Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 7: Relativistische Geschwindigkeitsaddition

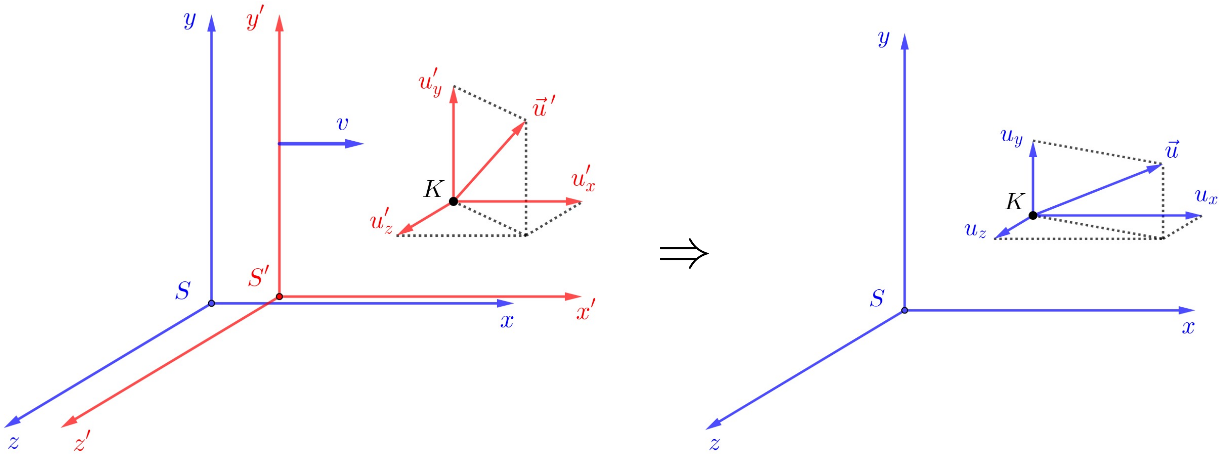
1. Die Herleitung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition

Gegeben ist die Standardorientierung zweier Bezugssysteme, wobei sich das S'-System vom S-System aus gesehen mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bewegt. Der Körper K bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ in S resp. $\vec{u}\,'$ in S':

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{u}\,' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix}$$



Ganz offensichtlich muss die x-Komponente u_x der Geschwindigkeit $\vec{u}$ im S-System eine andere sein als die x'-Komponente der Geschwindigkeit $\vec{u}\,'$, denn das S'-System bewegt sich ja im S-System längs der x-Achse. Aber auch die Geschwindigkeitskomponenten in die anderen beiden Raumrichtungen müssen sich verändern, wenn wir z.B. daran denken, dass die Zeit in S und S' anders vergeht. Unsere Fragestellung lautet somit:

Wie berechnet sich ausgehend von v, u'_x, u'_y und u'_z der Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}$, durch den die Bewegung des Körpers K im nicht-gestrichenen System S beschrieben wird?

Die Geschwindigkeitsaddition der klassischen Mechanik

In der klassischen Mechanik lautet die aus der Galilei-Transformation abgeleitete Geschwindigkeitsaddition:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}\,' \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten in die y- und die z-Richtung bleiben bei dieser Transformation gleich. In x-Richtung werden die beiden Geschwindigkeiten einfach addiert.

Diese Transformation entspricht der Newton'schen Vorstellung von einer absoluten Zeit und von Geschwindigkeiten, die im Prinzip beliebig gross werden können. Wie wir mittlerweile wissen, sind beide Vorstellungen falsch. Für die SRT braucht es zwingend ein anderes Gesetz zur Addition von Geschwindigkeiten. Unser Resultat muss allerdings für kleine Geschwindigkeitsbeträge v und u' mit dieser klassischen Additionsvorschrift zusammenfallen, denn in der Alltagsphysik addieren sich Geschwindigkeiten offensichtlich Newton'sch.

Idee zur Vorgehensweise

Wir betrachten **zwei Ereignisse** E_1 und E_2. Der Körper K bewege sich im S'-System geradlinig und mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag von E_1 nach E_2. Diese Bewegung wird durch den Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}\,'$ beschrieben. Zu E_1 und E_2 gehören je Koordinaten in S und S'. Dabei dürfen wir o.B.d.A. (= ohne Beschränkung der Allgemeinheit) E_1 in den gemeinsamen Koordinatenursprung O legen:

$$E_1 = O : \quad (t_1, x_1, y_1, z_1) = (t_1', x_1', y_1', z_1') = (0,0,0,0)$$

E_2 soll in der absoluten Zukunft liegen. D.h., in beiden Systemen hat E_2 eine positive Zeitkoordinate. Da wir das Ereignis E_1 in den Ursprung gelegt haben und somit alle dortigen Koordinaten gleich Null sind, können wir bei den Koordinaten von E_2 zugunsten einer besseren Übersichtlichkeit auf den Index "2" verzichten:

$$E_2 \text{ in } S : \quad (t, x, y, z) \qquad\qquad E_2 \text{ in } S' : \quad (t', x', y', z')$$

Gemäss unserer Fragestellung sollen vier Werte bekannt sein:

Gegeben: – Geschwindigkeit des S'-Systems im S-System (in x-Richtung): v

– Komponenten der Geschwindigkeit des Körpers K im S'-System: u_x', u_y', u_z'

Da β und γ direkt von v abhängen, sind sie ebenfalls bekannt.

Gesucht: – Komponenten der Geschwindigkeit des Körpers K im S-System: u_x, u_y, u_z

Jede der Geschwindigkeitskomponenten von $\vec{u}$ resp. $\vec{u}\,'$ hängt mit den Koordinaten von E_1 und E_2 zusammen. Z.B. gilt für u_x' (mit $x_2' = x'$, $t_2' = t'$, sowie $x_1 = t_1 = 0$):

$$u_x' = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'} = \frac{x' - 0}{t' - 0} = \frac{x'}{t'}$$

Ebenso gilt:

$$u_y' = \frac{y'}{t'} \qquad u_z' = \frac{z'}{t'} \qquad u_x = \frac{x}{t} \qquad u_y = \frac{y}{t} \qquad u_z = \frac{z}{t}$$

(a) Berechne nun die Komponenten u_x, u_y und u_z in Abhängigkeit von v, β, γ, u_x', u_y und u_z.

(b) Erläutere, wie die unter (a) gefundenen relativistischen Ausdrücke in die klassische Geschwindigkeitsaddition übergehen, wenn $\vec{u}\,'$ und v klein sind.

2. Das Zwillingsparadoxon – zum Zweiten

Betrachte nochmals die Aufgabe 8 aus Übungsserie 6.

Uns interessiert nun die Perspektive des reisenden Zwillings auf den Zwilling, der zuhause auf der Erde geblieben ist. Beantworte die folgenden Fragen Schritt für Schritt. Konsultiere dabei allenfalls nochmals unsere ausführlichen Notizen zum Zwillingsparadoxon.

(a) Zu welchem Zeitpunkt t' erreicht der reisende Zwilling in seinem Hinreise-Bezugssystem S' Proxima Centauri, also das Umkehrereignis U, und welche Koordinaten hat zum Zeitpunkt t' der Zwilling auf der Erde in S'?

(b) Rechne alle Koordinaten aus (a) um in ein Bezugssystem S'', dass sich relativ zur Erde gleich bewegt, wie das Bezugssystem S', dessen Ursprung aber im Umkehrereignis U sitzt.

(c) Rechne nun alle Koordinaten aus (b) in ein Koordinatensystem S''' mit Ursprung im Umkehrpunkt U um, das sich relativ zur Erde so bewegt, wie der reisende Zwilling auf seiner Rückreise.

(d) Wie kann nun der reisende Zwilling verstehen, dass der auf der Erde zurück gebliebene Zwilling bei der Rückkehr älter ist als er selber, obwohl der Erdzwilling relativ zum reisenden ja immer bewegt und somit der Zeitdilatation unterworfen war?