = \frac{-\frac{3}{10}}{1-\frac{4}{10}}\,c = \frac{-\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}}\,c = -\frac{3}{6}\,c = -\frac{1}{2}\,c = -0.5c$$

Fliegt das Raumschiff B (System S'') von C aus gesehen in die positive Richtung, so hat die Erde relativ zu B klassisch eine Geschwindigkeit von $-1.15c$ (vgl. (a)). Somit folgt klassisch für die Geschwindigkeit von Raumschiff C im System S'':

$$u'' = u + v = 0.5c - \frac{115}{100}\,c = \frac{50-115}{100}\,c = -\frac{65}{100}\,c = -\frac{13}{20}\,c = -0.65c$$

Rechnen wir hingegen korrekt, also relativistisch, so hat die Erde relativ zu Raumschiff B eine Geschwindigkeit von $v = -\frac{115}{128}\,c$ (vgl. (a)). Damit für die Geschwindigkeit von Raumschiff C im System S'':

$$u'' = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{0.5 - \frac{115}{128}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{115}{128}}\,c = \frac{\frac{64-115}{128}}{1-\frac{115}{256}}\,c = \frac{-\frac{51}{128}}{\frac{141}{256}}\,c = \frac{-\frac{102}{256}}{\frac{141}{256}}\,c = -\frac{102}{141}\,c = -\frac{34}{47}\,c \approx -0.723c$$

Fliegt das Raumschiff B (System S''') von C aus gesehen hingegen in die negative Richtung, so hat die Erde relativ zu B klassisch eine Geschwindigkeit von $v = -0.45c$. Somit ergibt sich klassisch für die Geschwindigkeit von Raumschiff C im System S''':

$$u''' = u + v = 0.5c - 0.45\,c = 0.05\,c = \frac{1}{20}\,c$$

Relativistisch ergibt sich aber mit der Relativgeschwindigkeit von $v = -\frac{5}{8}\,c$ (vgl. (b)) für die Geschwindigkeit von Raumschiff C im System S''':

$$u''' = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{0.5-\frac{5}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}}\,c = \frac{\frac{4-5}{8}}{1-\frac{5}{16}}\,c = \frac{-\frac{1}{8}}{1-\frac{5}{16}}\,c = \frac{-\frac{2}{16}}{\frac{11}{16}}\,c = -\frac{2}{11}\,c \approx -0.182c$$

Das bedeutet, dass das Raumschiff C aus der Sicht von Raumschiff B gemäss der klassischen Mechanik aufholen würde, relativistisch korrekt hingegen vom Raumschiff B abgehängt wird.

4. *Die Länge eines sich bewegenden Meterstabes*

   Für den Beobachter ist der Stab längenkontrahiert. Aus den beiden Längenangaben schliessen wir auf den Lorentzfaktor und daraus auf die Relativgeschwindigkeit:

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\ell'}{\ell} = \frac{1.00\,\mathrm{m}}{0.914\,\mathrm{m}} \approx 1.09409$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{1.09409^2}} \approx 0.406$$

   Der Stab muss relativ zum Beobachter also mit gut $40\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs sein.

5. *Minkowski und Lorentz...*

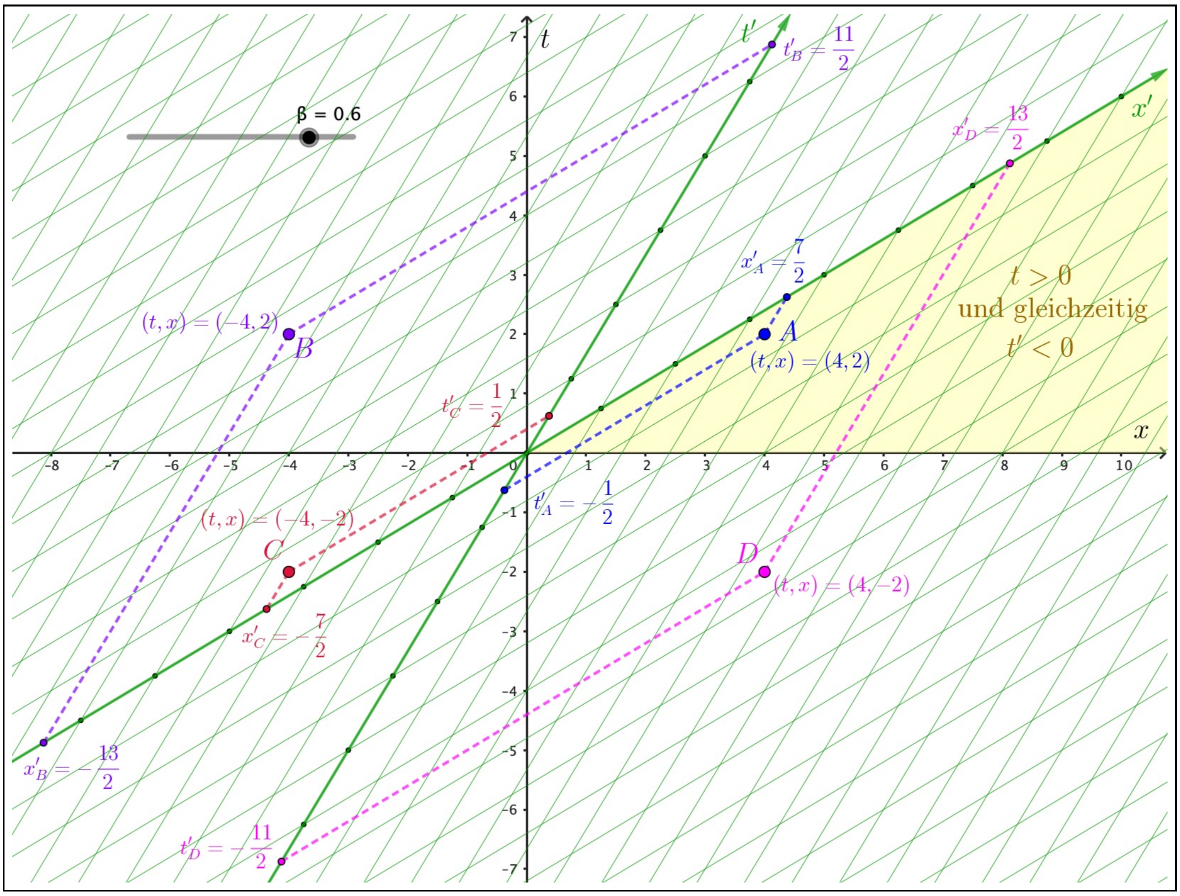
   Die zwei Inertialsysteme S und S' befinden sich in Standardorientierung, wobei sich S' von S aus gesehen mit $v = \frac{3}{5}\,c$ bewegt.

   (a) Das Minkowski-Diagramm befindet sich oben auf der nächsten Seite. Für die vier Punkte erhalten wir im System S' nach Berechnung des Lorentzfaktors mittels Lorentztransformation:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$A: \quad t'_A = \gamma\,(t_A - \beta x_A) = \frac{5}{4}\left(2 - \frac{3}{5}\cdot 4\right) = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}\,(\mathrm{J})$$

$$x'_A = \gamma\,(x_A - \beta t_A) = \frac{5}{4}\left(4 - \frac{3}{5}\cdot 2\right) = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}\,(\mathrm{LJ})$$



$$
\begin{aligned}
B: \quad & t'_B = \gamma\,(t_B - \beta x_B) = \frac{5}{4}\left(2 - \frac{3}{5}\cdot(-4)\right) = \frac{5}{2} + 3 = \frac{11}{2}\,(\mathrm{J}) \\
& x'_B = \gamma\,(x_B - \beta t_B) = \frac{5}{4}\left(-4 - \frac{3}{5}\cdot 2\right) = -5 - \frac{3}{2} = -\frac{13}{2}\,(\mathrm{LJ}) \\
C: \quad & t'_C = \gamma\,(t_C - \beta x_C) = \frac{5}{4}\left(-2 - \frac{3}{5}\cdot(-4)\right) = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}\,(\mathrm{J}) \\
& x'_C = \gamma\,(x_C - \beta t_C) = \frac{5}{4}\left(-4 - \frac{3}{5}\cdot(-2)\right) = -5 + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}\,(\mathrm{LJ}) \\
D: \quad & t'_D = \gamma\,(t_D - \beta x_D) = \frac{5}{4}\left(-2 - \frac{3}{5}\cdot 4\right) = -\frac{5}{2} - 3 = -\frac{11}{2}\,(\mathrm{J}) \\
& x'_D = \gamma\,(x_D - \beta t_D) = \frac{5}{4}\left(4 - \frac{3}{5}\cdot(-2)\right) = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}\,(\mathrm{LJ})
\end{aligned}
$$

Alle diese Koordinaten sind im Minkowski-Diagramm oben gut sichtbar.

(b) Die Frage bezieht sich so, wie sie gestellt ist, auf den gemeinsamen Ursprung in $(t, x) = (0, 0) = (t', x')$.

Alle zukünftigen Ereignisse in S haben eine Zeitkoordinate $t > 0$ und alle vergangenen Ereignisse in S' haben eine Zeitkoordinate $t' < 0$. Der Bereich der Ereignisse, die beide Kriterien erfüllen, ist im Minkowski-Diagramm oben gelb markiert.

Bezüglich des Ursprungs liegen alle diese Ereignisse im absoluten Anderswo, sodass sich für den Ursprung selber in keiner Weise "Kausalitätsprobleme" ergeben können.

6. *Star Trek und Relativitätstheorie*

   (a) Da sich die Enterprise bewegt, vergeht dort die Zeit langsamer und während der Reise vergeht weniger Zeit als auf der Erde. Mit der Zeitdilatation berechnen wir:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.84^2}} \approx 1.843$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \Delta t' \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \approx \frac{5\,\mathrm{J}}{1.843} \approx 2.71\,\mathrm{J}$$

   (b) Nun erfolgt die Rechnung genau in die Gegenrichtung:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \cdot \Delta t' \approx 1.843 \cdot 5\,\mathrm{J} \approx 9.22\,\mathrm{J}$$

   Rep.: Wichtig ist, dass wir nicht im System der Enterprise aus denken möchten, denn die wechselt während der Reise beim Umkehren das Inertialsystem, wodurch die Erde in die Vergangenheit zurückversetzt wird. So versteht auch die Crew, weshalb auf der Erde mehr Zeit verstreichen kann, aber die Rechnung dazu ist recht kompliziert und eben gar nicht nötig – wir können ja von der Erde aus denken und alles funktioniert.

7. *Hochenergie-Physik in der Milchstrasse*

   (a) Die Energieangabe $E = 10^{19}\,\mathrm{eV}$ ist im Milchstrassensystem S ($\approx$ Erdsystem) gemessen. Berechnen wir zuerst den Lorentzfaktor aus der angegebenen Energiegleichung:

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{10^{19}\,\mathrm{eV}}{1.672 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot c^2} = \frac{10^{19} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1.672 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot c^2} = 1.066 \cdot 10^{10}$$

   Daraus folgt für die Protonengeschwindigkeit im Milchstrassensystem:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1.066 \cdot 10^{10})^2}} \approx 1$$

   Der TR kann uns den Unterschied zwischen β und der Zahl 1 nicht mehr einfach so aufzeigen. Natürlich könnten wir den Unterschied zu 1 mit einer passenden Näherungsrechnung beziffern, aber das lohnt sich hier gar nicht. Vielmehr bedeutet dieses Resultat einfach, dass sich diese Protonen praktisch ohne Fehler mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Folglich erhalten wir als einfache Antwort auf die Frage nach der Durchquerungszeit der Milchstrasse:

$$\Delta t = \frac{s}{v} \approx \frac{105\,000\,\mathrm{LJ}}{c} = 105\,000\,\mathrm{J}$$

   Anmerkung: Wir verstehen hier, weshalb in der Teilchenphysik (oder Hochenergiephysik) in der Regel keine Teilchengeschwindigkeiten, sondern eben nur Teilchenenergien angegeben werden.

   (b) Mit der Zeitdilatation rechnen wir diese Zeit ins Teilchensystem um:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{105\,000\,\mathrm{J}}{1.066 \cdot 10^{10}} = 9.850 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J} \approx 0.0036\,\mathrm{d} \approx 0.086\,\mathrm{h} \approx 5.2\,\mathrm{min}$$

   Für ein extrem hochenergetisches Proton vergeht als bei der Durchquerung der Milchstrasse ungeheuer wenig Zeit.

   (c) Der Durchmesser der Milchstrasse erscheint aus Sicht des Protons längenkontrahiert, wobei derselbe Lorentzfaktor zur Anwendung kommt. Wir finden fü die kontrahierte Länge:

$$\begin{aligned} \ell' &= \frac{\ell}{\gamma} = \frac{105\,000\,\mathrm{LJ}}{1.066 \cdot 10^{10}} = 9.850 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{LJ} = 9.850 \cdot 10^{-6} \cdot c \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} \\ &\approx 9.31 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 9.31 \cdot 10^{7}\,\mathrm{km} \approx 0.62\,\mathrm{AE} \end{aligned}$$

   Aus der Sicht des extrem hochenergetischen Protons ist also der Durchmesser der Milchstrasse nur noch ein bisschen grösser als die Hälfte des Abstandes zwischen Sonne und Erde.

8. *Der Vorbeiflug eines Raumschiffs*

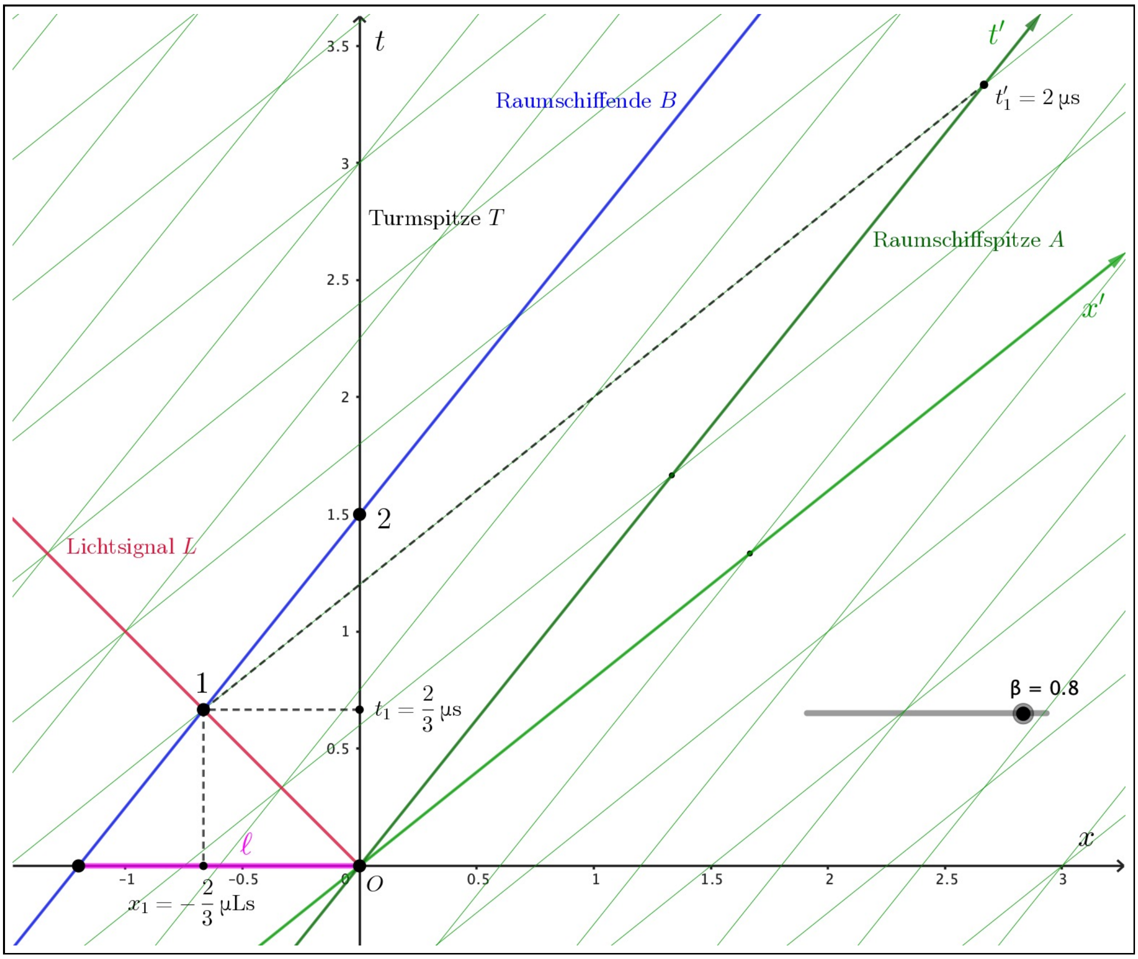
Vorbereitung: $600\,\mathrm{m}$ Länge entsprechen einer Lichtlaufzeit von $2\,\mu\mathrm{s}$. Daher können wir schreiben: $\ell' = 2\,\mu\mathrm{s}$.

(a) Soll S das Bodensystem, also das System der Turmspitze T sein, so empfiehlt es sich zunächst die Eigenlänge des Raumschiffs in dieses System S umzurechnen (Längenkontraktion):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \ell = \frac{\ell'}{\gamma} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5} = 1.2\,(\mathrm{Ls})$$

Nun können wir das Minkowski-Diagramm skizzieren, wobei das Ereignis "Raumschiffspitze A passiert Turmspitze T" den gemeinsamen Ursprung O des Raumschiffsystems S' und des Bodensystems S bildet. Das bedeutet auch, dass das Lichtsignal L von dort ausgesandt wird:



Wenn wir auf der Ortsachse die Einheit Mikrolichtsekunde $\mu\mathrm{Ls}$ verwenden, dann muss die Zeiteinheit folglich die Mikrosekunde $\mu\mathrm{s}$ sein.

(b) Das Lichtsignal wird im Ursprung ausgesandt. Es ist in beiden Systemen mit der Lichtgeschwindigkeit c unterwegs. Folglich können wir ganz einfach im Raumschiffsystem rechnen:

$$t_1' = \frac{\ell'}{c} = \frac{2\,\mu\mathrm{Ls}}{c} = 2\,\mu\mathrm{s}$$

Diese Zeitkoordinate des Ereignisses 1 (Lichtsignal trifft beim Raumschiffende B ein) findet sich auch gut sichtbar im Minkowski-Diagramm wieder.

(c) Wir können den Schnittpunkt der Weltlinien von B und L ermitteln. Diese sind gegeben durch:

Lichtsignal L: $t_L(x) = -x$ (Steigung -1)

Raumschiffende B: $t_B(x) = \frac{1}{\beta}(x+\ell) = \frac{5}{4}\left(x+\frac{6}{5}\right)$ (Steigung $\frac{1}{\beta}$ wie die t'-Achse)

Rep.: Die Gerade, die die Weltlinie des Raumschiffendes B beschreibt, ist die um ℓ nach links verschobene t'-Achse. Die Linksverschiebung erfolgt durch Addition von ℓ zur Variable: $x \to x+\ell$.

Nun ergibt sich für den Ort von 1 im Bodensystem S:

$$t_B(x) \overset{!}{=} t_L(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{4}\left(x+\frac{6}{5}\right) = -x \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{3}\,(\mu\mathrm{Ls})$$

Das ist im Minkowski-Diagramm gut sichtbar. Die Berechnung der zugehörigen Zeitkoordinate könnte einfacher nicht sein:

$$t_1 = t_L(x_1) = -x_1 = \frac{2}{3}\,(\mu\mathrm{s})$$

(d) Die Ortskoordinate von Ereignis 2 ist im Bodensystem $x_2 = 0$. Somit folgt für den zugehörigen Zeitwert:

$$t_2 = t_B(x_2) = t_B(0) = \frac{5}{4}\left(0+\frac{6}{5}\right) = \frac{3}{2}\,(\mu\mathrm{s})$$

Auch diese Berechnung wird im Minkowski-Diagramm bestätigt.

9. *Diverse Verständnisfragen*

(a) Selbstverständlich passiert mich das Licht mit Lichtgeschwindigkeit. Licht hat in allen Inertialsystemen in alle Richtungen stets dieselbe Geschwindigkeit $c \to$ "Konstanz der Lichtgeschwindigkeit"!

(b) Ja, die beiden Ereignisse sind auch für den zweiten Beobachter gleichzeitig! Denn wenn sie dieselben Orts- und Zeitkoordinaten haben, dann sind sie de facto **dasselbe Ereignis** – und bei einem einzigen Ereignis stellt sich die Frage von Gleichzeitigkeit gar nicht.

(c) Es handelt sich um eine Eigenschaft der Raumzeit, dass eine Uhr, die sich relativ zu einem Beobachter bewegt, aus dessen Sicht, also in seinem Bezugssystem, weniger schnell geht. In ihrem Eigensystem gehen Uhren stets gleich schnell. Es geht also nur um die Perspektive auf die Uhr.

(d) Die Zeitdilatation bedeutet, dass die Zeit in einem relativ zu mir bewegten Bezugssystem tatächlich langsamer verstreicht, aber eben nur aus meinem System heraus betrachtet. Wer sich mit dem anderen Bezugssystem zusammen bewegt, hat deswegen kein anderes Zeitempfinden.

(e) Es ist möglich, wenn die Astronautin eine Weltraumreise mit grosser Geschwindigkeit hinter sich hat und ihr Sohn auf der Erde geblieben ist. Aufgrund der Zeitdilatation ist ihre Lebensuhr im Vergleich zu den Uhren auf der Erde langsamer gelaufen.

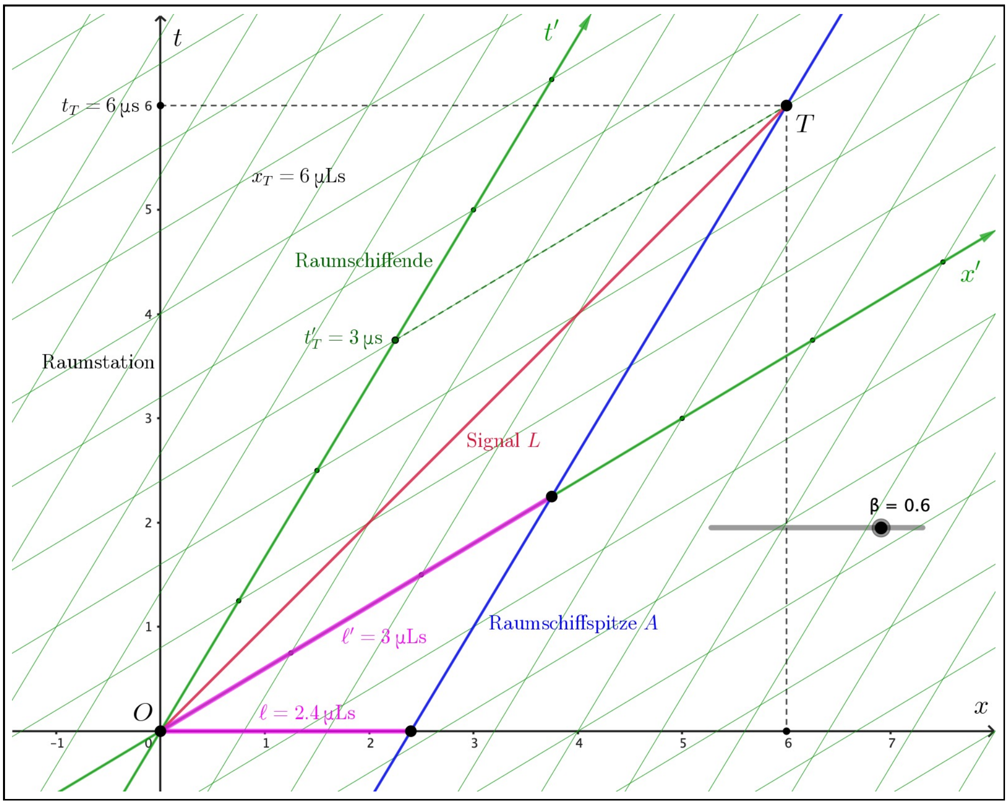
(f) Nein, all dies würde ich nicht beobachten, denn mein Körper bewegt sich mit mir und ruht in meinem eigenen System. Das bedeutet, dass sich für mich stets alles ganz normal anfühlt, egal, wie diese Dinge in einem anderen Inertialsystem zu beschreiben sind resp. gemessen werden.

(g) Ja, die relativistischen Effekte treten auf, sobald Relativgeschwindigkeiten vorhanden sind, egal wie klein diese sein mögen. Allerdings ist es so, dass man davon im Alltag nichts bemerken kann, weil diese Effekte bei alltäglichen Geschwindigkeiten ungeheuer klein sind – viel viel kleiner als unsere Messgenauigkeiten.

10. *Mehr Aufgaben mit "Raumschiffchen"*

Diese drei Aufgabenstellungen repetieren im Wesentlichen bereits Gesagtes und Gesehenes. Ich halte mich bei diesen Lösungen daher etwas knapper und formuliere weniger aus.

(a) $\ell' = 900\,\mathrm{m} = 3\,\mu\mathrm{Ls}$, $\beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$.
S: System der Raumstation. S': System des Raumschiffs.
Minkowski-Diagramm mit S in schwarz und S' in grün. O.B.d.A.: Ereignis $O(0,0)$ beider Bezugssysteme = Aussendung des Radiosignals.



i. Weltlinie des Lichtsignals: $t_L(x) = x$ (Steigung 1 durch $(0,0)$).
Länge des kontrahierten Raumschiffs in S: $\ell = \frac{\ell}{\gamma} = \frac{4}{5} \cdot 3\,\mu\mathrm{Ls} = 2.4\,\mu\mathrm{Ls}$.
$\Rightarrow$ Weltlinie der Raumschiffspitze: $t_A(x) = \frac{5}{3}(x - 2.4)$ (Steigung $\frac{1}{\beta}$ durch $(2.4, 0)$).
$\Rightarrow$ Ereignis T (= Raumschiffspitze A wird vom Lichtsignal eingeholt) hat Koordinaten:

$$t_A(x) \stackrel{!}{=} t_L(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{3}(x - 2.4) = x \quad \Leftrightarrow \quad x_T = 6\,(\mu\mathrm{Ls})$$

$\Rightarrow$ Entfernung zwischen Raumstation und Ereignis T in S: $6\,\mu\mathrm{Ls}$.

ii. Zu T gehörende Zeitkoordinate in S: $t_T = t_L(x_T) = t_L(6) = 6\,(\mu\mathrm{s})$. Da Aussendung in $(0,0)$ ist dies auch gerade die Laufzeit des Signals in S.

iii. Umrechnung ins Raumschiffsystem S' mittels Lorentztransformation:

$$t'_T = \gamma\,(t_T - \beta x_T) = \frac{5}{4}\left(6 - \frac{3}{5} \cdot 6\right) = 3\,(\mu\mathrm{s})$$

Auch in S': Aussendung des Signals in $(0,0)$. Daher ist hier die Laufzeit ebenfalls gleich der Zeitkoordinate von T, also eben $3\,\mu\mathrm{s}$.
Bem.: Selbstverständlich hätten wir die Laufzeit in S' noch wesentlich einfacher erhalten können. Das Radiosignal hat auch in S' die Geschwindigkeit c und startet am Raumschiffende. Dann braucht es für die Raumschifflänge von $3\,\mu\mathrm{Ls}$ im Raumschiffsystem S' logischerweise genau $3\,\mu\mathrm{s}$ Laufzeit.

(b) Eigenlängen: $900\,\mathrm{m} = 3\,\mu\mathrm{Ls}$.

i. Spitze von A muss im System von B $3\,\mu\mathrm{Ls}$ (Länge von B selber nicht längenkontrahiert) zurücklegen und benötigt dafür $\Delta t = 5.00\,\mu\mathrm{s}$.
$\Rightarrow$ Geschwindigkeit von Raumschiff A im B-System = Relativgeschwindigkeit der Raumschiffe:

$$v = \frac{3\,\mu\mathrm{Ls}}{5\,\mu\mathrm{s}} = \frac{3}{5}\,c \qquad \left(\gamma = \frac{5}{4}\right)$$

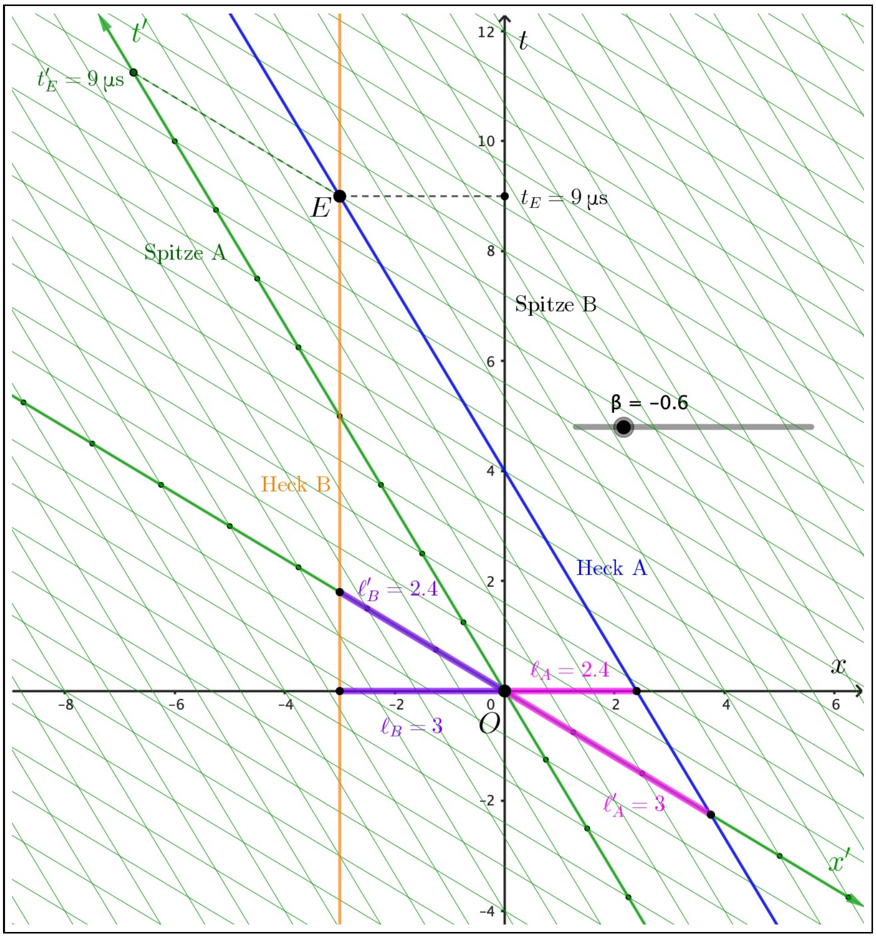
ii. Umittelbar könnte man denken, dass der Vorbeiflug nun doppelt soviel Zeit benötigt, wie unter (a) berechnet, weil das Raumschiff A ja ganz an Raumschiff B vorbeifliegen muss, also die Spitze von A die Länge von B und dann auch noch seine eigene Länge zurücklegen muss. Der zweite Teil des Gedankens stimmt zwar, aber dafür braucht Raumschiff A weniger Zeit, weil es aus der Sicht von B längenkontrahiert ist. Dort beträgt die Länge von Raumschiff B:

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma} = \frac{4}{5} \cdot 3\,\mu\mathrm{Ls} = 2.4\,\mu\mathrm{Ls}$$

Somit folgt für die Zeit des Vorbeiflugs:

$$\Delta t = \frac{\ell + \ell'}{v} = \frac{2.4\,\mu\mathrm{Ls} + 3\,\mu\mathrm{Ls}}{\frac{3}{5}\,c} = 9\,\mu\mathrm{s}$$

Hier noch das Minkowski-Diagramm mit dem schwarzen System für Raumschiff B und dem grünen System für Raumschiff A, das von B aus gesehen in die negative Richtung fliegt. Im Ursprung $O(0,0)$ beider Systeme startet das aneinander Vorbeifliegen und bei Ereignis E ist es fertig. Dort können wir in beiden Systemen die Zeitkoordinate ablesen und finden beide Male dasselbe Resultat: $9\,\mu\mathrm{s}$.



(c) i. Lorentzfaktor: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.85^2}} \approx 1.8983.$

Längenkontraktion: $\ell = \frac{\ell'}{\gamma} \approx \frac{100\,\mathrm{m}}{1.8983} \approx 52.68\,\mathrm{m}.$

ii. Relativistische Geschwindigkeitsaddition: Aus Sicht des einen Raumschiffs hat die Erde die Geschwindigkeit $v = 0.85c$ und aus der Sicht der Erde hat das andere Raumschiff die Geschwindigkeit $u = 0.85c$. Somit folgt für die Geschwindigkeit des einen Raumschiffs aus der Sicht des anderen:

$$u' = \frac{v+u}{1+\beta^2}\frac{0.85c+0.85c}{1+0.85^2}0.9869\,c$$

iii. Lorentzfaktor Raumschiff – Raumschiff: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.9869^2}} \approx 6.207.$

Längenkontraktion: $\ell = \frac{\ell'}{\gamma} \approx \frac{100\,\mathrm{m}}{6.207} \approx 16.11\,\mathrm{m}.$

iv. Wie schon unter Aufgabe (b) gesehen, müssen hier in beiden Raumschiffsystemen dieselben Zeiten herauskommen, denn die Situation ist zwischen den Raumschiffen vollkommen symmetrisch.

Die Raumschiffspitze des einen Raumschiffs muss im System des anderen Raumschiffs einerseits eine nicht kontrahierte und zudem eine kontrahierte Raumschifflänge zurücklegen, bis das Kreuzen der beiden Raumschiffe komplett erfolgt ist. Somit erhalten wir für die dafür benötigte Zeitspanne:

$$\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{\ell + \ell'}{v} = \frac{100\,\mathrm{m} + 16.11\,\mathrm{m}}{0.9869c} = 3.873 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} = 387.3\,\mathrm{ns}$$

Dieser Zeitwert ist dann auch die Zeitkoordinate des Ereignisses "Die Enden der beiden Ramschiffe passieren sich." in beiden Raumschiffsystemen.

11. *Pionenzerfall*

Im Beobachtungssystem benötigt das Pion für die Strecke s eine Zeitspanne t von:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{s}{\beta c}$$

Im Eigensystem des Pions vergeht dabei aufgrund der Zeitdilatation allerdings weniger Zeit, nämlich:

$$t = \gamma \cdot t' \quad \Leftrightarrow \quad t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{\frac{s}{\beta c}}{\gamma} = \frac{s}{\beta c \gamma}$$

Nun muss diese Zeitspanne t' mit der mittleren Lebensdauer des Pions übereinstimmen, $t' = 2.6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$, wenn die Strecke s für die mittlere zurückgelegte Wegstrecke des Pions im System des Beobachters stehen soll, $s = 15\,\mathrm{m}$.

Das bedeutet, wir kennen s und t' und wollen die Geschwindigkeit β herausfinden. Das ist ein wenig anspruchsvoller, weil β zudem im Lorentzfaktor γ enthalten ist. Dennoch ist die Sache nicht allzu schwierig:

$$t' = \frac{s}{\beta c \gamma} = \frac{s}{\beta c \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{s\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c} \quad \Rightarrow \quad t'^2 = \frac{s^2\left(1-\beta^2\right)}{\beta^2 c^2} \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 c^2 t'^2 = s^2 - s^2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta^2 c^2 t'^2 + s^2\beta^2 = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2\left(c^2 t'^2 + s^2\right) = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 = \frac{s^2}{(ct')^2 + s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta = \frac{s}{\sqrt{(ct')^2 + s^2}} = \frac{15\,\mathrm{m}}{\sqrt{(c \cdot 2.6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s})^2 + (15\,\mathrm{m})^2}} = 0.8873$$

Die Pionen müssen also mit $88.73\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs sein.

Und schliesslich die letzte Aufgabe – wie schon gesagt: keine Prüfungsaufgabe!

12. *Der relativistische Doppler-Effekt*

(a) Rotes Licht hat typischerweise eine Wellenlänge von etwa $\lambda_{\text{rot}} = 650\,\text{nm}$. Die Wellenlänge von grünem Licht beträgt so etwa $\lambda_{\text{grün}} = 540\,\text{nm}$. Die zugehörigen Frequenzen sind:

$$f' = f_{\text{rot}} = \frac{c}{\lambda_{\text{rot}}} = \frac{3\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{650\cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 4.62\cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

$$f = f_{\text{grün}} = \frac{c}{\lambda_{\text{grün}}} = \frac{3\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{540\cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 5.56\cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

Nun ist f' die Eigenfrequenz der Ampel, während f für die im System des Autos beobachtete Frequenz steht. Aus diesen Werten folgern wir für die Geschwindigkeit des Autos relativ zur Ampel:

$$f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\cdot f' \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f}{f'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{f}{f'}\right)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{f}{f'}\right)^2(1-\beta) = 1+\beta \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{f}{f'}\right)^2 - 1 = \beta\left(\left(\frac{f}{f'}\right)^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \beta = \frac{\left(\frac{f}{f'}\right)^2-1}{\left(\frac{f}{f'}\right)^2+1} = \frac{\frac{f^2-f'^2}{f'^2}}{\frac{f^2+f'^2}{f'^2}} = \frac{f^2-f'^2}{f^2+f'^2} = \frac{5.56^2-4.62^2}{5.56^2+4.62^2} = 0.18$$

Der Fahrer hätte somit etwa mit $18\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs sein müssen. D.h., die Geschichte mit dem "die rote Ampel nicht als Rot wahrgenommen haben" könnte zwar theoretisch stimmen, aber vermutlich wären dann andere Verkehrsregeln gebrochen worden...

(b) Wie wir unter (a) gesehen haben, spielt das Frequenzverhältnis eine Rolle, dieses lässt sich ebenso gut direkt durch das inverse Wellenlängenverhältnis ausdrücken:

$$\frac{f}{f'} = \frac{\frac{c}{\lambda}}{\frac{c}{\lambda'}} = \frac{c}{\lambda}\cdot\frac{\lambda'}{c} = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

Wieder möchten wir eine Geschwindigkeit bestimmen. Diesmal geht es allerdings um eine Quelle, die sich vom Beobachter entfernt. Demnach müssen wir die andere Gleichung verwenden:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\cdot f' \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f}{f'} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad\Leftrightarrow\quad \ldots$$

$$\Leftrightarrow\quad \beta = -\frac{\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2-1}{\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2+1} = -\frac{\frac{\lambda'^2-\lambda^2}{\lambda^2}}{\frac{\lambda'^2+\lambda^2}{\lambda^2}} = -\frac{\lambda'^2-\lambda^2}{\lambda'^2+\lambda^2} = \frac{\lambda^2-\lambda'^2}{\lambda^2+\lambda'^2} = \frac{1458^2-656^2}{1458^2+656^2} = 0.663$$

Somit entfernt sich die Galaxie mit der beachtlichen Geschwindigkeit von knapp $66.3\,\% \approx \frac{2}{3}$ der Lichtgeschwindigkeit von uns: $v = 0.663c$.

Dies lässt sich mit der Expansion des Universums begründen. Pro Zeitspanne Δt dehnt sich jede Länge ℓ um denselben Faktor k aus. Dem entsprechend entfernen sich Objekte umso schneller von uns, je weiter sie entfernt sind (ℓ = Entfernung):

$$v = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = \frac{k\cdot\ell}{\Delta t} = \frac{k}{\Delta t}\cdot\ell = H_0\cdot\ell \qquad \text{mit} \quad H_0 := \frac{k}{\Delta t}$$

Die Hubble-Konstante H_0 beschreibt also den direkt proportionalen Zusammenhang zwischen Objektentfernung ℓ und Entfernungsgeschwindigkeit v. Bei unserer Beispielgalaxie folgt:

$$\ell = \frac{v}{H_0} = \frac{0.663c}{21\,\frac{\text{km}/\text{s}}{\text{MLJ}}} \approx \frac{0.663\cdot 300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{21\,\frac{\text{km}/\text{s}}{\text{MLJ}}} = \frac{0.663\cdot 100\,000}{7}\,\text{MLJ} = 9470\,\text{MLJ} \approx 9.5\,\text{Mia}\,\text{LJ}$$

(In der ersten Version der Aufgabenstellung ist bei der Angabe von H_0 leider der sehr entscheidende Vorfaktor M (= Mega = 10^6) vergessen gegangen.)