Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 3: Lorentzfaktor und Doppelspaltexperiment

1. *Geschwindigkeitsangaben $\boldsymbol{\beta}$ relativ zur Lichtgeschwindigkeit und Lorentzfaktor γ*

   In der nächsten Woche werden wir die Einstein'schen Postulate verwenden, um erste grundlegende Konsequenzen der Relativitätstheorie herzuleiten. Dabei kommen wie von selbst immer wieder dieselben Bruchterme ins Spiel, nämlich

   $$\frac{v}{c} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad .$$

   Tatsächlich kommen diese Ausdrücke so häufig vor, dass wir für sie eigene Symbole einführen wollen!

   - Die Zahl
     $$\beta := \frac{v}{c}$$
     steht für das Verhältnis der Geschwindigkeit v zur Lichtgeschwindigkeit c. Damit ist β selber eine Geschwindigkeitsangabe *relativ zur Lichtgeschwindigkeit*. Bewegt sich beispielsweise ein Körper mit $85\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit, so ist $v = 85\,\% \cdot c$ und somit $\beta = \frac{v}{c} = 85\,\% = 0.85$. Geschwindigkeiten mit β anstelle von v anzugeben, dient der Übersichtlichkeit der Formeln.
   - Welche Bedeutung dem sogenannten **Lorentzfaktor**
     $$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
     innewohnt, werden wir in den nächsten Wochen immer besser begreifen. Im Moment ist γ erst ein mathematischer Ausdruck, den wir an dieser Stelle ein wenig "untersuchen" wollen.

   Nun bist du bereit für die folgenden Fragestellungen.

   (a) Im Fadenstrahlrohr im Physikunterricht (Elektronenstrahl) haben wir Elektronen z.B. mit einer Spannung von $350\,\mathrm{V}$ beschleunigt. Da die Spannung für "Energie pro Ladung" ($U = \frac{\Delta E}{q}$) steht, haben die Elektronen bei dieser Beschleunigung eine kinetische Energie von

   $$\Delta E = q \cdot U = e \cdot 350\,\mathrm{V} = 350\,\mathrm{eV} \qquad \text{mit} \quad e = \text{Elementarladung} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

   abbekommen (eV = Elektronvolt = gute Energieeinheit für die kinetischen Energie von Teilchen, weil so direkt sichtbar ist, durch wie viel Spannung sie beschleunigt wurden).
   Wie gesagt, diese elektrische Energie wurde bei der Beschleunigung zu kinetischer Energie. Benutze die klassische Formel für die kinetische Energie – $E_{\mathrm{kin}} = \frac{mv^2}{2}$ – um die Geschwindigkeit dieser Elektronen zu bestimmen. Gib dann die zugehörigen Werte von β und γ an.
   Hinweis: $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

   (b) Im Gegensatz zu β kann der Lorentzfaktor nicht beliebige Werte annehmen. Berechne β und γ für $v = 2.95\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}, 29.5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}, 295\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}, 2950\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}, 29\,500\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ und $295\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Was stellst du bei der Entwicklung von γ fest? Wo liegen die möglichen Werte von γ?

   (c) Wie steht es für $v = c$ und für $v > c$? Welche Werte nehmen β und γ an?

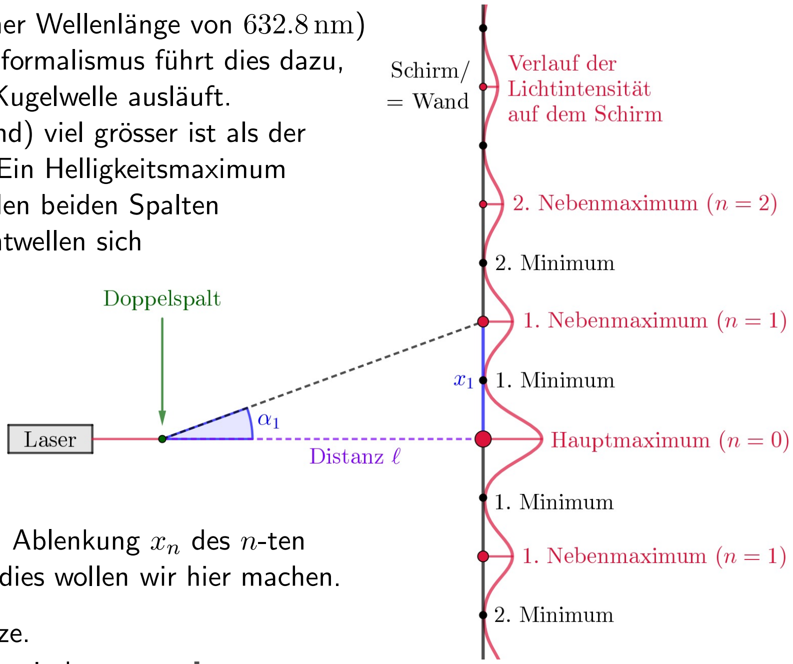
   (d) Lasse dir den Lorentzfaktor γ in GeoGebra als Funktion von β auftragen ($\gamma(\beta) = 1/\sqrt{1-\beta^2}$).

   (e) $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ sagt uns, wie der Lorentzfaktor bei gegebener Geschwindigkeit v zu berechnen ist. Manchmal möchten wir aber auch das Umgekehrte tun.
   Löse also die Formel für γ nach β resp. v auf. Berechne anschliessend β und v für $\gamma = 2, 10, 1000$ und $10\,000$.

2. *Das Doppelspalt-Experiment*

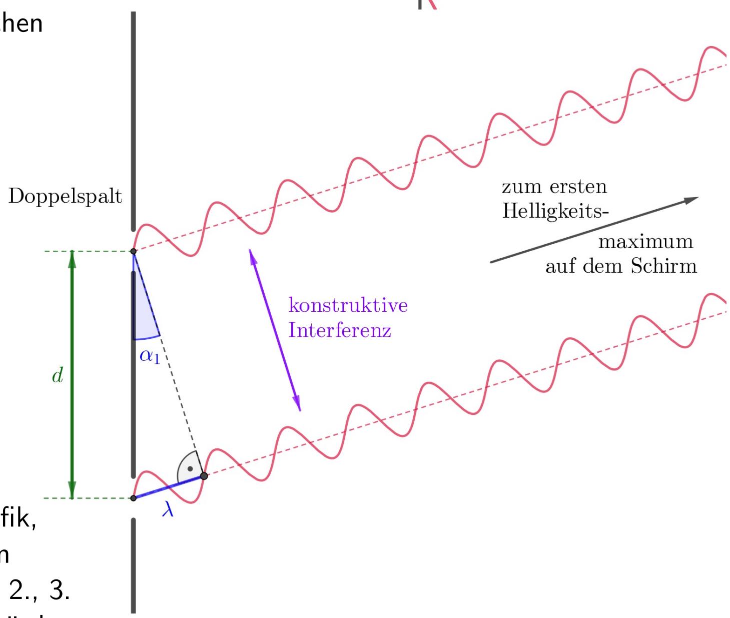
In dieser Aufgabe soll es darum gehen, die beim Doppelspalt-Versuch beobachteten Helligkeitsmaxima und -minima besser zu verstehen und die Orte ihres Auftretens mit dem Abstand zwischen den beiden Spalten in Verbindung zu bringen.

Der Laserstrahl (He-Ne-Laser mit einer Wellenlänge von $632.8\,\mathrm{nm}$) trifft auf den Doppelspalt. Im Wellenformalismus führt dies dazu, dass hinter jedem Spalt eine eigene Kugelwelle ausläuft.
Da der Abstand zum Schirm (= Wand) viel grösser ist als der Spalt selber, können wir nun sagen: Ein Helligkeitsmaximum entsteht genau dann, wenn die von den beiden Spalten parallel zueinander auslaufenden Lichtwellen sich konstruktiv überlagern.



Aus dieser Überlegung lässt sich ein mathematischer Zusammenhang zwischen dem Spaltabstand d, der Lichtwellenlänge λ und den gemessenen resp. makroskopisch beobachteten Grössen (Abstand ℓ zwischen Doppelspalt und Wand und Ablenkung x_n des n-ten Nebenmaximums) aufstellen. Genau dies wollen wir hier machen.

(a) Betrachte zuerst die obere Skizze.
Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Ablenkung x_n des n-ten Nebenmaximums und dem dazugehörenden Ablenkungswinkel α_n? (Trigo!)



(b) Betrachte nun die untere Skizze.
Zunächst eine Verständnisfrage:
Weshalb sind die auslaufenden Lichtwellen parallel eingezeichnet?

(c) Und weshalb sollten wir beim Doppelspaltversuch monochromatisches Licht, also Licht von einer ganz bestimmten Farbe resp. Wellenlänge, verwenden?

(d) Überlege dir anhand der unteren Grafik, was anders wäre, wenn wir die beiden auslaufenden Wellen in Richtung des 2., 3. oder n-ten Nebenmaximums zielen würden.

(e) Stelle nun eine trigonometrische Beziehung auf zwischen dem Spaltabstand d, dem Ablenkungswinkel α_n zum n-ten Nebenmaximum und der Wellenlänge λ.

(f) In unserer realen Durchführung des Doppelspaltversuchs waren die Ablenkungen x_n der gut sichtbaren Nebenmaxima (bis ca. $n = 15$) viel geringer als die Distanz ℓ zwischen Doppelspalt und Wand: $\ell \gg x_n$. Das bedeutet, die Ablenkungswinkel α_n waren sehr klein.
Nun wissen wir aufgrund der Definitionen der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck, dass es zwischen $\sin(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ für sehr kleine Winkel kaum einen Unterschied gibt:

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \quad \text{für kleine } \alpha$$

Benutze diese Vereinfachung und deine Resultate aus (a) und (e), um nun eine Beziehung zwischen n, ℓ, x_n, λ und d aufzustellen!

(g) In unserem Schulzimmerversuch erheben wir unter Verwendung des He-Ne-Lasers mit einem bestimmten Doppelspalt die folgenden Messwerte: bei $3.45\,\mathrm{m}$ Abstand zur Wand beträgt die Distanz zwischen dem 10. Helligkeitsmaximum links und dem 10. Helligkeitsmaximum rechts $17.7\,\mathrm{cm}$.

Wie gross war in unserem Versuch folglich der Spaltabstand?

(h) Schliesslich noch zwei Kontrollfragen, die ganz allgemein wichtig ist, wenn wir mit Licht kleine Objekte anschauen möchten:

i. Wird α_1 zu einem rechten Winkel, so ist vom Interferenzmuster im Wesentlichen nichts mehr zu sehen und wir können auch keine Rückschlüsse auf die Grösse des Spalts mehr machen. Überlege dir anhand des unter (e) gefundenen Zusammenhangs. Welche Beziehung zwischen der Wellenlänge λ und der Objektgrösse d folglich gelten muss, wenn wir mit dem Licht dieser Wellenlänge ein Objekt "sehen", also Einzelheiten auflösen können wollen.

ii. Warum können wir auch mit dem besten Mikroskop der Welt keine Atome mit eigenen Augen sehen? Und was müssen wir machen, um mit elektromagnetischen Wellen trotzdem Atome zu "sehen"?

3. **Fakultative Herausforderung:** *Falsifizierung der Ritz'schen Hypothese*

   Selbst nach der Veröffentlichung der Einstein'schen Relativitätstheorie im Jahr 1905 gab es noch viele Wissenschafter, die der neuen und revolutionären Idee, von der wir noch mehr erfahren werden, nicht wirklich trauten. Sie versuchten daher, die alte Newton'sche Physik mit verschiedenen Ansätzen zu retten.

   1908 stellte z.B. Walter Ritz (1878 – 1909) die Hypothese auf, dass sich Licht, dass Licht je nach Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger den Empfänger mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten erreicht. Licht von einem Stern, der sich von der Erde entfernt, sollte daher mit kleinerer Geschwindigkeit auf der Erde ankommen als Licht von einem Stern, der sich der Erde nähert.

   Hier kannst du diese Hypothese falsifizieren (d.h. widerlegen). Betrachte dazu ein Doppelsternsystem bestehend aus zwei Sternen, die um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen. Der leichtere Stern 1 besitze eine Sonnenmasse ($m = M_\odot = 2.0{\cdot}10^{30}\,\mathrm{kg}$), der massigere Stern 2 deren zwei ($M = 2M_\odot$). Der Abstand r zwischen den beiden Sternen betrage eine astronomische Einheit ($r = 1\,\mathrm{AE} = 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$).

   (a) Berechne die Bahngeschwindigkeit v_1 und die Umlaufszeit T des leichteren Sterns!

   Hinweise

   - Der Schwerpunkt der beiden Sterne unterteilt die Verbindungsstrecke zwischen ihnen im umgekehrten Massenverhältnis $\Rightarrow$ der leichtere Stern 1 ist weiter weg vom gemeinsamen Schwerpunkt und hat einen Bahnradius von $r_1 = \frac{2}{3}\,\mathrm{AE}$.
   - Die beiden Sterne ziehen sich gegenseitig gravitativ an und halten sich so auf ihrer Umlaufbahn. Das Gravitationsgesetz lautet:

   $$F_\mathrm{G} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

   - Für jeden Stern gilt einzeln, dass die Gravitation die für die Kreisbewegung notwendige Zentripetalkraft liefert:

   $$F_{\mathrm{Z},1} = \frac{m v_1^2}{r_1} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

   - Für Bahngeschwindigkeiten gilt bei Kreisbahnen stets: $v = \frac{2\pi r}{T}$.

   (b) Die Erde sei bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktes der beiden Sterne etwa in Ruhe. Sie befinde sich zudem in der Ebene, in der sich die beiden Sterne gegenseitig umkreisen. Das bedeutet, jeder Stern bewegt sich manchmal auf die Erde zu und manchmal von ihr weg.

   Gemäss der Ritz'schen Hypothese hätte somit das Licht, das z.B. vom leichteren Stern zu uns kommt, manchmal eine grössere und manchmal eine kleinere Geschwindigkeit.

   Berechne aus dieser Überlegung die kleinste Entfernung (zwischen Erde und dem System der sich gegenseitig umkreisenden Sterne), in welcher der leichtere Stern gemäss der Ritz'schen Hypothese für einen Beobachter hier zweimal zu sehen sein müsste.

   Tipp: Vermutlich musst du zuerst einmal gründlich darüber nachdenken, was hier gesagt und behauptet wird, bevor du dich an die Rechnung machen kannst.

   Hinweis: Gehe davon aus, dass das Licht einer relativ zu uns ruhenden Lichtquelle auch in der Ritz'schen Theorie mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3.00 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ unterwegs ist.