Übungen zum EF Physik des 20. Jahrhunderts

Serie 2: Quantitative Vorbereitung zum Versuch von Michelson und Morley (1887)

1. *Mehr Beispiele zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition*

   (a) Bearbeite die Aufgabe 2.3 auf Seite 65 im Buch von Griffiths.

   (b) Ein "Alltagsbeispiel": In einem Ferrari hat ein Freak eine Modellautobahn aufgestellt, in der die kleinen Autos auf der langen Geraden – im Auto in Vorwärtsrichtung – im Auto eine Geschwindigkeit von $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ erreichen.
   Wie schnell sind die kleinen Boliden auf dieser langen Geraden von der Strasse aus gesehen, wenn der Ferrari selber mit $250\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ unterwegs ist.
   Rechne zuerst klassisch und versuche dann eine relativistische Berechnung.

Vorbereitungen zum Versuch von Michelson und Morley

In den folgenden Aufgaben wollen wir die rechnerischen Grundlagen erarbeiten, mit denen der Effekt eines Ätherwinds auf die Ausbreitung des Lichtes beschrieben werden kann. Damit werden wir nächste Woche nachvollziehen können, weshalb das Experiment von Michelson und Morley einen solchen Äther eigentlich hätte nachweisen müssen, wenn es diesen Äther denn wirklich geben würde.

Bei dieser Vorbereitung arbeiten wir zunächst mit einer vergleichbaren realen Situation. Wir betrachten ein Boot, das auf einem Fluss unterwegs ist – einmal in Längs- und einmal in Querrichtung.

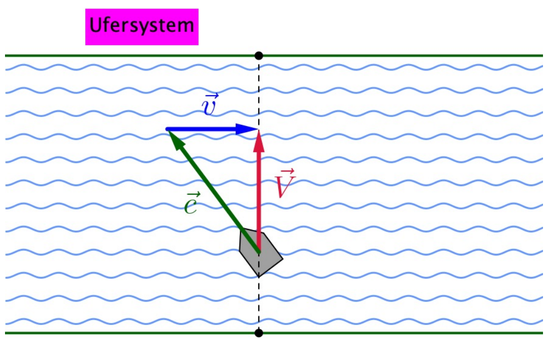
- Das Boot bewegt sich relativ zum Wasser mit in egal welcher Richtung stets mit einer bestimmten Geschwindigkeit $c = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (die durch den Bootsmotor vorgegeben wird). Das wäre vergleichbar mit dem Licht, dass im Äther(system) in alle Richtungen gleich schnell unterwegs sein müsste.
- Relativ zum Ufer strömt das Flusswasser mit einer Fliessgeschwindigkeit $v = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Dies wäre vergleichbar mit dem Äther, der sich relativ zur Erde bewegt, resp. eben mit der Erde, die sich relativ zum Äther bewegt. Als Folge davon müssten auf der Erde die Auswirkungen dieser Relativbewegung, also des *Ätherwindes*, zu beobachten sein.

2. *Querfahrt numerisch*

   Das Boot soll den Fluss mit einer Breite $b = 20\,\mathrm{m}$ genau senkrecht zur Fliessrichtung überqueren – und zwar hin und zurück, wobei es ohne Verzögerung umkehrt, sobald es das andere Ufer erreicht hat.

   Welche Zeit t_{Q} beansprucht diese Querfahrt?

   Hinweis zur Skizze rechts: Damit das Boot netto senkrecht zur Fliessrichtung des Wassers unterwegs ist, muss es selber ein wenig in Flussaufwärtsrichtung gestellt sein. Aus c und v ergibt sich so aufgrund der Vektorsituation und mit dem Satz von Pythagoras eine Nettogeschwindigkeit V, mit der das Boot den Fluss überquert.



$\vec{c}$ = Fahrtgeschwindigkeit des Bootes relativ zum Wasser

$\vec{v}$ = Fliessgeschwindigkeit des Wassers

$\vec{V}$ = Nettogeschwindigkeit des Bootes relativ zum Ufer

3. *Querfahrt rein formal*

   Notiere das Resultat t_{Q} von Aufgabe 2 rein formal in Abhängigkeit von b, c und v.

4. *Längsfahrt numerisch*

   Nun soll das Boot eine Strecke $s = 20\,\mathrm{m}$ längs des Flusses hin und zurück bestreiten. Auch hier kehrt es um, sobald es den Zielpunkt erreicht hat. Welche Zeit t_L beansprucht diese Längsfahrt?

   Hinweis: Nun gibt es zwei Nettogeschwindigkeiten relativ zum Ufer, eine für den Hinweg (z.B. flussabwärts = mit der Fliessrichtung des Wassers) und eine für den Rückweg (flussaufwärts = gegen das Wasser). Wie gross sind diese Nettogeschwindigkeiten und folglich die totale Fahrtzeit hin und zurück?

5. *Längsfahrt rein formal*

   Notiere das Resultat t_L von Aufgabe 4 rein formal in Abhängigkeit von s, c und v. Fasse den Ausdruck zu einem einzigen Bruch zusammen, in dessen Nenner $c^2 - v^2$ steht.

6. *Formale Weiterbearbeitung*

   (a) Du solltest nun über zwei formale Resultate aus den Aufgaben 3 und 5 verfügen. Beide lassen sich so umformen, dass sie fast gleich aussehen. Zeige, dass sie wie folgt notiert werden können:

   $$t_\mathrm{Q} = \frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{und} \qquad t_\mathrm{L} = \frac{2s}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

   (b) Wenn wir die Situation auf die Frage nach der Bewegung des Äthers übertragen, so müsste die Lichtgeschwindigkeit c im Äther ($\widehat{=}$ Bootsgeschwindigkeit relativ zum Wasser) extrem viel grösser sein als die Äthergeschwindigkeit v relativ zur Erde ($\widehat{=}$ Geschwindigkeit des Wassers relativ zum Ufer). Dafür schreiben wir kurz: $c \gg v$.

   Mit etwas Mathematik (sog. *Taylor-* oder *Potenzreihenentwicklung*) kann man zeigen, dass sich die beiden Bruchausdrücke $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und $\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ für $c \gg v$ wesentlich vereinfachen lassen:

   $$\text{Für } c \gg v \text{ gilt:} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2}$$

   Notiere t_Q und t_L nochmals unter Verwendung dieser Vereinfachungen.

7. *Formale Angabe der Differenz der Laufzeitdifferenzen*

   Im Versuch von Michelson und Morley wird uns die **Laufzeitdifferenz** zwischen Quer- und Längsbewegung interessieren. Bereits bei unseren numerischen Berechnungen in 2 und 4 hatten wir die Strecken gleich lang angesetzt. Nun seien auch formal die Längen beider Strecken identisch: $l = b = s$.

   (a) Notiere mit dieser Voraussetzung und mit den formalen Ausdrücken am Ende von Aufgabe 6 die Laufzeitdifferenz $\Delta t = t_\mathrm{L} - t_\mathrm{Q}$ zwischen den beiden verschiedenen Wegstrecken, wobei du den Ausdruck so weit wie möglich zusammenfasst.

   (b) Beim Michelson Morley-Versuch werden die beiden Wegstrecken gezielt miteinander vertauscht. D.h., es gibt eine zweite Laufzeitdifferenz $\Delta t' = t_\mathrm{Q} - t_\mathrm{L} = -\Delta t$.

   Schliesslich interessiert uns die Differenz zwischen diesen Laufzeitdifferenzen, also $\Delta t - \Delta t' = 2\Delta t$. Notiere diesen Ausdruck nochmals.

8. *Die relevante Grösse im Versuch von Michelson und Morley*

   Berechne zum Schluss den Wert von $2\Delta t$ für $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v = 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ und $l = 10\,\mathrm{m}$. Berechne weiter die Strecke, die das Licht während dieser Zeitspanne zurücklegt und vergleiche dein Resultat mit der Wellenlänge von rotem Licht ($\lambda_\mathrm{rot} \approx 600\,\mathrm{nm}$).