Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 5: Aufgaben zur Längenkontraktion – LÖSUNGEN

1. *Ein Flug zum Zentrum der Galaxis*

   (a) Die Strecke ℓ zum Zentrum der Milchstrasse ist offensichtlich im Erdsystem angegeben. Folglich ist auch die Lichtlaufzeit, die wir daraus berechnen, eine Angabe in diesem System:

   $$t_{\mathrm{L}} = \frac{\ell}{c} = \frac{30\,000\,c\,\mathrm{a}}{c} = 30\,000\,\mathrm{a}$$

   Vom Zentrum der Galaxis bis zu uns ist das Licht $30\,000$ Jahre lang unterwegs.

   Beachte, wie einfach es sich mit Lichtjahren rechnen lässt, wenn wir bemerken, dass $1\,\mathrm{LJ} = c\,\mathrm{a}$ ist.

   (b) Das Raumschiff braucht für die Strecke ℓ zum Zentrum der Milchstrasse aus Sicht der Erde nur ein klein wenig länger als das Licht, denn schliesslich ist es ja fast mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs:

   $$t_{\mathrm{S}} = \frac{\ell}{v} = \frac{30\,000\,c\,\mathrm{a}}{0.999\,c} = 30\,030\,\mathrm{a}$$

   (c) Wir berechnen zunächst den Lorentzfaktor:

   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.999^2}} = 22.366$$

   Im Raumschiff vergeht aus Sicht der Erde die Zeit langsamer. Für die Reisezeit t'_{S} folgt aus der Zeitdilatationsgleichung:

   $$t'_{\mathrm{S}} = \frac{t_{\mathrm{S}}}{\gamma} = \frac{30\,030\,\mathrm{a}}{22.366} = 1342.7\,\mathrm{a}$$

   Eine Geschwindigkeit von $99.9\,\%$ würde also noch nicht reichen, damit ein Mensch innerhalb seines Lebens bis zum Zentrum der Milchstrasse reisen könnte.

   (d) Das geht, weil aus der Sicht des Raumschiffs die Strecke zum Zentrum der Milchstrasse längenkontrahiert erscheint. diese Strecke bewegt sich aus Sicht des Raumschiffs am Raumschiff vobei und wegen der Verkürzung reichen dafür $1343\,\mathrm{a}$. Es wird keine Überlichtgeschwindigkeit benötigt.

   (e) Der Lorentzfaktor ist immer noch derselbe, denn aus der Sicht des Raumschiffs bewegt sich die Milchstrasse mit $99.9\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit. Somit folgt für die längenkontrahierte Distanz zum Zentrum der Milchstrasse:

   $$\ell' = \frac{\ell}{\gamma} = \frac{30\,000\,\mathrm{LJ}}{22.366} = 1341.3\,\mathrm{LJ}$$

   Dasselbe Resultat erhalten wir natürlich auch aus der folgenden Rechnung:

   $$\ell' = v \cdot t'_{\mathrm{S}} = 0.999\,c \cdot 1342.7\,\mathrm{a} = 1341.4\,\mathrm{LJ}$$

   Der minimale Unterschied zwischen den beiden Ergebnissen hat nur mit den mathematischen Rundungen zu tun, die man halt bei irgendeiner Ziffer schliesslich vornehmen muss.

2. *Vorbereitung des "Limousinen-Garage-Paradoxons"*

   (a) Die Garagenlänge $\ell = 12\,\mathrm{m}$ muss der kontrahierten Länge der Limousine entsprechen. Mit deren Eigenlänge $\ell' = 13\,\mathrm{m}$ erhalten wir für den Lorentzfaktor:

$$\gamma = \frac{\ell'}{\ell} = \frac{13\,\mathrm{m}}{12\,\mathrm{m}} = \frac{13}{12}$$

   Daraus folgt für die Geschwindigkeit β:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{13}{12}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{13^2-12^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{169-144}{13^2}} = \sqrt{\frac{25}{13^2}} = \frac{5}{13} \approx 38.46\,\%$$

   (b) Wir führen im Prinzip die genau gleiche Rechnung wie unter (a) durch:

$$\gamma = \frac{\ell'}{\ell} = \frac{12\,\mathrm{m}}{7.2\,\mathrm{m}} = \frac{12}{7.2} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3}$$

   Somit erhalten wir für die Relativgeschwindigkeit β:

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{5^2-3^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{25-9}{5^2}} = \sqrt{\frac{16}{5^2}} = \frac{4}{5} = 80\,\%$$

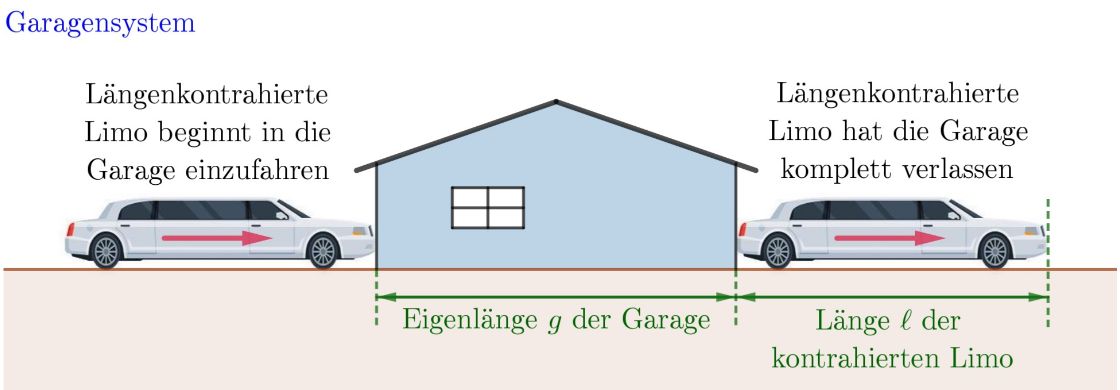
   (c) Berechnen wir zunächst den Lorentzfaktor nochmals neu:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{6}{10}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{36}{100}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{64}{100}}} = \frac{1}{\frac{8}{10}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

   Damit beträgt die Länge der Limousine im Garagensystem:

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma} = \frac{13\,\mathrm{m}}{\frac{5}{4}} = \frac{52}{5}\,\mathrm{m} = 10.4\,\mathrm{m}$$

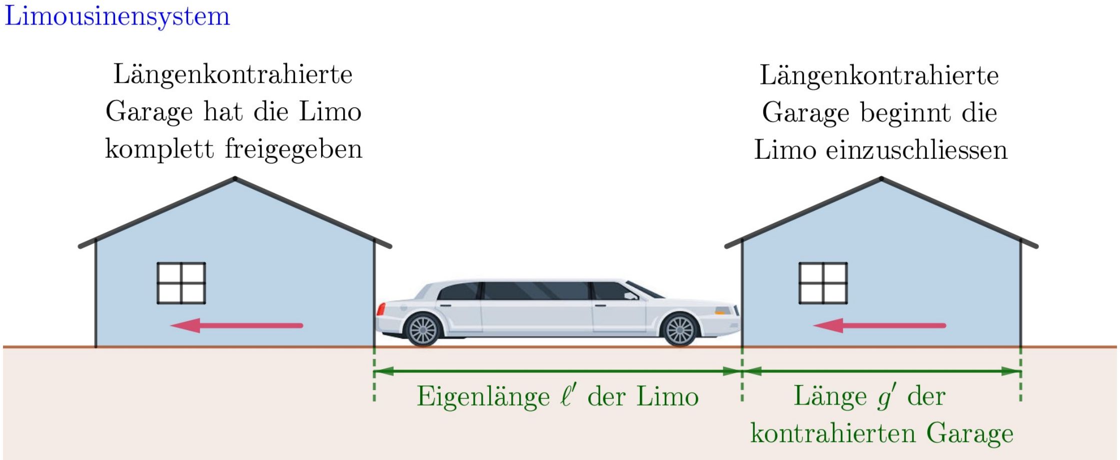
   Somit muss die Limousine im Garagensystem insgesamt $s = g + \ell = 12\,\mathrm{m} + 10.4\,\mathrm{m} = 22.4\,\mathrm{m}$ Strecke zurücklegen, wie die folgende Grafik zeigt:



   Aus dieser Länge s lässt sich im Garagensystem sofort berechnen, wie lange die Durchfahrt dauert:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{22.4\,\mathrm{m}}{0.6\,c} = \frac{22.4\,\mathrm{m}}{0.6\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.244\cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} = 124.4\,\mathrm{ns}$$

(d) Der Lorentzfaktor bleibt derselbe wie unter (c). Betrachten wir den Vorgang im Limousinensystem:



Die Länge der längenkontrahierten Garage beträgt nun:

$$g' = \frac{g}{\gamma} = \frac{12\,\mathrm{m}}{\frac{5}{4}} = \frac{48}{5}\,\mathrm{m} = 9.6\,\mathrm{m}$$

Somit muss die kontrahierte Garage im Limousinensystem insgesamt $s' = g' + \ell' = 13\,\mathrm{m} + 9.6\,\mathrm{m} = 22.6\,\mathrm{m}$ Strecke zurücklegen. Die dafür benötigte Zeit beträgt – natürlich immer noch im Limousinensystem:

$$t' = \frac{s'}{v} = \frac{22.6\,\mathrm{m}}{0.6\,c} = \frac{22.6\,\mathrm{m}}{0.6 \cdot 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.255 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} = 125.5\,\mathrm{ns}$$

(e) Die beiden unter (c) und (d) berechneten Zeiten t und t' sind nicht via Zeitdilatationsgleichung $t = \gamma\, t'$ miteinander verbunden, denn auch wenn der Vorgang in beiden System dasselbe Anfangskriterium (Spitze der Limousine beginnt sich in der Garage zu befinden) und dasselbe Endkriterium (Ende der Limousine verlässt die Garage) aufweist, so erfüllt dieser Vorgang nicht die Kriterien, um der Zeitdilatationsgleichung zu genügen. Wir erinnern uns (Merkkasten auf den Unterlagen zur Herleitung der Zeitdilatation):

Bewegt sich ein Inertialsystem S' relativ zu einem anderen Inertialsystem S mit konstanter Geschwindigkeit v, so wird ein Vorgang (z.B. das Ticken einer Uhr), der in S' ruht und die Zeit t' dauert, für den Beobachter in S verlängert auf

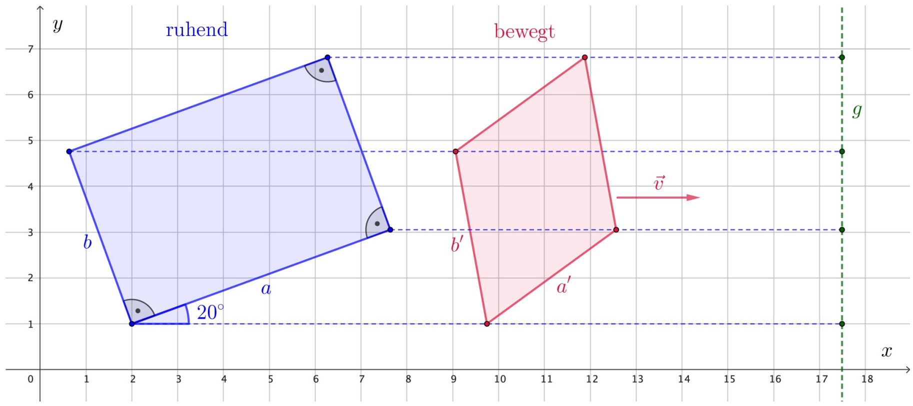
$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma t' \geq t'$$

Dieses Phänomen heißt **Zeitdilatation**, *d.h. wörtlich Zeitdehnung.*

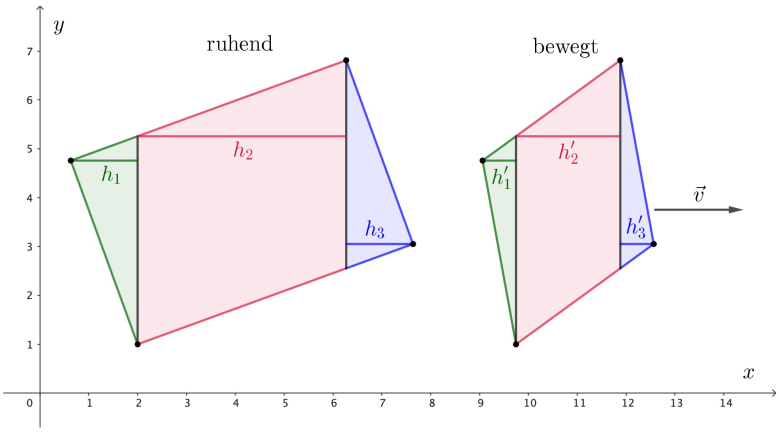
Unser Vorgang "ruht" aber in keinem der beiden Bezugssysteme. Das erkennen wir daran, dass unser Start- und unser Endkriterium an verschiedenen Orten im System stattfindet. In diesem Sinne könnte man also sagen: "In jedem der beiden Systeme hat sich der Vorgang verschoben, weil Start- und Endereignis nicht am gleichen Ort stattfinden."

3. *Verformung eines Rechtecks*

   (a) Im Prinzip müssen wir das Rechteck einfach horizontal, also parallel zur x-Achse mit Faktor $\frac{1}{2}$ stauchen. Dazu tragen wir z.B. eine Vertikale g ein, fällen von jedem Eckpunkt der ruhenden Figur das Lot auf diese Gerade und können anschliessend alle Strecken zwischen Eck- und Lotpunkt halbieren. So ergeben sich die Eckpunkte der bewegten Figur zu $\gamma = 2$:

   (b) Unterteilen wir das Parallelogramm in drei Teilflächen – zwei Dreieck und ein Parallelogramm mit zwei Seiten parallel zur y-Achse – so sehen wir direkt ein, dass jede dieser neuen Figuren eine Höhe besitzt, die parallel zur x-Achse liegt und somit während der Bewegung in x-Richtung mit dem Lorentzfaktor γ gestaucht wird ($h_1' = \frac{h_1}{\gamma}$, $h_2' = \frac{h_2}{\gamma}$, $h_3' = \frac{h_3}{\gamma}$), wobei gleichzeitig die Grundseite in y-Richtung unverändert bleibt:

   Demnach wird mit $\gamma = 2$ die Gesamtfläche halbiert. Es ergibt sich:

$$A' = \frac{A}{\gamma} = \frac{a \cdot b}{\gamma} = \frac{6\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}}{2} = 12\,\text{cm}^2$$

   (c) Das haben wir unter (b) gerade ganz allgemein erledigt.

4. *Längenkontraktion in der Radarkontrolle*

   Der VW Käfer ist mit halber Lichtgeschwindigkeit unterwegs. Für den zugehörigen Lorentzfaktor folgt:

$$\gamma_{\text{VW}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\text{VW}}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

   Da der Lincoln im ruhend doppelt so lange ist wie der Käfer, muss sein Lorentzfaktor doppelt so gross sein wie derjenige des Käfers. Daraus schliessen wir auf die Geschwindigkeit des Lincolns:

$$\beta_{\text{Lincoln}} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_{\text{Lincoln}}^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\frac{16}{3}}} = \sqrt{1-\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}} \approx 0.9014 = 90.14\,\%$$

   Der Lincoln ist also mit gut $90\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs.

5. *Star Wars*

(a) Der Lorentzfaktor der Relativbewegung von Raumschiffen und Planet beträgt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{55}{73}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{73^2-55^2}{73^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{48^2}{73^2}}} = \frac{1}{\frac{48}{73}} = \frac{73}{48}$$

Damit können wir die aus Sicht von Tatooine längenkontrahierte Distanz zwischen den beiden Raumschiffen ins Raumschiffsystem umrechnen:

$$d' = \gamma \cdot d = \frac{73}{48} \cdot 480\,000\,\mathrm{km} = 730\,000\,\mathrm{km}$$

Im Raumschiffsystem beträgt folglich die Zeit, die der Radarimpuls braucht, um die Strecke zwischen den Raumschiffen hin und zurück zurückzulegen:

$$t' = \frac{2d}{c} = \frac{2 \cdot 730\,000\,\mathrm{km}}{300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = 4.867\,\mathrm{s}$$

Mit dieser Periode senden also beide Schiffe gemäss ihrer Borduhren Radarimpulse aus.

(b) Natürlich könnte man die unter (a) errechnete Zeit auch anders erhalten, indem wir die Laufzeit des Radarimpulses im Planetensystem betrachten. Dann gibt es allerdings zwei Zeiten zu berechnen, denn das Radarsignal von Han zu Luke muss dem davon eilenden X-Wing Fighter hinterherfliegen, während in die Gegenrichtung der Millenium Falcon dem Radarsignal entgegen kommt.

Es ist folglich ganz klar, dass das Signal von Luke zu Han aus Sicht von Tatooine weniger Zeit braucht als das Signal in die Gegenrichtung.

(c) Jetzt führen wir diese Überlegungen auch noch quantitativ aus...

Ist t_1 die Zeit, die das Radarsignal von Han zu Luke benötigt, so gilt aufgrund obiger Überlegung für die vom Radarsignal in diese Richtung zurückgelegte Wegstrecke s_1:

$$s_1 = d + v \cdot t_1 \stackrel{!}{=} c \cdot t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{d}{c-v} = \frac{480\,000\,\mathrm{km}}{300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot (1 - \frac{55}{73})} = 6.4889\,\mathrm{s}$$

Ganz analog finden wir für die Wegstrecke s_2 resp. die Zeit t_2 des Signals vom Fighter zum Falcon:

$$s_2 = d - v \cdot t_2 \stackrel{!}{=} c \cdot t_2 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{d}{c+v} = \frac{480\,000\,\mathrm{km}}{300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot (1 + \frac{55}{73})} = 0.9125\,\mathrm{s}$$

Die totale Laufzeit des Radarsignals beträgt somit im Planetensystem:

$$t = 6.4889\,\mathrm{s} + 0.9125\,\mathrm{s} = 7.4014\,\mathrm{s}$$

Diese Zeit können wir mittels Zeitdilatation ins Raumschiffsystem umrechnen. Dort verstreicht unterdessen weniger Zeit als auf einer Tatooine-Uhr, nämlich:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{7.4014\,\mathrm{s}}{\frac{73}{48}} = 7.4014\,\mathrm{s} \cdot \frac{48}{73} = 4.867\,\mathrm{s}$$

Das bestätigt unser Resultat aus Aufgabe (a).

Bemerkung: Die beiden Raumschiffe bilden mit den Radarimpulsen eigentlich einfach eine sehr grosse Lichtuhr, die in ihrem Eigensysstem die Periode $t' = 4.867\,\mathrm{s}$ aufweist. Die Überlegungen und Rechnungen unter (b) und (c) entsprechen genau unseren Ausführungen bei der Herleitung der Längenkontraktion!