Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 7: Relativistische Geschwindigkeitsaddition – LÖSUNGEN

1. Die Herleitung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition

(a) O.B.d.A. betrachten wir zwei Ereignisse, die die Bewegung eines Körpers K beschreiben sollen:

$$E_1: \quad (t_1, x_1, y_1, z_1) = (0,0,0,0) = (t_1', x_1', y_1', z_1') \qquad \rightarrow \quad \text{Ursprungsereignis}$$
$$E_2: \quad (t, x, y, z) \quad \text{und} \quad (t', x', y', z')$$

Dabei liege E_2 in der absoluten Zukunft von E_1, es gilt also $t > 0$ und $t' > 0$.

Wir wollen davon ausgehen, dass sich der Körper geradlinig und gleichförmig von E_1 zu E_2 bewegt, dann folgt für die Geschwindigkeitskomponenten in den beiden Bezugssystemen:

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x-0}{t-0} = \frac{x}{t} \qquad \text{und gleichermassen:} \qquad u_y = \frac{y}{t} \qquad \text{sowie} \qquad u_z = \frac{z}{t}$$
$$u_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x'-0}{t'-0} = \frac{x'}{t'} \qquad \text{und gleichermassen:} \qquad u_y' = \frac{y'}{t'} \qquad \text{sowie} \qquad u_z' = \frac{z'}{t'}$$

Wir wollen nun u_x, u_y und u_z durch v, γ, u_x', u_y' und u_z' ausdrücken. Dabei verwenden wir die Lorentz-Rücktransformation, durch die sich die Koordinaten in S durch diejenigen in S' ausdrücken lassen:

$$ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \qquad x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \qquad y = y' \qquad z = z'$$

Diese Ausdrücke setzen wir z.B. in den Bruch für u_x ein:

$$u_x = \frac{x}{t} = \frac{cx}{ct} = \frac{c\gamma\left(x' + \beta ct'\right)}{\gamma\left(ct' + \beta x'\right)} = \frac{c\left(x' + \beta ct'\right)}{ct' + \beta x'}$$

Nun ist $x' = u_x' \, t'$. Damit folgt weiter:

$$u_x = \frac{c\left(x' + \beta ct'\right)}{ct' + \beta x'} = \frac{c\left(u_x' \, t' + \beta ct'\right)}{ct' + \beta u_x' \, t'} = \frac{ct'\left(u_x' + \beta c\right)}{t'\left(c + \beta u_x'\right)} = \frac{c\left(u_x' + \beta c\right)}{c + \beta u_x'}$$

Im Schlussresultat möchten wir kein β, sondern ausschließlich v stehen haben. Das ist einfach zu bewerkstelligen, denn $\beta = \frac{v}{c}$, womit folgt:

$$u_x = \frac{c\left(u_x' + \beta c\right)}{c + \beta u_x'} = \frac{c\left(u_x' + \frac{v}{c}\, c\right)}{c + \frac{v}{c}\, u_x'} = \frac{c\left(u_x' + v\right)}{c\left(1 + \frac{v}{c^2}\, u_x'\right)} = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}}$$

Damit haben wir u_x wie gefordert durch u_x' und v dargestellt – dass u_y', u_z' und γ hier nicht auftreten, ist ja umso besser, denn dadurch wird der Ausdruck wohl einfacher.

Nun zu den anderen Geschwindigkeitskomponenten. Unter Verwendung der Lorentzrücktransformation, $x' = u_x' \, t'$, $y' = u_y' \, t'$ und $\beta = \frac{v}{c}$ leiten wir ganz ähnlich her:

$$u_y = \frac{y}{t} = \frac{cy}{ct} = \frac{cy'}{\gamma\left(ct' + \beta x'\right)} = \frac{cu_y' t'}{\gamma\left(ct' + \beta u_x' t'\right)} = \frac{cu_y'}{\gamma\left(c + \beta u_x'\right)}$$
$$= \frac{cu_y'}{\gamma\left(c + \frac{v}{c}\, u_x'\right)} = \frac{cu_y'}{\gamma c\left(1 + \frac{v}{c^2}\, u_x'\right)} = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}$$

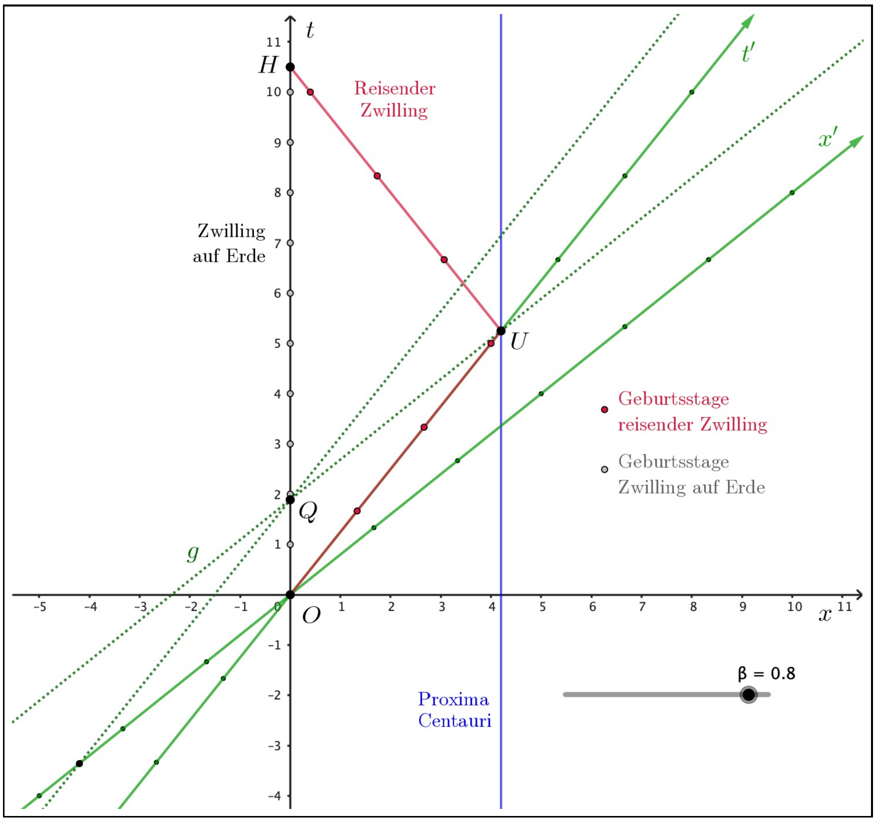
Auf genau dieselbe Weise entsteht der Ausdruck für die z-Komponente der Geschwindigkeit in S:

$$u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}$$

Es ist interessant zu sehen, dass die Geschwindigkeitskomponenten u_y und u_z senkrecht zur Relativgeschwindigkeit nun doch von γ und vor allem von u_x' abhängen!

2. Das Zwillingsparadoxon – zum Zweiten

(a) Wir betrachten zuerst nochmal das Minkowski-Diagramm mit ein paar zusätzlichen Einträgen:



Der reisende Zwilling fliegt zunächst bis Proxima Centauri. Wir bestimmen als Erstes die Koordinaten des dortigen Umkehrereignisses U. Dazu verwenden wir, dass die Weltlinie des fortreisenden Zwillings durch $t(x) = \frac{1}{\beta}\,x$ gegeben ist und dass Proxima Centauri bei $x = 4.2\,\mathrm{LJ}$ liegt:

$$x_U = 4.2\,(\mathrm{LJ}) \qquad \Rightarrow \qquad t_U = t(x_U) = \frac{1}{\beta} \cdot x_U = \frac{1}{\frac{4}{5}} \cdot 4.2 = \frac{5}{4} \cdot 4.2 = 5.25\,(\mathrm{J})$$

Mittels Lorentz-Rücktansformation können wir diese Koordinaten ins S'-System des sich entfernden Zwillings umrechnen ($\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$):

$$t'_U = \gamma\,(t_U - \beta x_U) = \frac{5}{3}\left(5.25 - \frac{4}{5} \cdot 4.2\right) = \frac{5}{3} \cdot 1.89 = 3.15\,(\mathrm{J})$$

$$x'_U = \gamma\,(x_U - \beta t_U) = \frac{5}{3}\left(4.2 - \frac{4}{5} \cdot 5.25\right) = \frac{5}{3} \cdot 0 = 0$$

Natürlich war schon vor der Rechnung klar, dass $x'_U = 0$ sein muss, und t'_U hätte man auch aus einer Zeitdilatationsrechnung mit der von der Erde aus gemessenen Reisezeit ($t_U = 5.25\,\mathrm{J}$) erhalten können.

Nun können wir auch berechnen, wie viel Zeit aus der Sicht des reisenden Zwillings auf der Erde vergangen ist bis zu dessen Umkehrpunkt U. Es geht also um die Koordinaten von Q im Erdsystem S. In S' sind bis dahin 3.15 J vergangen, in S aufgrund der Zeitdilatation entsprechend weniger, nämlich:

$$t_Q = \frac{t'_U}{\gamma} = \frac{3.15}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot 3.15 = 1.89\,(\mathrm{J})$$

Diesen Wert hätten wir auch durch Bestimmung des t-Achsenabschnitts der Gerade g herausfinden können. Das Resultat stimmt offensichtlich mit der Zeitkoordinate t_Q im Minkowski-Diagramm überein.

Halten wir nochmals fest: Aus Sicht des reisenden Zwillings ist der Zwilling auf der Erde bis zur Umkehr U um $t_Q = 1.89\,\mathrm{J}$ gealtert, währenddem er selber um $t'_U = 3.15\,\mathrm{J}$ älter geworden ist.

Für die weiteren Berechnungen ist auch die Ortskoordinate von Q in S' wichtig. Dafür erhalten wir:

$$x'_Q = \gamma\,(x_Q - \beta t_Q) = \frac{5}{3}\,(0 - \frac{4}{5}\cdot 1.89) = -\frac{4}{3}\cdot 1.89 = -2.52\,(\mathrm{LJ})$$

Zudem geben wir auch noch das Heimkehrereignis H in S' an:

$$t'_H = \gamma\,(t_H - \beta x_H) = \frac{5}{3}\left(10.5 - \frac{4}{5}\cdot 0\right) = \frac{5}{3}\cdot 10.5 = 17.5\,(\mathrm{J})$$

$$x'_H = \gamma\,(x_H - \beta t_H) = \frac{5}{3}\left(0 - \frac{4}{5}\cdot 10.5\right) = -\frac{4}{3}\cdot 10.5 = -14\,(\mathrm{LJ})$$

(b) Wir wechseln nun in ein Koordinatensystem S'' mit Ursprung im Umkehrereignis U. Der Grund für diesen Wechsel besteht darin, dass der reisende Zwilling in U sein Intertialsystem wechselt, wenn er in Richtung Erde beschleunigt. Wollen wir für diesen Wechsel ins Rückreise-Inertialsystem S''' die wohl vertraute Lorentztransformation verwenden, sollten wir dafür sorgen, dass der Ursprung in U liegt, sodass U das gemeinsame Ursprungsereignis für die beiden Koordinatensysteme S'' und S''' bildet, denn nur so funktioniert die Lorentztransformation, wie wir sie kennen; die zwei zu verknüpfenden Intertialsysteme müssen in Standardorientierung zueinander liegen, also eben ein gemeinsames Ursprungsereignis aufweisen.

Das nur zwischenzeitlich interessante Koordinatensystem S'' bewegt sich genau gleich wie der von der Erde wegreisende Zwilling, soll nun aber den Ursprung in U haben. Das bedeutet, die Ortskoordinaten aller Ereignisse in S'' sind genau dieselben wie in S', aber die Zeitkoordinate ist um t'_U zurückversetzt. Somit erhalten wir für die verschiedenen Ereignisse in S'':

$U:\quad x''_U = 0$ und $t''_U = 0 \quad\Leftrightarrow\quad U$ ist das Ursprungsereignis von S''

$Q:\quad x''_Q = x'_Q = -2.52\,(\mathrm{LJ})$ und $t''_Q = t'_Q - t'_U = 3.15 - 3.15 = 0$ (wie es ja sein muss!)

$H:\quad x''_H = x'_H = -14\,(\mathrm{LJ})$ und $t''_H = t'_H - t'_U = 17.5 - 3.15 = 14.35\,(\mathrm{J})$

(c) Aus der Sicht von S'' bewegt sich das Erdsystem mit $u = -\frac{4}{5}\,c$ und aus der Sicht des Erdsystems bewegt sich der zurückreisende Zwilling ebenfalls mit $w = -\frac{4}{5}\,c$. Mit der relativistischen Geschwindigkeitsaddition schliessen wir daraus auf die Geschwindigkeit v, mit der sich der zurückreisende Zwilling aus der Sicht von System S'' unterwegs ist:

$$v = \frac{u+w}{1+\frac{u\cdot w}{c^2}} = \frac{-\frac{4}{5}\,c - \frac{4}{5}\,c}{1 - \frac{\left(-\frac{4}{5}\,c\right)\left(-\frac{4}{5}\,c\right)\cdot}{c^2}} = \frac{-\frac{8}{5}\,c}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{\frac{8}{5}}{\frac{41}{25}}\,c = -\frac{40}{41}\,c \quad\Rightarrow\quad \beta = -\frac{40}{41}$$

Daraus folgt für den Lorentzfaktor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{41^2-40^2}{41^2}}} = \frac{41}{\sqrt{41^2-40^2}}\frac{41}{\sqrt{(41+40)(41-40)}} = \frac{41}{\sqrt{81}} = \frac{41}{9}$$

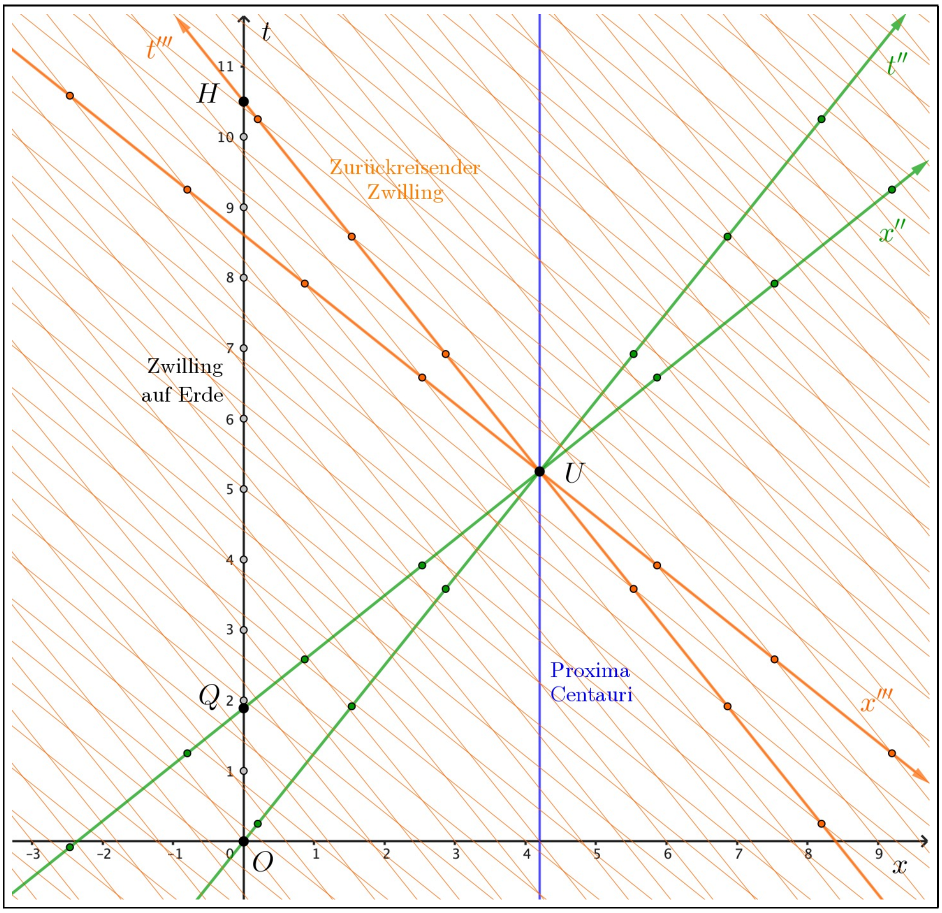
Mit diesen Werten $\beta = -\frac{40}{41}$ und $\gamma = \frac{41}{9}$ können wir nun die Lorentztransformationen von S'' nach S''' vornehmen:

$$t'''_Q = \gamma\,(t''_Q - \beta x''_Q) = \frac{41}{9}\left(0 - \left(-\frac{40}{41}\right)\cdot(-2.52)\right) = \frac{40}{9}\cdot 2.52 = -11.2\,(\mathrm{J})$$

$$x'''_Q = \gamma\,(x''_Q - \beta t''_Q) = \frac{41}{9}\left(-2.52 - \left(-\frac{40}{41}\right)\cdot 0\right) = -\frac{41}{9}\cdot 2.52 = -11.48\,(\mathrm{LJ})$$

$$t'''_H = \gamma\,(t''_H - \beta x''_H) = \frac{41}{9}\left(14.35 - \left(-\frac{40}{41}\right)\cdot(-14)\right) = \ldots = \frac{63}{20} = 3.15\,(\mathrm{J})$$

$$x'''_H = \gamma\,(x''_H - \beta t''_H) = \frac{41}{9}\left(-14 - \left(-\frac{40}{41}\right)\cdot 14.35\right) = -\frac{41}{9}\cdot 0 = 0 \quad \text{(wie erwartet!)}$$



(d) Die entscheidende Veränderung passiert bei der Umkehr des reisenden Zwillings: Die Zeitkoordinate des Ereignisses Q wechselt von $t''_Q = 0$ zu $t'''_Q = -11.2\,\mathrm{LJ}$. Der zurückgebliebene Zwilling wird somit bei der Umkehr im System des reisenden Zwillings in die Vergangenheit zurückversetzt. Nun hat er mehr Zeit um älter zu werden, auch wenn seine Uhr aus der Sicht des reisenden Zwillings langsamer läuft!

Wichtig: Der reisende Zwilling kann zu jedem Zeitpunkt nachvollziehen, wie die Uhr des zurückgebliebenen Zwillings tickt und was sie anzeigt. Sie läuft stets langsamer als die eigene, aber wegen dem Wechsel des Inertialsystems bei der Umkehr führt dies nicht dazu, dass der reisende Zwilling älter zurückkommt als der auf der Erde bleibende – im Gegenteil: der zurückgebliebene Zwilling gewinnt aus der Sicht des reisenden bei dessen Wechsel des Inertialsystems so viel Zeit zum älter werden, dass effektiv der reisende Zwilling jünger zurückkehrt.

Im System des reisenden Zwillings vergehen auf seiner eigenen Uhr, $t'_U = 3.15\,\mathrm{J}$ bis zum Umkehrpunkt. Aufgrund der Zeitdilatation versteht er aber, dass bis dahin auf der Uhr des zurückgebliebenen Zwillings

$$\Delta t_1 = t_Q = \frac{t'_Q}{\gamma} = \frac{t'_U}{\gamma} = \frac{3.15\,\mathrm{J}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot 3.15\,\mathrm{J} = 1.89\,\mathrm{J}$$

vergangen sind. Nun vergehen im System S''' des zurückreisenden Zwillings vom Ereignis Q bis zur Heimkehr H auf der

$$\Delta t'''_2 = t'''_H - t'''_Q = 3.15\,\mathrm{J} - (-11.2\,\mathrm{J}) = 14.35\,\mathrm{J} \quad .$$

Allerdings versteht der reisende Zwilling, das diese in seinem eigenen System gemessene Zeitspanne im System S des Zwillings zuhause auf der Erde dilatiert ist. Dort vergehen unterdessen

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t'''_2}{\gamma} = \frac{14.35\,\mathrm{J}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot 14.35\,\mathrm{J} = 8.61\,\mathrm{J}$$

Und damit kann der reisende Zwilling nachvollziehen, dass der Erdzwilling bei der Rückkehr um

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 1.89\,\mathrm{J} + 8.61\,\mathrm{J} = 10.5\,\mathrm{J}$$

gealtert ist, also mehr als seine eigenen $6.3\,\mathrm{J}$.