Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 6: Lorentztransformation und Minkowski-Diagramme – LÖSUNGEN

1. *Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft*

   (a) Zunächst berechnen wir den Lorentzfaktor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

   Die Koordinaten von E im S-System sind $(t,x) = (2\,\mathrm{J}, 6\,\mathrm{LJ})$. Mittels Lorentztransformation erhalten wir die Koordinaten im System S':

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct-\beta x) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(c\cdot 2\,\mathrm{J} - \frac{1}{3}\cdot 6\,\mathrm{LJ}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,(2\,\mathrm{LJ}-2\,\mathrm{LJ}) = 0 \\ x' &= \gamma(x-\beta ct) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(6\,\mathrm{LJ} - \frac{1}{3}\,c\cdot 2\,\mathrm{J}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(6\,\mathrm{LJ} - \frac{2}{3}\,\mathrm{LJ}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{16}{3}\,\mathrm{LJ} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{LJ} \approx 5.66\,\mathrm{LJ} \end{aligned}$$

   Hinweis: Die ganze Notation mit der Lichtgeschwindigkeit c und den Einheiten in Jahren J und Lichtjahren $\mathrm{LJ} = c\cdot\mathrm{J}$ macht die Rechnung einigermaßen unübersichtlich.

   Im Prinzip können wir diese Einheiten weglassen, wenn wir uns eine Zeiteinheit – hier das Jahr J – vorgeben und konsequent Zeiten in dieser Einheit und Orte in der zugehörigen Lichteinheit – bei uns also $c\cdot J = \mathrm{LJ}$ – angeben. So kürzt sich c resp. die ganze Lichteinheit, z.B. $c\cdot\mathrm{J}$ resp. LJ, quasi aus der ganzen Gleichung raus. Als Folge davon können wir von Anfang an $c = 1$ setzen und ohne Einheiten rechnen. Wir wissen schließlich stets, dass Zeiten in der von uns gewählten Zeiteinheit und Ort in der zugehörigen Lichteinheit herauskommen.

   Hier nochmals die obige, nun aber vereinfachte Rechnung. Sie ist sofort viel übersichtlicher:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t-\beta x) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(2-\frac{1}{3}\cdot 6\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,(2-2) = 0 \\ x' &= \gamma(x-\beta t) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(6-\frac{1}{3}\cdot 2\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(6-\frac{2}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{16}{3} = 4\sqrt{2} \approx 5.66\,(\mathrm{LJ}) \end{aligned}$$

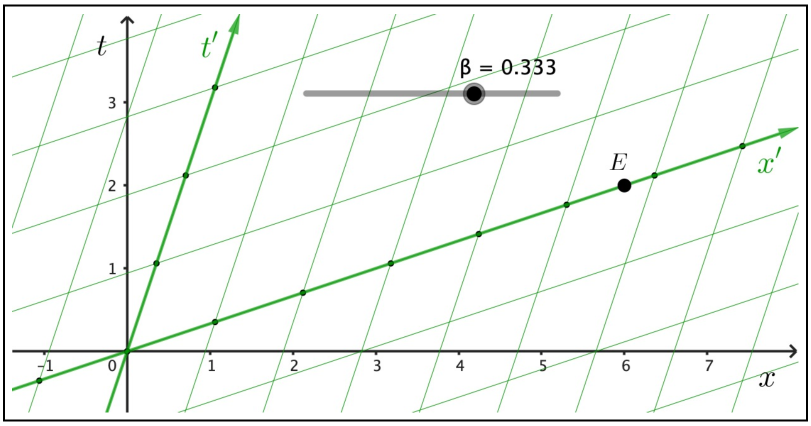
   Man beachte die mit $c = 1$ nun sehr gut sichtbare Symmetrie zwischen den Transformationen von Zeitkoordinate und Ortskoordinate:

$$t' = \gamma(t-\beta x) \qquad \text{und} \qquad x' = \gamma(x-\beta t)$$

   Von nun an wollen wir alle Koordinatentransformationen auf diese übersichtliche Art und Weise ausführen!

   (b) Das zugehörige Minkowski-Diagramm findet sich oben auf der nächsten Seite.

   Es ist von Anfang an klar, dass E auf der x'-Achse des Systems S' liegen muss, denn unter (a) haben wir für die Zeitkoordinate den Wert $t' = 0$ erhalten – und die x'-Achse enthält eben genau alle Ereignisse mit Zeitkoordinate $t' = 0$!

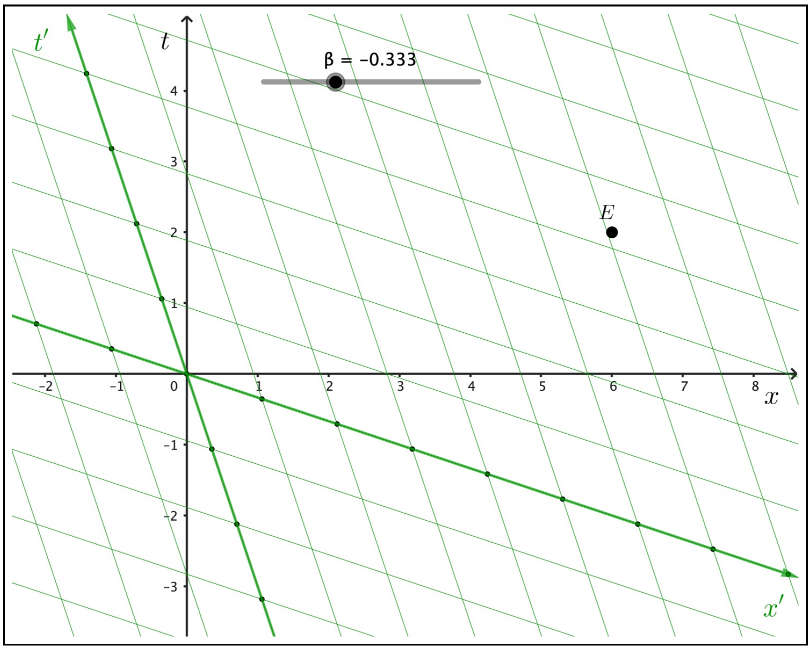


(c) Der Lorentzfaktor bleibt der gleiche, weil in dessen Berechnung β quadratisch auftritt und es somit keine Rolle spielt, ob $\beta = +\frac{1}{3}$ oder $\beta = -\frac{1}{3}$ ist. Mit der Lorentztransformation erhalten wir:

$$t' = \gamma(t - \beta x) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(2 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 6\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}(2+2) = 3\sqrt{2} \approx 4.24\,(\mathrm{J})$$

$$x' = \gamma(x - \beta t) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(6 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(6 + \frac{2}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{20}{3} = 5\sqrt{2} \approx 7.07\,(\mathrm{LJ})$$

Hier das zugehörige Minkowski-Diagramm:



(d) In S ist $t = 2\,\mathrm{J}$, also liegt E in der Zukunft.
In S' ist $t' = 0$ und folglich liegt E in der Gegenwart.
In S'' ist $t'' = 4\,\mathrm{J}$, womit E noch weiter in der Zukunft liegt als in S.

(e) Die Aussage stimmt so nur sehr bedingt. Zur Analyse müssen wir die Lorentztransformation der Zeitkoordinate betrachten:

$$t' = \gamma\,(t - \beta x)$$

Daraus können wir für den Zeitunterschied folgern:

$$\Delta t = t' - t = \gamma\,(t - \beta x) - t = t \cdot (\gamma - 1) - \beta\gamma x$$

Ist nun die Relativgeschwindigkeit nicht allzu gross, so ist $\gamma - 1 \approx 0$ und $\Delta t \approx -\beta\gamma x \approx -\beta x$. Dann stimmt die Aussage, denn je kleiner x, desto näher ist $-\beta x$ und damit Δt bei 0.
Für sehr grosse Geschwindigkeiten stimmt die Aussage hingegen gar nicht.

2. *Gleichzeitigkeit im Minkowski-Diagramm*

   (a) Alle Ereignisse mit ein- und derselben Zeitkoordinate t liegen im Minkowski-Diagramm auf einer Horizontalen auf der jeweiligen t-Höhe, also z.B. auf der Höhe $t = 3\,\mathrm{s}$.

   (b) Alle Ereignisse mit ein- und derselben Zeitkoordinate t' liegen im Minkowski-Diagramm auf einer Geraden parallel zur x'-Achse. Diese bildet also den "Moment" t', so auch im Fall $t' = 3\,\mathrm{s}$.

3. *Längenkontraktion als Konsequenz der Lorentztransformation*

   Wir betrachten zwei Ereignisse E_1 und E_2. Sie sollen in S' gleichzeitig stattfinden und den Anfang und das Ende einer Strecke ℓ' längs der Bewegungsrichtung von S' relativ zu S darstellen (x-Richtung, Standardorientierung). Demnach haben die beiden Ereignisse in S' allgemein die Koordinaten

$$E_1 : \quad (t', x'_1) \qquad \text{und} \qquad E_2 : \quad (t', x'_2) \qquad \text{mit} \quad \ell' = x'_2 - x'_1$$

   Nun können wir die beiden Koordinatenangaben mittels Lorentz-Rücktransformation ins S-System transformieren:

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma\,(t' + \beta x'_1) \qquad \text{und} \qquad & x_1 &= \gamma\,(x'_1 + \beta t') \\ t_2 &= \gamma\,(t' + \beta x'_2) \qquad \text{und} \qquad & x_2 &= \gamma\,(x'_2 + \beta t') \end{aligned}$$

   Achtung, an dieser Stelle ist man versucht, einfach die Distanz zwischen diesen beiden Orten x_2 und x_1 zu bestimmen. Allerdings muss die Strecke ℓ auch in S gleichzeitig gemessen werden! Dann entspricht dieser Messung gar nicht mehr das Ereignispaar E_1 und E_2, sondern wir müssen mindestens eines dieser beiden Ereignisse durch ein anderes ersetzen!

   So ersetzen wir beispielsweise E_2 durch ein Ereignis E_3, das gleichzeitig zu E_1 stattfinden soll. Zwischen E_3 mit Zeitkoordinate t_1 und E_2 vergeht somit die Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1$. Damit ist aber das Ende des Objektes, dessen Länge wir in S angeben möchten, gegenüber dem Ort x_2 verschoben. Wir müssen wie folgt auf x_3 zurückrechnen:

$$x_2 = x_3 + v\,\Delta t = x_3 + \beta c\,\Delta t \stackrel{c=1}{=} x_3 + \beta\,\Delta t \qquad \Leftrightarrow \qquad x_3 = x_2 - \beta\,\Delta t = x_2 - \beta\,(t_2 - t_1)$$

   Nun können wir die Strecke ℓ in S korrekt berechnen:

$$\begin{aligned} \ell = x_3 - x_1 &= x_2 - \beta\,(t_2 - t_1) - x_1 \\ &= \gamma\,(x'_2 + \beta t') - \beta\,\big(\gamma\,(t' + \beta x'_2) - \gamma\,(t' + \beta x'_1)\big) - \gamma\,(x'_1 + \beta t') \\ &= \gamma x'_2 + \beta\gamma t' - \beta\gamma t' - \beta^2\gamma x'_2 + \beta\gamma t' + \beta^2\gamma x'_1 - \gamma x'_1 - \beta\gamma t' \\ &= \gamma x'_2 - \beta^2\gamma x'_2 + \beta^2\gamma x'_1 - \gamma x'_1 = \gamma\,(x'_2 - x'_1) - \beta^2\gamma\,(x'_2 - x'_1) \\ &= \gamma\ell' - \beta^2\gamma\ell' = \gamma\,\big(1 - \beta^2\big)\,\ell' = \gamma \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \ell' = \frac{\ell'}{\gamma} \end{aligned}$$

   Dabei haben wir verwendet, dass

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \quad .$$

   $\ell = \frac{\ell'}{\gamma}$ ist genau die Längenkontraktionsgleichung, die wir herleiten wollten.

   Ich weise nochmals auf den essentiellen Punkt hin: Die Messung der Länge eines Objektes erfolgt in einem System gleichzeitig. D.h., die Ortsbestimmung von Anfang und Ende des Gegenstandes erfolgen per Definition zum selben Zeitpunkt im jeweiligen System.

4. *Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm*

Zunächst berechnen wir für den Lorentzfaktor:

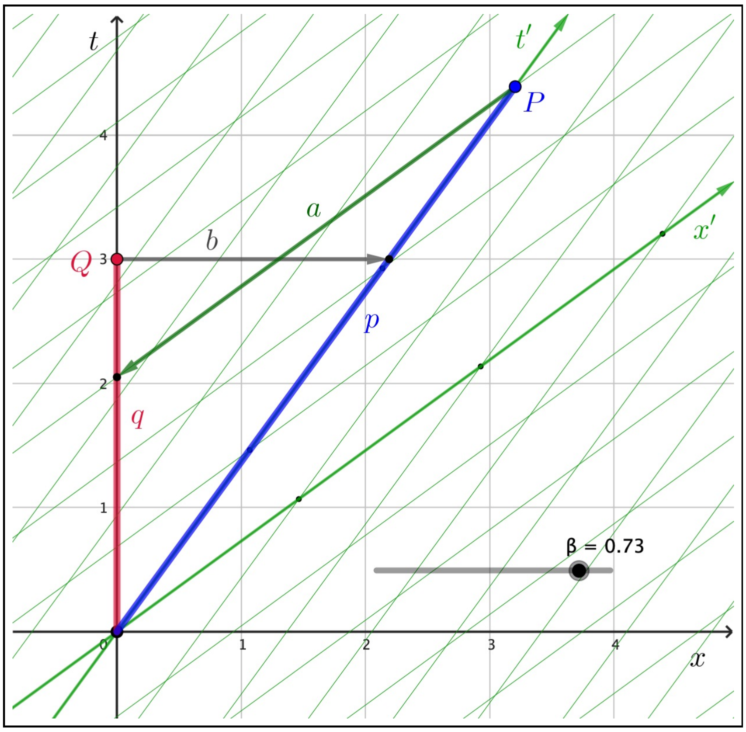
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.73^2}} \approx 1.463$$

Jetzt bestimmen wir mittels Lorentztransformation und -rücktransformation die Koordinaten von P und Q im jeweils anderen System:

$$\begin{aligned} P: \quad t_P &= \gamma\,(t'_P + \beta x'_P) \approx 1.463\,(3 + 0.73\cdot 0) \approx 4.389\,(\mathrm{J}) \\ x_P &= \gamma\,(x'_P + \beta t'_P) \approx 1.463\,(0 + 0.73\cdot 3) \approx 3.204\,(\mathrm{LJ}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q: \quad t'_Q &= \gamma\,(t_Q - \beta x_Q) \approx 1.463\,(3 - 0.73\cdot 0) \approx 4.389\,(\mathrm{J}) \\ x'_Q &= \gamma\,(x_Q - \beta t_Q) \approx 1.463\,(0 - 0.73\cdot 3) \approx -3.204\,(\mathrm{LJ}) \end{aligned}$$

Nun können wir das zugehörige Minkowski-Diagramm zeichnen:



Zusätzlich eingetragen ist ein Vorgang p, der im S'-System im Ursprung ruht und $3\,\mathrm{J}$ dauert.

Betrachten wir diesen Vorgang p aus Sicht des Systems S so beginnt er ebenfalls im Koordinatenursprung, ist aber nach $3\,\mathrm{J}$ noch nicht beendet. Für einen in S ruhenden Beobachter, der sich zu Beginn im Ursprung und folglich nach $3\,\mathrm{J}$ beim Ereignis Q befindet, ist der Vorgang p zu diesem Zeitpunkt immer noch im Gange. Das erkennen wir im Minkowski-Diagramm daran, dass wir dem Pfeil b folgen können, der ja der "Gleichzeitigkeitslinie" $t = 3\,\mathrm{J}$ entlang führt. Er trifft auf den blauen Vorgang p, der folglich in diesem Moment aus der Sicht von S noch nicht beendet ist. Offensichtlich vergeht aus der Sicht von S der Vorgang in S' langsamer $\rightarrow$ Zeitdilatation!

Ganz analog können wir uns die Sache mit dem in S ruhenden Vorgang q überlegen. Dieser dauert in Q offensichtlich $3\,\mathrm{J}$. Ein in S' ruhender Beobachter, der zu Beginn des Vorgangs q, also im Ursprung, mit dabei ist, bewegt sich im Minkowski-Diagramm entlang der t'-Achse. Betrachtet er von $t' = 3\,\mathrm{J}$, also von P aus den Vorgang Q, so folgen wir im Diagramm dem Pfeil a und sehen, der entlang der "Gleichzeitigkeitslinie" $t' = 3\,\mathrm{J}$ verläuft, und stellen fest, dass der Vorgang q immer noch im Gang ist. Offensichtlich vergeht aus der Sicht von S' der Vorgang in S langsamer $\rightarrow$ Zeitdilatation!

5. *Raumschiff und Lichtsignal*

Die Angaben in der Aufgabe beziehen sich alle auf das Erdsystem. Die Entfernung zum Mond beträgt in Lichtsekunden:

$$x_{\text{Mond}} = x_W = 380\,000\,\text{km} = 380\,000\,\text{km} \cdot \underbrace{\frac{1\,\text{Ls}}{300\,000\,\text{km}}}_{=1} = \frac{19}{15}\,\text{Ls} \approx 1.267\,\text{Ls}$$

Folglich erreicht das Licht den Mond nach $\frac{19}{15}\,\text{s}$ und ist danach wieder Richtung Erde unterwegs.

Wie wir rasch erkennen, wenn wir mit dem Zeichnen des Diagramms starten (vgl. nächste Seite oben), passiert das Lichtsignal das Raumschiff zweimal. Beim ersten Mal überholt es das Raumschiff auf dem Weg zum Mond und beim zweiten Mal kommt es dem Raumschiff vom Mond her entgegen.

Die Weltlinie des Raumschiffs R ist gegeben durch:

$$t_R(x) = \frac{1}{\beta} \cdot x = 5x \qquad \text{(Ursprungsgerade)}$$

Für das Lichtsignal L_1, das zwei Sekunden nach dem Raumschiff von der Erde ausgeht, ergibt sich die folgende Geradengleichung:

$$t_{L_1}(x) = mx + q = x + 2$$

Dabei haben wir benutzt, dass ein Lichtsignal im Minkowski-Diagramm mit den üblichen Achseneinheiten – hier Sekunden und Lichtsekunden – mit Steigung $m = 1$ eingetragen werden muss.

Der erste Treffpunkt P lässt sich nun ganz direkt errechnen (Schnittpunktaufgabe):

$$t_R(x) = t_{L_1}(x) \qquad \Rightarrow \qquad 5x = x + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_P = \frac{1}{2}\,(\text{Ls})$$

Dazu gehört der Zeitpunkt $t_P = t_R(\frac{1}{2}) = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5\,(\text{s})$.

Weiter können wir berechnen, zu welchem Zeitpunkt das Lichtsignal den Mond erreicht und dort reflektiert wird (Ereignis W):

$$t_{L_1} = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = t_{L_1} - 2 \quad \Rightarrow \quad t_{L_1} - 2 \overset{!}{=} x_{\text{Mond}} \quad \Rightarrow \quad t_W = x_{\text{Mond}} + 2 = \frac{19}{15} + 2 = \frac{49}{15}\,(\text{s})$$

Somit ergibt sich für das Lichtsignal L_2, das vom Mond in Richtung Erde reist, die folgende Geradengleichung:

$$t_{L_2}(x) = -\left(x - \frac{19}{15}\right) + \frac{49}{15}$$

Dabei habe ich benutzt, dass die Gerade g mit Steigung m in einem x-y-Koordinatensystem, die durch einen Punkt $P(x_P, y_P)$ verläuft, gegeben ist durch:

$$g(x) = m(x - x_P) + y_P$$

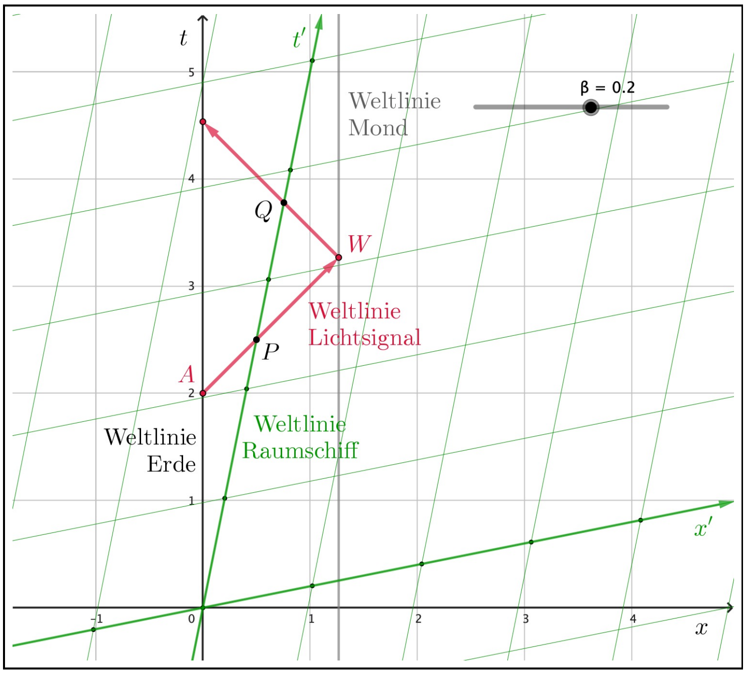
Nun erhalten wir für den zweiten Treffpunkt Q von Raumschiff und Lichtsignal:

$$t_R(x) = t_{L_2}(x) \qquad \Rightarrow \qquad 5x = -\left(x - \frac{19}{15}\right) + \frac{49}{15} \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x = -x + \frac{19}{15} + \frac{49}{15}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 6x = \frac{68}{15} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_Q = \frac{34}{45} \approx 0.756\,(\text{Ls})$$

Dazu gehört der Zeitpunkt $t_Q = t_R(\frac{34}{45}) = 5 \cdot \frac{34}{45} = \frac{34}{9} \approx 3.778\,(\text{s})$.

Das Minkowski-Diagramm folgt oben auf der nächsten Seite.



Nun wollen wir noch die Koordinaten aller relevanten Ereignisse ins S'-System transformieren. Für den Lorentzfaktor γ erhalten wir:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{24}{25}}} = \sqrt{\frac{25}{24}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12} \approx 1.021$$

Zunächst die Koordinaten zum Aussenden des Lichtsignals von der Erde:

$$A: \quad t'_A = \gamma\,(t_A - \beta x_A) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\,(2 - \frac{1}{5}\cdot 0) = \frac{5\sqrt{6}}{6} \approx 2.041\,(\mathrm{s})$$

$$x'_A = \gamma\,(x_A - \beta t_A) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\,(0 - \frac{1}{5}\cdot 2) = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx -0.408\,(\mathrm{Ls})$$

Dann die Koordinaten des ersten Zusammentreffens von Raumschiff und Lichtsignal:

$$P: \quad t'_P = \gamma\,(t_P - \beta x_P) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{24}{10} = \sqrt{6} \approx 2.449\,(\mathrm{s})$$

$$x'_P = \gamma\,(x_P - \beta t_P) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\cdot 0 = 0$$

Wir wussten bereits, dass die Ortskoordinate von P im S'-System verschwindet, denn Raumschiff und Lichtsignal treffen schließlich "beim Raumschiff" aufeinander – bei Q ist das auch wieder so!

Nun zum Umkehrereignis des Lichtsignals:

$$W: \quad t'_W = \gamma\,(t_W - \beta x_W) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\left(\frac{49}{15} - \frac{1}{5}\cdot\frac{19}{15}\right) = \frac{\sqrt{6}}{12}\left(\frac{245}{15} - \frac{19}{15}\right) = \frac{113\sqrt{6}}{90} \approx 3.075\,(\mathrm{s})$$

$$x'_W = \gamma\,(x_W - \beta t_W) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\left(\frac{19}{15} - \frac{1}{5}\cdot\frac{49}{15}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\cdot\left(\frac{95}{15} - \frac{49}{15}\right) = \frac{23\sqrt{6}}{90} \approx 0.626\,(\mathrm{Ls})$$

Und zum Schluss noch die Koordinaten des zweiten Treffens von Lichtsignal und Raumschiff:

$$Q: \quad t'_Q = \gamma\,(t_Q - \beta x_Q) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\left(\frac{34}{9} - \frac{1}{5}\cdot\frac{34}{45}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{34}{9}\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) = \frac{68\sqrt{6}}{45} \approx 3.701\,(\mathrm{s})$$

$$x'_Q = \gamma\,(x_Q - \beta t_Q) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\left(\frac{34}{45} - \frac{1}{5}\cdot\frac{34}{9}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{12}\cdot 0 = 0$$

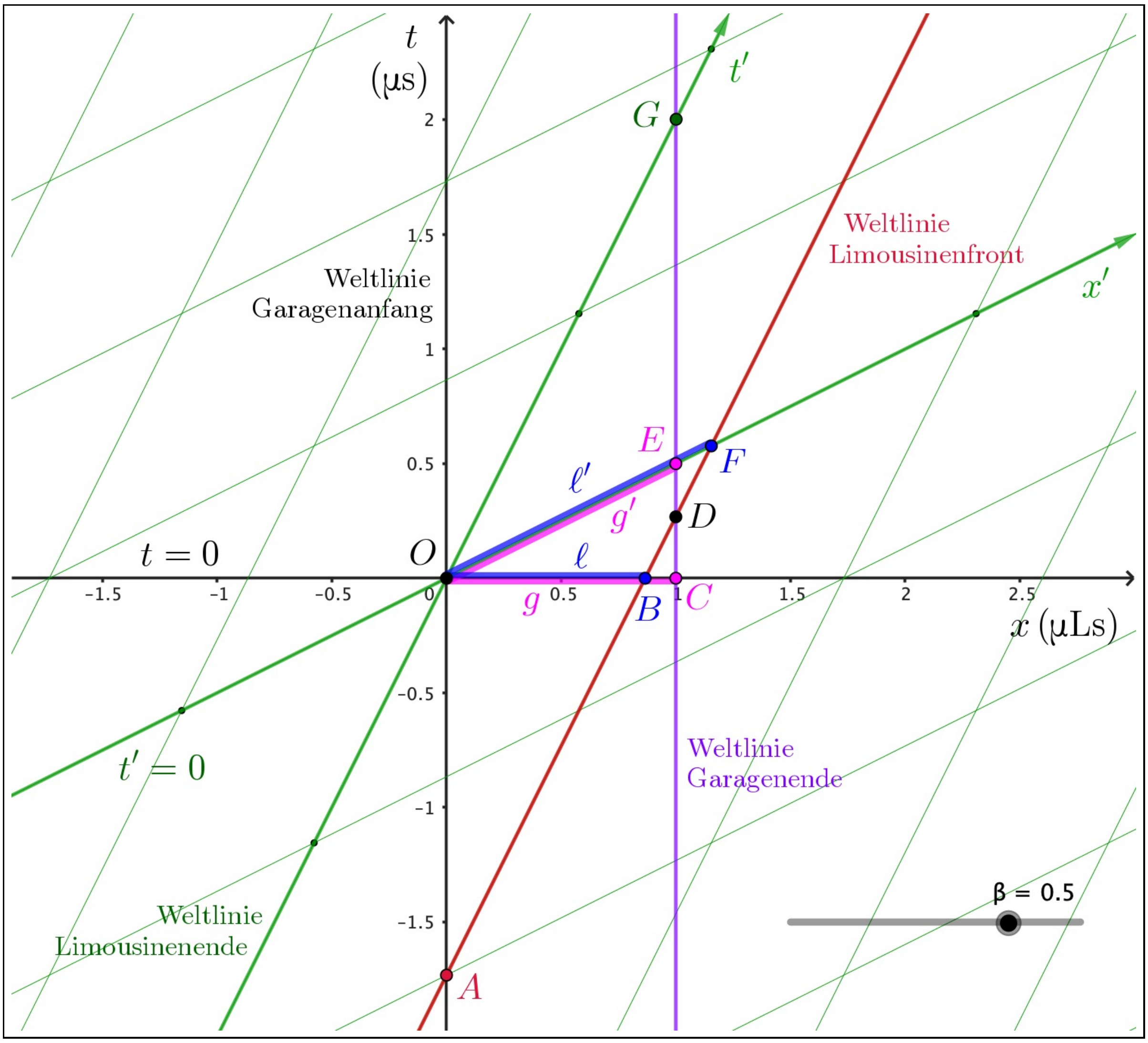
Alle diese Koordinaten passen zu schieflinigen Koordinatensystem im Diagramm oben.

6. *Das Limousinen-Garage-Paradoxon*

   S sei das Garagensystem, S' das Limousinensystem. Für den Lorentzfaktor erhalten wir:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

   Es ist praktisch, den Ursprung $O : (t, x) = (t', x') = (0, 0)$ des Minkowski-Diagramms beispielsweise mit folgendem Ereignis zu identifizieren: *Das Ende der Limousine kommt beim Garagenanfang vorbei.* Damit sieht das Minkowski-Diagramm folgendermassen aus:



   Die weiteren angeschriebenen Ereignisse sind:

   - A: Limousinenfront trifft auf Garagenanfang, d.h., die Limousine beginnt in die Garage einzufahren.
   - B: Ort der Limousinenfront zum Zeitpunkt $t = 0$ im S-System.
   - C: Ort des Garagenendes zum Zeitpunkt $t = 0$ im S-System.
   - D: Limousinenfront trifft auf Garagenende, d.h., die Limousine beginnt die Garage wieder zu verlassen.
   - E: Ort des Garagenendes zum Zeitpunkt $t' = 0$ im S'-System.
   - F: Ort der Limousinenfront zum Zeitpunkt $t' = 0$ im S'-System.
   - G: Limousinenende trifft auf Garagenende, d.h., die Limousine hat die Garage komplett verlassen.

Betrachtung im Garagensystem

In ihrem Eigensystem S hat die Garage eine Länge von $g = 300\,\mathrm{m} = 1\,\mu\mathrm{Ls}$. Die Limousne hingegen ist längenkontrahiert. Die Messung dieser kontrahierten Länge muss im Garagensystem zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgen, z.B. zum Zeitpunkt $t = 0$. Dann enstpricht dies im Diagramm der Länge ℓ zwischen den Ereignissen O und B.

Im Prinzip können wir ℓ direkt mit der Längenkontraktionsgleichung bestimmen:

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma} = \frac{1\,\mu\mathrm{Ls}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mu\mathrm{Ls} \approx 0.866\,\mu\mathrm{Ls} \approx 260\,\mathrm{m}$$

Natürlich können wir diese Länge auch aus unserem Diagramm erhalten, indem wir den Schnittpunkt der Weltlinie der Limousinenfront mit der x-Achse ($t = 0$) schneiden. Zur Angabe dieser Limousinenfront-Weltlinie benötigen wir die Koordinaten eines Punktes auf dieser Linie. Da eignet sich speziell der Punkt F, denn dessen Koordinaten lauten im S'-System bekanntermaßen $(t', x') = (0, 1)$ und wir können mittels Lorentztransformation auf die Koordinaten in S schließen:

$$\begin{aligned} F: \quad t_F &= \gamma\,(t'_F + \beta x'_F) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(0 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577\,(\mu\mathrm{s}) \\ x_F &= \gamma\,(x'_F + \beta t'_F) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.155\,(\mu\mathrm{Ls}) \end{aligned}$$

Somit folgt für die Weltlinie der Limousinenfront (LF):

$$t_{\mathrm{LF}}(x) = \frac{1}{\beta}\,(x - x_F) + t_F = 2\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2x - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2x - \sqrt{3}$$

Diese Gerade schneidet die x-Achse ($t = 0$) erwartungsgemäß bei $x_B = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\mu\mathrm{Ls}) = \ell$.

Im Garagensystem S ist also die Limousine definitiv längenkontrahiert und hat somit zum Zeitpunkt $t = 0$ vollständig in der Garage Platz: $\ell < g$.

Betrachtung im Limousinensystem

Im Limousinensystem muss umgekehrt die Länge g' der Garage zu einem bestimmten Zeitpunkt, z.B. bei $t' = 0$, gemessen werden. Nun hat das Ereignis E ("Ort des Garagenendes zum Zeitpunkt $t' = 0$) im Garagensystem S die Koordinaten $(t_E, x_E) = (\beta \cdot x_E, x_E) = (\frac{1}{2}\cdot 1, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$. Daraus folgt im Limousinensystem S':

$$\begin{aligned} E: \quad t'_E &= \gamma\,(t_E - \beta x_E) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1\right) = 0 \\ x'_E &= \gamma\,(x_E - \beta t_E) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866\,(\mu\mathrm{Ls}) \end{aligned}$$

Damit ist die Garage im Limousinensystem S' definitiv längenkontrahiert und somit kürzer als die Limousine, denn $g' = x'_E = 0.866\,\mu\mathrm{Ls} < 1\,\mu\mathrm{Ls} = \ell'$.

Im Limousinensystem ist die Garage also zu klein für die Limousine. Das ist aber kein Widerspruch zur gegenteiligen Feststellung im Garagensystem, denn das Minkowski-Diagramm zeigt uns, dass die beiden Systeme eben mit unterschiedlichen Gleichzeitigkeiten arbeiten. Gleichzeitig zum Ereignis O, wo Garagenanfang und Limousinenende zusammenfallen, befindet sich die Limousine aus der Sicht des Garagensystems S ($t = 0$) vollständig in der Garage. Im Limousinensystem S hingegen ragt dann ($t' = 0$) die Limousine bereits über die Garage hinaus.

Wann beginnt die Limousine die Garage zu verlassen?

Noch klarer wird die Sache, wenn wir uns die Koordinaten des Ereignisses D ("Limousinenfront trifft auf das Garagenende") in beiden Systemen anschauen. Dieses hat im Garagensystem S die Ortskoordinate $x_D = 1\,(\mu\mathrm{Ls})$, woraus für die Zeitkoordinate folgt:

$$t_D = t_{\mathrm{LF}}(x_D) = 2x_D - \sqrt{3} = 2 \cdot 1 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268\,(\mu\mathrm{s})$$

Rechnen wir diese Koordinaten ins Limousinensystem S' um:

$$\begin{aligned} D: \quad t'_D &= \gamma\,(t_D - \beta x_D) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\cdot 1\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 2 \approx -0.268\,(\mu\mathrm{s}) \\ x'_D &= \gamma\,(x_D - \beta t_D) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\,(2 - \sqrt{3}\,)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1\,(\mu\mathrm{Ls}) \end{aligned}$$

Im Garagensystem S liegt also das Ereignis D ("Limousine beginnt die Garage zu verlassen) gegenüber dem Ereignis O ("Limousinenende fährt in die Garage ein") $0.268\,\mu\mathrm{s}$ in der Zukunft ($t_D \approx 0.268\,\mu\mathrm{s}$), währenddem im Limousinensystem S' Ereignis D gegenüber Ereignis O um $0.268\,\mu\mathrm{s}$ in der Vergangenheit liegt ($t'_D \approx -0.268\,\mu\mathrm{s}$). In S' ist die Limousine somit bereits wieder am herausfahren aus der Garage, wenn ihr Ende in die Garage hineinfährt.

7. *Das Star-Wars-Paradoxon*

Der Aufgabentext ist dort unpräzise resp. unvollständig, in gewisser Weise sogar falsch, wo gesagt wird, "der Abschuss – und damit auch der eventuelle Einschlag – erfolge in dem *Moment*, in dem Spitze S des Raumschiffs A am Ende E' des Raumschiffs B vorbeifliegt".

Das Problem besteht darin, dass die Raumschiffe gar keine gleichzeitigen Momente, also Ereignisgruppen gleicher Zeitkoordinate kennen. Von allen Ereignissen, die im System von Raumschiff A zur Zeit $t = 0$ stattfinden, fällt einzig und allein das Ursprungsereignis O mit dem Ursprungsereignis O' zusammen. Alle anderen Ereignisse mit $t = 0$ haben in S' (System von Raumschiff B), eine von null verschiedene Zeitkoordinate t', finden also früher oder später statt. Wenn also in S (Raumschiff A) der Abschuss am Ende von Raumschiff A zur selben Zeit erfolgt, wie die Spitze von A am Ende von B vorbeifliegt (Ursprungsereignis O), dann ist dieser Abschuss in S' (Raumschiff B) nicht gleichzeitig zu O, und genau dieser Umstand löst das Paradoxon auf.

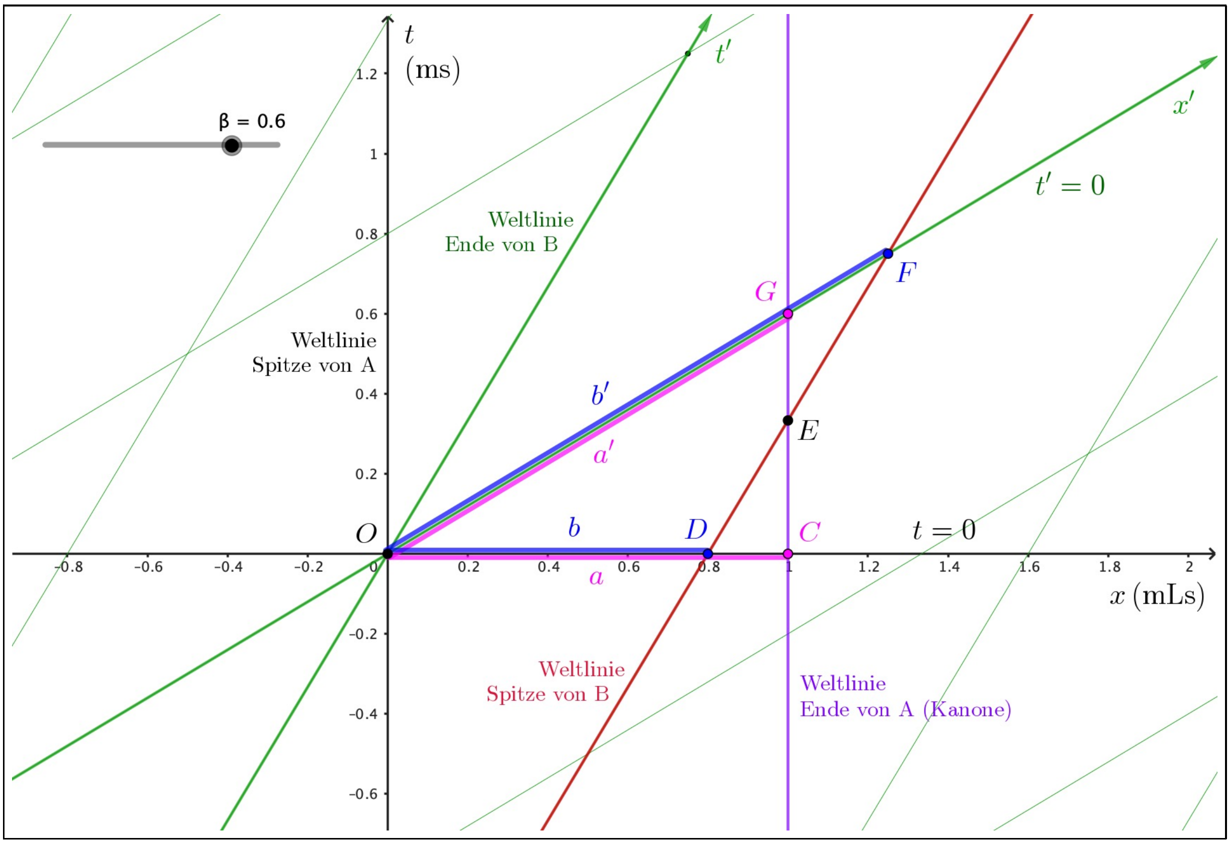
Betrachten wir die Sache nun auch noch rechnerisch und im Minkowski-Diagramm. Wir wollen also davon ausgehen, dass der Abschuss P im System S von Raumschiff A gleichzeitig zum Ursprungsereignis O erfolgt. Dann sieht das Minkowski-Diagramm so aus, wie oben auf der nächsten Seite abgebildet ($300\,\mathrm{km} = 1\,\mathrm{mLs}$).

Die darin angeschriebenen Ereignisse sind:

- O: Ursprungsereignis. Die Spitze von Raumschiff A passiert das Ende von Raumschiff B.
- C: Ort des Endes von Raumschiff A resp. Ort der Kanone zum Zeitpunkt $t = 0$ im S-System.
- D: Ort der Spitze von Raumschiff B zum Zeitpunkt $t = 0$ im S-System.
- E: Die Spitze von Raumschiff B trifft auf das Ende von Raumschiff A.
- F: Ort der Spitze von Raumschiff B zum Zeitpunkt $t' = 0$ im S'-System.
- G: Ort des Endes von Raumschiff A zum Zeitpunkt $t' = 0$ im S'-System.

Für den Lorentzfaktor erhalten wir:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$



Aus der Sicht von Raumschiff A ist Raumschiff B längenkontrahiert. Seine Länge in S beträgt:

$$b = \frac{b}{\gamma} = \frac{1\,\text{mLs}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}\,\text{mLs} = 0.8\,\text{mLs} = 240\,\text{km}$$

Damit kennen wir die x-Koordinate des Ereignisses D (Ort der Spitze von Raumschiff B zur Zeit $t = 0$) $\Rightarrow D : (t, x) = (0, b) = (0, 0.8)$.

Schiesst Raumschiff A zum Zeitpunkt $t = 0$, also beim Ereignis $C : (t, x) = (0, 1)$, so wird das Geschoss das Raumschiff B verfehlen, eben weil dieses in S längenkontrahiert ist und in diesem Moment die anderen Raumschiffenden zusammenfallen.

Im System S' von Raumschiff B findet die Schussabgabe bei Ereignis C in der Vergangenheit statt. D.h., Raumschiff A hat bereits geschossen, bevor sich das Raumschiff B neben die Kanone bewegt hat. Auf diese Weise wird das Paradoxon aufgelöst.

Ganz analog zu den bisherigen Überlegungen hat das Raumschiff A im System S' die Länge $a' = 0.8\,\text{mLs}$ $\Rightarrow G : (t', x') = (0, 0.8)$. D.h., im System S' ist Raumschiff A längenkontrahiert.

Würde die Aufgabenstellung so präzisiert werden, dass der Schuss im System S' gleichzeitig mit dem Ursprungsereignis O stattfindet, so würde der Schuss treffen, denn dann wäre die Schussabgabe bei Ereignis G, wo das Ende von Raumschiff A und somit die Kanone direkt neben dem Raumschiff B liegt. Im System S würde diese Schussabgabe in der Zukunft stattfinden, nachdem sich das längenkontrahierte Raumschiff B entsprechend weiterbewegt hat und nun effektiv neben der Kanone liegt.

Auf die Koordinatenumrechnungen wollen wir hier verzichten. Sie bringen kein weiteres Licht ins Dunkel. Das Minkowski-Diagramm hat das Paradoxon bereits zur besten Zufriedenheit auflösen können.

8. *Das Zwillings-Paradoxon – zum Ersten*

Zunächst bemerken wir, dass nur aus der Sicht des auf der Erde zurück bleibenden Zwillings die ganze Weltraumreise des anderen in einem einzigen Inertialsystem beschrieben werden kann. Im System des anderen Zwillings muss während der Reise das Inertialsystem gewechselt werden, nämlich beim Umkehren. Über diesen Wechsel des Inertialsystems werden wir zum Ende noch nachdenken müssen. Er hat sehr bemerkenswerte und einschneidende Konsequenzen. Im Moment ist aber klar: Wir müssen die Reise zunächst aus Sicht des zuhause bleibenden Zwillings beschreiben und durchrechnen. Da sind wir auf der sicheren Seite. Dieser Umstand bricht auch die Symmetrie zwischen den beiden Zwillingen.

(a) Mit $\beta = \frac{4}{5}$ berechnen wir zunächst den Lorentzfaktor:

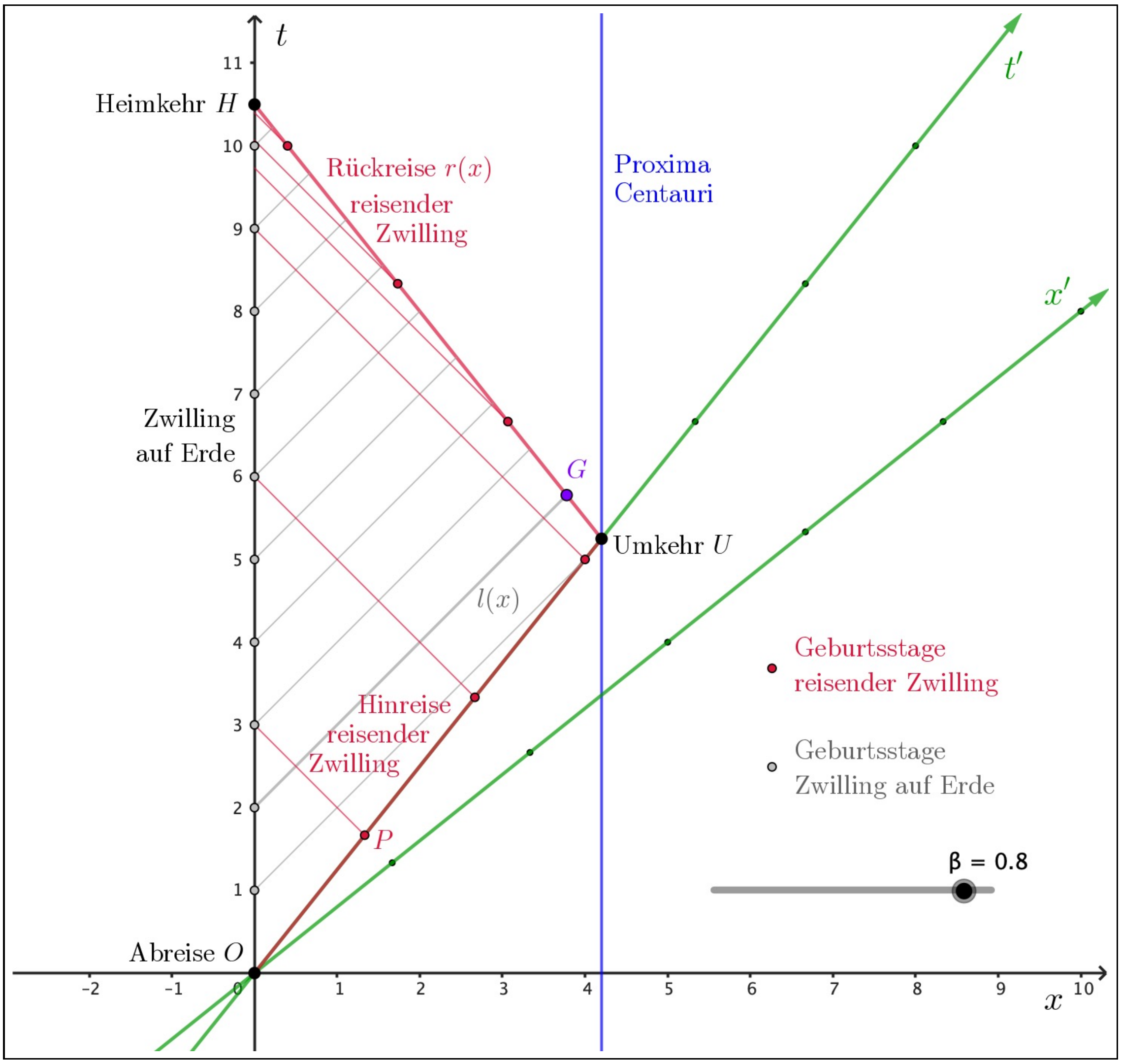
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Daraus folgt für die Koordinaten des ersten Geburtstages des reisenden Zwillings unterwegs, also für $P : (t', x') = (1, 0)$ im Erdsystem S:

$$P: \quad t_P = \gamma\,(t'_P + \beta x'_P) = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{4}{5}\cdot 0\right) = \frac{5}{3} \approx 1.67\,(\mathrm{J})$$

$$x_P = \gamma\,(x'_P + \beta t'_P) = \frac{5}{3}\left(0 + \frac{4}{5}\cdot 1\right) = \frac{4}{3} \approx 1.33\,(\mathrm{LJ})$$

Damit können wir das Minkowski-Diagramm zeichnen:



(b) Die Strecke bis zur Umkehr U bei Proxima Centauri beträgt von der Erde aus gesehen $x_U = 4.2\,\mathrm{LJ}$. Das ergibt aus Erdsicht eine Reisezeit von

$$t_U = \frac{x_U}{v} = \frac{4.2\,\mathrm{LJ}}{\frac{4}{5}\,\mathrm{c}} = \frac{5}{4} \cdot 4.2\,\mathrm{J} = 5.25\,\mathrm{J} \quad .$$

An Bord vergeht dabei für den reisenden Zwilling gemäss Zeitdilatation eine Zeitspanne von

$$t'_U = \frac{t_U}{\gamma} = \frac{5.25\,\mathrm{J}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot 5.25\,\mathrm{J} = 3.15\,\mathrm{J} \quad .$$

Für die Rückreise gelten die gleichen Überlegungen, sodass der reisende Zwilling $2t'_U = 6.3\,\mathrm{J}$ älter als beim Start zurückkehrt. Für den zurück auf der Erde gebliebenen Zwilling sind nun aber $2t_U = 10.5\,\mathrm{J}$ vergangen. Der reisende Zwilling ist somit um $4.2\,\mathrm{J}$ jünger geblieben als der Zwilling auf der Erde.

(c) Der Zwilling auf der Erde hat 10 Geburtstagsgrüsse abgeschickt, derjenige unterwegs deren 6.

Die zugehörigen Lichtsignale habe ich ins Minkowski-Diagramm eingetragen. Wir sehen, wie der reisende Zwilling den ersten Geburtstagsgruss erst kurz vor der Ankunft bei Proxima Centauri erhält. Alle weiteren Grüsse treffen auf der Rückreise ein und zwar in einem Rhythmus von 4 Monaten.

Umgekehrt erhält der Zwilling auf der Erde zunächst Geburtstagsgrüsse im 3-Jahres-Rhythmus, bis dann im letzten Jahr vor der Rückkehr gerade drei Grüsse kurz hintereinander eintreffen.

(d) Es geht nun um den Stand auf der Borduhr des Raumschiffs beim Ereignis G: "Der zweite Geburtstagsgruss des Erdzwillings trifft beim reisenden Zwilling ein". Wir wissen bereits, dass die Antwort irgendwo zwischen 3 und 4 Jahren liegen muss.

Dazu benötigen wir die Koordinaten von G. Diese erhalten wir aus der Schnittpunktbestimmung des zweiten Geburtstagsgrusses (= Lichtsignal $l(x)$, das zum Zeitpunkt $t = 2$ von der Erde aus startet) mit

$$l(x) = x + 2 \qquad \text{(Steigung 1!)}$$

und der Gerade $r(x)$, die für die Rückreise des reisenden Zwillings steht:

$$r(x) = -\frac{5}{3}\,x + 10.5$$

Für den Schnittpunkt ergibt sich:

$$l(x) = r(x) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = -\frac{5}{4}\,x + 10.5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{4}\,x = 8.5 \quad \Leftrightarrow \quad x_G = \frac{34}{9} \approx 3.778\,(\mathrm{LJ})$$

$$\Rightarrow \quad t_G = l\,(x_G) = \frac{34}{9} + 2 = \frac{52}{9} = 5.778\,(\mathrm{J})$$

Aus der Sicht der Erde dauert es also, beginnend beim Startereignis O, 5.778 Jahre, bis der zweite Geburtstagsgruss beim reisenden Zwilling eintrifft. Mit der Zeitdilatation können wir diese Zeitspanne in die Zeitanzeige auf der Borduhr des Raumschiffs umrechnen:

$$t'_G = \frac{t_G}{\gamma} = \frac{\frac{52}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{52}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{52}{15} \approx 3.467\,(\mathrm{J})$$

Zum Schluss noch dies: Im Minkowski-Diagramm sehen wir deutlich, dass der reisende Zwilling beim Umkehrpunkt das Inertialsystem wechselt. Seine Weltlinie verläuft ab dann nicht mehr auf der t'-Achse, die zum Inertailsystem der Hinreise gehört. Man müsste in diesem Moment ein neues Inertialsystem über das Minkowski-Diagramm legen und sich genau darüber klar werden, welche Effekte die Umkehr hat. . .

Darüber machen wir uns aber in einem separaten Papier Gedanken!