Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 3: Lorentzfaktor und Doppelspaltexperiment – LÖSUNGEN

1. *Geschwindigkeitsangaben β relativ zur Lichtgeschwindigkeit und Lorentzfaktor γ*

   (a) Die kinetische Energie, die ein Elektron bei der Beschleunigung erhält, entspricht der (potenziellen) elektrischen Energie, die es bei der Durchquerung der Beschleunigungsspannung verliert. Sie beträgt:

   $$E_{\text{kin}} = q \cdot U = e \cdot 350\,\text{V} = 350\,\text{eV} = 350 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} = 5.607 \cdot 10^{-17}\,\text{V}$$

   Das scheint eine wahnsinnig kleine Energiemenge zu sein. Wir haben es aber auch mit ungeheuer leichten Teilchen zu tun. Die Elektronenmasse beträgt lediglich $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$, sodass zu dieser kinetischen Energie doch eine respektable Geschwindigkeit gehört:

   $$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5.607 \cdot 10^{-17}\,\text{V}}{9.109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}} \simeq 11\,095\,450\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 11\,095\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

   Nun können wir zu dieser Geschwindigkeit β und γ angeben:

   $$\beta = \frac{v}{c} = \frac{11\,095\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 0.03698 \simeq 3.7\,\%$$

   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.03698^2}} = 1.00068$$

   Dass γ sehr nahe an 1 liegt, zeigt uns, dass wir immer noch ohne grossen Fehler klassisch rechnen dürfen, obwohl $v = 11\,095\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ offensichtlich ereits beine sehr grosse Geschwindigkeit ist. In diesem Sinne war auch die Verwendung der klassischen Formel $E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$ für die Berechnung der kinetischen Energie gerechtfertigt.

   (b) Für die verschiedenen Geschwindigkeitswerte erhalten wir:

   $$v = 2.95\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{2.95\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 9.83 \cdot 10^{-6}$$
   $$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(9.83 \cdot 10^{-6})^2}} = 1 + 4.83 \cdot 10^{-11}$$

   $$v = 29.5\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{29.5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 9.83 \cdot 10^{-5}$$
   $$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(9.83 \cdot 10^{-5})^2}} = 1 + 4.83 \cdot 10^{-9}$$

   $$v = 295\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{295\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 9.83 \cdot 10^{-4}$$
   $$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(9.83 \cdot 10^{-4})^2}} = 1 + 4.83 \cdot 10^{-7}$$

   $$v = 2950\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{2950\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 0.00983 \approx 1\,\%$$
   $$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.00983)^2}} = 1 + 4.83 \cdot 10^{-5}$$

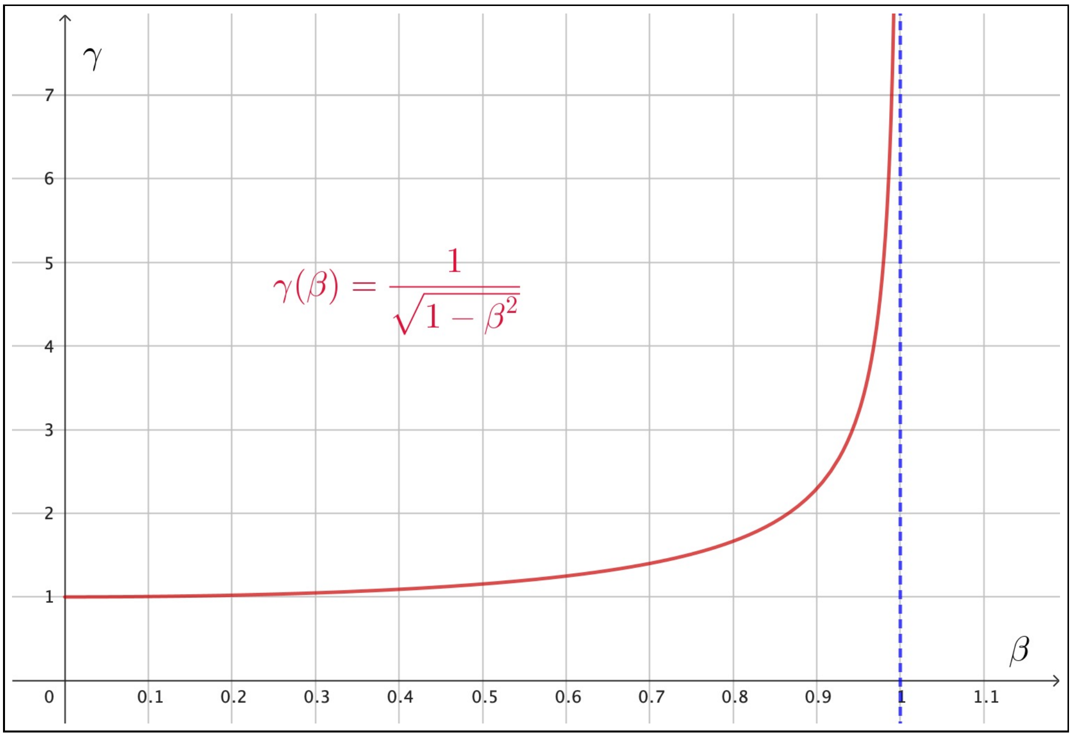
$$
\begin{aligned}
v = 29\,500\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \quad &\Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{29\,500\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 0.0983 = 9.83\,\%\\
&\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.0983)^2}} = 1.00487\\
v = 295\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \quad &\Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{295\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 0.983 = 98.3\,\%\\
&\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.983)^2}} = 5.50
\end{aligned}
$$

Fazit: Für $v \to c$ geht β gegen 1 und γ wird immer grösser.
Gehen wir mit v beliebig nahe an c, so erreicht γ jeden noch so grossen Wert, denn dann geht unter der Nennerwurzel $1-\beta^2$ gegen 0, folglich geht auch die Wurzel gegen 0 und der ganze Bruch somit gegen unendlich.
Erst ab ca. $v = 10\,\%\,c$ beginnt sich γ merklich von 1 zu entfernen. Bei geringeren Geschwindigkeiten sollte man folglich ohne nennenswerten Fehler klassisch rechnen dürfen.
Halten wir nochmals fest, wo sich die möglichen Werte von β und γ bewegen. Dabei wollen wir auch negative Geschwindigkeiten zulassen:

$$-c < v < c \quad \Rightarrow \quad -1 < \beta < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \gamma < \infty$$

(c) Für $v = c$ wäre $\beta = 1$ und somit wäre der Nenner in $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ gleich 0. γ wäre folglich undefiniert. Das kann nicht sein!
Für $v > c$ wäre $\beta > 1$ und somit wäre der Nenner in $1-\beta^2 < 0$. Dieser Ausdruck steht in γ aber unter der Nennerwurzel. Folglich wäre diese Wurzel und somit auch γ erneut undefiniert. Gemäss Relativitätstheorie sind für Objekte mit Masse eben nur Geschwindigkeiten $v < c$ möglich, sodass γ immer wohldefiniert bleibt.

(d) Für den Funktionsgraphen ergibt sich:



Wir sehen, wie der Graph lange flach bleibt und erst über $\beta = 50\,\%$ so richtig anzusteigen beginnt und vom Wert 1 wegkommt. Genau dieses Verhalten des Lorentzfaktors hatten wir ja bereits unter (b) bemerkt.

(e) Für die Auflösung nach β folgt:

$$
\begin{aligned}
& & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & &\mid (\ldots)^2 \\
&\Rightarrow & \gamma^2 &= \frac{1}{1-\beta^2} & &\mid \cdot \left(1-\beta^2\right) \\
&\Rightarrow & \gamma^2\left(1-\beta^2\right) &= 1 & &\mid \text{ausmultiplizieren} \\
&\Leftrightarrow & \gamma^2-\beta^2\gamma^2 &= 1 & &\mid -\gamma^2 \\
&\Leftrightarrow & -\beta^2\gamma^2 &= 1-\gamma^2 & &\mid \cdot(-1) \\
&\Leftrightarrow & \beta^2\gamma^2 &= \gamma^2-1 & &\mid : \gamma^2 \\
&\Leftrightarrow & \beta^2 &= 1-\frac{1}{\gamma^2} & &\mid : \sqrt{\ldots} \\
&\Rightarrow & \beta &= \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit v:

$$v = \beta \cdot c = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \cdot c$$

Wir setzen die gegebenen γ-Werte ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\gamma = 2 \quad &\Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 86.6\,\% \\
&\Rightarrow \quad v = \beta \cdot c \approx 0.866 \cdot 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \approx 260\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \\
\gamma = 10 \quad &\Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{10^2}} = \sqrt{\frac{99}{100}} \approx 99.5\,\% \\
&\Rightarrow \quad v = \beta \cdot c \approx 0.995 \cdot 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \approx 298\,500\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \\
\gamma = 1000 \quad &\Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{1000^2}} = \sqrt{\frac{999\,999}{1\,000\,000}} \approx 99.99995\,\% \\
&\Rightarrow \quad v = \beta \cdot c \approx 0.9999995 \cdot 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \approx 299\,999.8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \\
\gamma = 10\,000 \quad &\Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{10\,000^2}} = \sqrt{\frac{99\,999\,999}{100\,000\,000}} \approx 99.9999995\,\% \\
&\Rightarrow \quad v = \beta \cdot c \approx 0.999999995 \cdot 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \approx 299\,999.998\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Natürlich müsste man bei den letzten beiden Rechnungen eigentlich mit einem genaueren Wert für c arbeiten, sonst sind diese vielen angegebenen Stellen einfach falsch!

Wir stellen fest: Der Lorentzfaktor γ beschreibt bei Werten über 2 lauter Geschwindigkeiten, die bereits sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegen und mit Angaben in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ fast nicht voneinander zu unterscheiden sind. Aus diesem Grund werden in der Teilchenphysik, in der Teilchen mit derart grossen Geschwindigkeiten Gang und Gäbe sind, kaum Geschwindigkeitsangaben verwendet. Viel gebräuchlicher ist die Angabe der kinetischen Energie, die die Teilchen tragen. Diese wird dann typischerweise mit einem Einheitenvorsatz in Elektronvolt eV angegeben, also z.B. MeV, GeV oder gar TeV.

2. *Das Doppelspalt-Experiment*

   (a) Bezüglich dem Winkel α_n ist x_n die Gegenkathete und die Distanz ℓ zum Schirm die Ankathete. Somit finden wir:

   $$\tan(\alpha_n) = \frac{x_n}{\ell}$$

   (b) Der Abstand d der beiden Spalte des Doppelspaltes ist wahnsinnig klein im Vergleich zur Distanz ℓ zum Schirm. Wenn wir so nahe an den Doppelspalt heranzoomen, wie das in der unteren Skizze der Fall ist, wird dort nicht mehr zu sehen sein, dass die beiden Wellen effektiv auf denselben Punkt in der Ferne zielen. Auch für die Interferenz spielt diese Abweichung vom exakt parallelen Fall keine Rolle mehr.

   (c) Würden wir Licht verwenden, das mehrere Wellenlängen resp. mehrere Farben enthält, so würde dies dazu führen, dass jedes Nebenmaximum diese Farben nebeneinander enthält und eben deutlich mehr Platz beansprucht. Dies könnte dazu führen, dass sich die verschiedenen Nebenmaxima gegenseitig überlagern und nicht mehr so gut sichtbar ist, welches Nebenmaximum welches ist. Ausserdem ist es ja so, dass sich für unser Auge neue Farbeindrücke ergeben, wenn sich verschiedene Spektralfarben überlagern. Das Interferenzmuster wäre also viel weniger deutlich sichtbar, wenn überhaupt noch!

   (d) In Richtung eines Nebenmaximums müssen sich die beiden Wellen konstruktiv überlagern. Beim 1. Nebenmaximum beträgt die Streckendifferenz zum Ort auf dem Schirm genau eine Wellenlänge. Analog wären es beim 2. Nebenmaximum zwei Wellenlängen, beim 3. dann drei und beim n-ten Nebenmaximum eben n Wellenlängen.

   (e) Wir betrachten das in der Skizze sichtbare rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse durch die Spaltbreite d gegeben ist. Die Gegenkathete des Winkels α_n entspricht dann genau dem Streckenunterschied der beiden Wellen zum n-ten Nebenmaximum, also gemäss (d) dem n-fachen der Wellenlänge, wenn konstruktive Interferenz vorliegen soll. Es folgt also:

   $$\sin(\alpha_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d}$$

   (f) Da für kleine Winkel α_n ohne grossen Fehler $\sin(\alpha_n) \approx \tan(\alpha_n)$ gesetzt werden kann, folgern wir aus (a) und (e):

   $$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{n \cdot \lambda}{d} \approx \frac{x_n}{\ell}$$

   (g) Nun können wir den Spaltabstand d aus den gegebenen Daten berechnen. Achtung, die $17.7\,\mathrm{cm}$ stehen für die Strecke vom 10. Nebenmaximum links zum 10. Nebenmaximum rechts. Wir müssen diesen Wert halbieren, um x_n zu erhalten:

   $$\begin{aligned} d \approx \frac{n \cdot \lambda \cdot \ell}{x_n} &= \frac{10 \cdot 632.8\,\mathrm{nm} \cdot 3.45\,\mathrm{m}}{\frac{17.7\,\mathrm{cm}}{2}} \\ &= \frac{10 \cdot 632.8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \cdot 3.45\,\mathrm{m}}{8.85 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 2.47 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.247\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

   (h) i. Damit Licht sichtbar, also mit einem merklichen Effekt für die Lichtausbreitung, mit dem Objekt interagiert, muss der Ablenkungswinkel α_1 kleiner als $90°$ sein. Das bedeutet, $\sin(\alpha_1) < 1$ und somit folgt aus dem gefundenen Zusammenhang:

   $$\frac{\lambda}{d} < 1 \qquad \text{resp.} \qquad \lambda < d$$

   Damit wir mittels einer elektromagnetischen Welle etwas von einem Objekt bemerken können, muss das Objekt grösser sein als die Wellenlänge.

ii. Genau aus diesem Grund werden wir Atome mit dem für uns sichtbaren, sogenannt *optischen* Licht nicht sehen können, denn Atome sind etwa um einen Faktor 1000 kleiner als die Wellenlängen des optischen Lichts.
Das hat nichts mit der Vergrösserung eines Mikroskops zu tun, sondern mit einer grundlegenden Eigenschaft der Wellen.
In die Gegenrichtung sind die sichtbaren Wellenlängen viel kleiner als unsere Alltagsobjekte, dann werden alle Nebenmaxima extrem nahe zusammengeschoben und das Licht geht scheinbar vollständig geradeaus. Wir landen in diesem Fall bei der Strahlenoptik, wo wir die Ausbreitung von Licht durch gerade Lichtstrahlen beschreiben und so z.B. Phänomene wie Licht und Schatten verstehen.

3. *Falsifizierung der Ritz'schen Hypothese*

(a) Die Gravitation hält die beiden Sterne auf ihren Kreisbahnen und ist somit gleichzusetzen mit der Zentripetalkraft. Wir betrachten diese Kraftbeziehung für den leichteren Stern mit Masse m und Bahnradius r_1 und bestimmen daraus zunächst seine Bahngeschwindigkeit v_1:

$$\begin{aligned}
& F_Z = F_G && \mid \text{Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & \frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{GMm}{r^2} && \mid \cdot \frac{r_1}{m} \\
\Leftrightarrow \quad & v_1^2 = \frac{GMr_1}{r^2} && \mid \sqrt{\cdots} \\
\Rightarrow \quad & v_1 = \sqrt{\frac{GMr_1}{r^2}} && \mid \text{Werte einsetzen} \\
& = \sqrt{\frac{G \cdot 2M_\odot \cdot \frac{2}{3}\,\mathrm{AE}}{(1\,\mathrm{AE})^2}} = \sqrt{\frac{G \cdot 2M_\odot \cdot \frac{2}{3}}{1\,\mathrm{AE}}} \\
& = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 2 \cdot 2.0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot \frac{2}{3}}{1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}} = 34\,445\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 34.4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Für die Umlaufszeit folgt unmittelbar aus dieser Bahngeschwindigkeit:

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi \cdot \frac{2}{3}\,\mathrm{AE}}{34\,445\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}{34\,445\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 18\,240\,000\,\mathrm{s} = 0.578\,\mathrm{Jahre}$$

(b) Bewegt sich der leichtere Stern weg von der Erde, so beträgt seine Geschwindigkeit gemäss der Ritz'schen Hypothese: $c_1 = c - v_1$.

Umgekehrt ist das Licht schneller, wenn es in dem Moment ausgesendet wird, wenn sich der Stern auf uns zu bewegt: $c_2 = c + v_1$.

Startet nun zum Zeitpunkt $t = 0$ das Licht beim sich von uns entfernenden Stern, also mit Geschwindigkeit c_1, so beginnt eine halbe Periode danach die "Aufholjagd" des Lichts mit Geschwindigkeit c_2, das vom sich maximal auf uns zu bewegenden Stern ausgesendet wird. Nach welcher Zeit t und in welcher Entfernung s vom Stern wird das eine Lichtsignal vom anderen eingeholt?

Wir lösen die entsprechende Gleichung und erhalten zunächst für die Zeit t:

$$\begin{aligned}
s = c_1 t = c_2\left(t - \frac{T}{2}\right) & \quad |\,\text{ausmultiplizieren}\\
\Leftrightarrow \quad c_1 t = c_2 t - \frac{c_2 T}{2} & \quad |\,-c_2 t\\
\Leftrightarrow \quad c_1 t - c_2 t = -\frac{c_2 T}{2} & \quad |\,t\ \text{ausklammern}\\
\Leftrightarrow \quad t(c_1 - c_2) = -\frac{c_2 T}{2} & \quad |\,c_1 - c_2 = c - v_1 - (c + v_1) = -2v_1\\
\Leftrightarrow \quad -2v_1 t = -\frac{c_2 T}{2} & \quad |\,:(-2v_1)\\
\Leftrightarrow \quad -2v_1 t = -\frac{c_2 T}{2} & \quad |\,c_2 \approx c\\
\Leftrightarrow \quad t = \frac{cT}{4v_1} & \quad |\,\text{Werte einsetzen}\\
= \frac{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 0.578\,\text{Jahre}}{4 \cdot 34.4\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 1260\,\text{Jahre} &
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun für die Distanz zum Stern, die wir gleich in Lichtjahren ausdrücken wollen ($1\,\text{LJ} = c \cdot 1\,\text{Jahr}$):

$$s = c_1 t \approx ct = c \cdot 1260\,\text{Jahre} = 1260\,\text{LJ}$$

Für jede Distanz grösser als diese $1260\,\text{LJ}$ müsste es Momente geben, in denen der Stern von der Erde aus doppelt zu sehen wäre, denn dies ist die Mindestdistanz für dieses Phänomen.

Es gibt drei Facts anzumerken:

- Doppelsternsysteme sind nach allem, was wir heute wissen, gar keine Seltenheit. Im Gegenteil, es wimmelt davon nur so.
- Es gibt ganz verschiedene Arten von Doppelsternsystemen. Die in dieser Aufgabe angenommenen Daten sind aber gar nicht ungewöhnlich. Es gibt Doppelsterne mit kürzeren oder längeren Umlaufszeiten.
- In der Milchstrasse zählen Sterne bis zu einer Distanz von ein paar tausend Lichtjahren zu unserer unmittelbaren Nachbarschaft, die wir mit Teleskopen sehr gut beobachten können. Die erhaltene Distanz ist auf dieser Skala also nicht besonders gross.

Das alles zusammen bedeutet: Wäre die Ritz'sche Hypothese korrekt, so müssten wir diesen Effekt des doppelt Sehens von Sternen tatsächlich beobachten können. Das ist aber nicht der Fall. Der Effekt wurde noch nie registriert. Die logische Folgerung kann daher nur sein, dass die Hypothese falsch ist!